—持続の履歴にのみ關聯せしめ, 更にその以前の経過は考慮しないといふ制限——を破つて, 更に一般的な見地から理論を建設することである⁽¹⁾. 私は此の兩方面へ向つての大きな躍進を心より待望して歇まない.

最後に, 持続の問題へ私の注意を導いて下さつた藤原咲平先生, 此の小論の印刷に先だつて御通覽下され種々甚だ貴重なる御忠告を賜つた寺田寅彦先生に心より感謝の辭を申し上げます.

大 氣 の 擾 動 に 就 て (第 一 報)⁽¹⁾

櫻 庭 信 一, 木 邨 勇

Turbulent Motion in the Atmosphere (first paper)

By S. SAKURABA and I. KIMURA

Abstract:—Since the idea of eddy motion has been introduced in the domain of meteorology by G. I. Taylor and W. Schmidt the studies of this problem are too manifold to enumerate and their transition is it that, as N. Shaw says, “In the past century we have noted contributions from the united states, Great Britain, France, Germany, Austria and the Scandinavian countries. In the latter part of the period Japan has taken a full share in the task of expressing the behaviour of the atmosphere according to the laws of mathematical physics.”

Yet there remains an important discussion upon the mechanism of eddy motion undecidedly, namely, Taylor assumed the conservation of the vorticity fluid and Prandtl the conservation of the momentum in turbulent motion. Their difference in the equation of motion consists in that the former adopts the form $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ and the latter $\frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, whether η is variable or not where η denotes the coefficient of eddy viscosity, u the mean horizontal velocity and z the co-ordinate directed vertically upwards. They coincide with each other when η independent of z , but in general variation of η with z can never be made sight of. After the authority of G. I. Taylor we discussed the question

(1) 尤も斯くして到達された法則は最早や單に “持続” の法則とは稱し得ない所のものである筈である.

(1) 中央氣象臺彙報.

of eddies both theoretically and statistically, comparing with the S. Takaya's solution upon the problem of the same kind and proved out to some extent that we should adopt the form $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ as the term of eddy turbulence so far as it concerns the transfer of momentum, we believe.

1. 緒 言

G. I. Taylor 及び W. Schmidt によつて渦亂流の考が氣象學に取り入れられて以來、此れに關する諸學者の研究は殆んど枚舉に遑なきの感がある。然して之等の研究を總合すれば、渦動粘性係數 (coefficient of eddy viscosity) は決して常數で無く、之を局所的に見ても或は高さの函數であり、風速の函數であり、Lapse-rate (溫度) の函數であり、或は時間の函數である。然し勿論之等は互に獨立なものでは無くして、風速は高さの函數であり、時間の函數であり、溫度の函數であるが如く、御互に關聯して居るので、之を高さの或る函數とて微分方程式を解く方法が、比較的一般性を失ふ事も少いし數學的取扱ひも容易であるから、普通行はれてゐる様である。

此の種の論文の代表的なものとして吾々は高谷氏の論文⁽¹⁾を擧げる事が出来る。即ち渦動粘性係數の増減二様の場合を計算して Taylor の

$$V_s = V_G (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

に代るべき一般式として

$$V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{A} \sin \alpha)$$

$$\text{here} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{R}_0 = \frac{\ker \psi \ker' \psi + \operatorname{kei} \psi \operatorname{kei}' \psi}{\ker \psi \operatorname{kei}' \psi - \operatorname{kei} \psi \ker' \psi}$$

when coefficient of eddy viscosity increases upwards

$$\text{or} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_0 = \frac{\operatorname{ber} \psi \operatorname{ber}' \psi + \operatorname{bei} \psi \operatorname{bei}' \psi}{\operatorname{ber} \psi \operatorname{bei}' \psi - \operatorname{bei} \psi \operatorname{ber}' \psi}$$

when coefficient of eddy viscosity decreases upwards

を與へた。然して $\mathfrak{R}_0 > 1$ $\mathfrak{B}_0 < 1$ なる關係があつて $\psi \rightarrow \infty$ で $\mathfrak{R}_0$ も $\mathfrak{B}_0$ も 1 となる。但しこゝで注意すべき事は V. H. Ryd 及び M. A. Giblet の注意に従つて運動方程式中の渦亂流に依る項を

$$\frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial U}{\partial z} \quad U \text{ mean velocity}$$

η = coefficient of eddy viscosity

とおいた事である。もつともそれ以前 D. Brunt が “Internal Friction in the Atmos-

(1) 高谷静馬：大氣下層の粘性係數に就いて、海と空。第九卷，第三號。

phere" (Q. J. R. Met. Soc. 1920) なる論文に於て渦動粘性係数が高さの函数となる場合の二三の解式の例示に於て $\eta \rho \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ において, η を變數としたが, その吟味の無ゝのが残念だとして高谷氏は暗に充分の吟味を要する事を示されてゐる. その後 Prandtl⁽¹⁾ は渦亂流の mechanism を説明するために各 particle の運動量の保存を假定した. つまり此の理論によれば各 particle の渦動運動によつて起る極局部的の壓力傾度は全體の平均運動に關係せずして, その結果單位體積に運動量の賦與せらるゝ割合は $\rho \frac{d}{dz} \eta \frac{dU}{dz}$ となる. 然るに Taylor の vorticity 保存の假定に従へば, 運動量増加の割合は $\rho \eta \frac{d^2 U}{dz^2}$ となる. 然して, Taylor は後一文⁽²⁾を發表して, 若し Prandtl の運動量説が正しいとすれば溫度の分布と速度の分布とが平行性を示すべきであるとして, 實際に風洞の實驗を行つて以て Taylor 説の正しい事を裏書きした. Prandtl 説と Taylor 説との違ひは要するに η を $\frac{\partial}{\partial z}$ の中に入れるか外に出すかの違ひではあるが, 兩者何れを取るかに依つて, η を高さの函数とするときは, 大氣構成上に著しい結果の違ひをもたらしだらう事は容易に推察出来る. C. G. Rossby⁽³⁾ は "On the origin of travelling discontinuities in the atmosphere" なる題で次の様な事を述べてゐる.

There is, moreover, a principal difference between a frictional term of the type $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ and one of the type $\frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right)$. The former will, since μ is essentially positive, always have the same sign as $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, whether η is variable or not, and will therefore always tend to annihilate existing differences of velocity. The latter expression may, however, on account of the term $\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}$ have the opposite sign to $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. In this case differences of velocity already existing may under favourable conditions increase and finally develop into real discontinuities.

即ち Prandtl 流と Taylor 流との取扱ひ方によつて eddy の作用に重大なる違ひをもたらし事になる. 然し Taylor を待たずとも $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 型がいゝと云ふ事は, よしやその理論が薄弱なものだとしても H. Jeffreys に依つても見認められた事は上と同じ章下に

But it has been noted by H. Jeffreys that there is a strong argument in favour of the form $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ even when η varies with z , the allowance for the effect of varying

(1) 原文未讀.

(2) The Transfer of Vorticity and Heat through Fluids in Turbulent Motion by G. I. Taylor. Proc. Roy. Soc. A-135.

(3) Manual of Meteorology. Vol. IV, p. 68.

pressure upon the momentum of the moving eddy being just such as to cancel the

term $\frac{\partial \mu}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots$

とあるのでも解る。此の意味に於て高谷氏の解を検討して見るのは無駄で無いと思はれる。

2. 高谷氏の解の吟味

Taylor 以來の所謂渦動粘性係数を常數とした解式で説明のつかない事は高谷氏の理論で明らかにされた。今他の η を常數とせる場合と違ふ要點を摘記すれば次の如くである。但し Dobson の觀測材料を用ひてゐる。

- (1) 春は地上では粘性係数が小さくて高さと共に増加するに反し夏は地上に大きく高くなる程粘性係数は減少してゐる。一般に地上では春夏を限らず朝は晝に比して粘性係数が小さい。此れは地上の温度の影響を考へる事に依つて説明される。即ち夏と春との渦動粘性係数の分布を調べて見るに春は全體として盛で上に増加してゐるが夏は高さが増すと急劇に減少する。明らかに之は夏は下からの原因即ち熱渦動の誘發を示して居り春は上の低高氣壓から渦動が下に及んでゐるらしい。
- (2) 風速度の相違に依つて起つた渦は地表に原因したものより大きいらしい。
- (3) 粘性係数が上に減少するときは地上に於ける速度と傾角との關係式はその儘或る高さまで適用出来る。然るに粘性係数が増加するときは地上を離れると急に風速度が増し對數曲線的に發達する。

然して (1) の結論を與へた理由は高谷氏の解式によれば

$$V_s/V_G = \cos \alpha - \eta \sin \alpha$$

なる關係の $\eta > 1$ なる場合は粘性係数は高さに従つて増加し、 $\eta < 1$ なるときは減少する。之の理論よりすれば夏日は冬日より、晝は朝より、地上の温度の影響に依つて、温度傾度

第 一 圖

第 二 圖

が大になり、大氣の不安定度を増加して、渦の助長を來たし、その結果渦動が地上に大きく上に減少する場合を示す $Q < 1$ なる case がより多くなければならない、然るに實際に Lindenberg⁽¹⁾(1923) の観測材料を用ひて此の關係を見るに全く之と反對になつてゐる。之を第一圖及び第二圖に示す。第一圖に於いては横軸に月を取り縦軸に $Q > 1$ なる場合を與へる観測數と $Q < 1$ なる時の數との比を取つてある。第二圖には横軸に時間をとつてある。但し第二圖に於て 3 時及び 23 時に他に比較して観測回數が非常に少いのは疑はしい。此の傾向は何も Lindenberg の観測値にのみ限つたわけではなく英國の観測材料でも (Daily weather report and its upper air supplement. London, 1926—1927 に於ける Lympne, Croydon, Calshot, Holyhead 観測所の Data)。

霞浦等の日本の材料に於ても見認められる事であるが夏の観測を殆んど缺いてゐるのと時間別の豊富な材料を求める事が出来ないのとでこゝには掲げぬ事にした。もつとも此の高谷氏の $V_s = V_G(\cos \alpha - Q \sin \alpha)$ なる形には西村先生⁽²⁾ の反對の意の論文があつて V_s/V_G を縦軸にとり α を横軸にとれば殆んど直線的に變化して實測と合はない。之は Taylor その他の考に従つて、地上に於いて eddy による歪力の方向と風向とが同じ方向を取ると云ふ條件で解いた結果だとして、別の實驗的事實を基礎として

$$V_s = V_G \{ \cos \alpha - \tan(c - \alpha) \sin \alpha \}$$

なる式を提出して観測値とよく一致する事を述べられてゐる。然し此の式に於ても、大體に於て c をパラメーターとすれば観測値は抱括される事にはなるが曲線が例の $V_s/V_G - \alpha$ 曲線に於て上に凹となつてゐるために $\alpha = 70^\circ$ を越へるときは寧ろ實際値のない所を多く含むことになり、Guldberg-Mohn の $V_s = V_G \cos \alpha$ と全然曲率の向きが反對になる事はたとひ實驗的によく合つても（實測値のプロットの曲線は上に凸な曲線でも引き得る之は理論的に後に述べる）尙そこに多少の吟味を必要としはしまいか。⁽³⁾ 高谷氏の理論による eddy の高さによる分布を無視する事になりはしまいか 後で述べるが高谷の式に於ても西村の場合ほど顕著な曲率の變化はないが決して直線的變化はしない。

又淵秀隆氏⁽⁴⁾は、粘性係数は同じ夏に於ても時により所によつて或るときは上に増加し或るときは下に減少する、且その土地の海洋性か内陸性かによつて違ひ季節風の影響を受けて状況が變つて來ると述べられて居るが、熱渦動が果たして上に向つて粘性係数を増加するが如き強力なるものか、又水平動の差によつて發達せる渦動が強力に下に及んで局部

(1) Die Arseiten des Aeronautischen Observatoriums bei Lindenberg 1923.

(2) 西村傳三：大氣の運動について（其の三）、氣象集誌、第十卷、第一號。

(3) 測候技術官養成所理論氣象の課時に於ける藤原先生の御注意に啓發された著者の考である。

(4) 淵 秀隆：大氣下層の擾動に就いて、氣象集誌、第十卷、第六號。

的に發達せる熱渦動の影響を覆ふて全體として上に増加すると見做し得る場合は考へられぬか（地上渦動粘性係數及びその増分率は地上の條件と風向が傾度風方向に合する高さで決定される。淵氏の場合は

少し之と違ふが、そのUmkehrhöhe がやはり渦動粘性係數の地面値及び増分率の函數であるから問題の性質は同じである（と見做してよい）といふ様な問に對する充分な説明を缺いてゐる様に思はれる。第三圖は縦軸に α を取り横軸に地上と500米の高さとの溫度差を取つて（負は氣溫の逆轉を示す）ある。此れを見ると高谷氏の解式による、熱的地面的の影響を受ける即ち溫度の Lapse-rate の影響を顯著に受けると思はれる $\alpha < 1$ なる部分は ΔT の増加に對して殆んど變化なく、動學的に、

地上とは無關係に上より下に發達して來てゐると考へられる。 $\alpha > 1$ なる部分が寧ろ顯著に ΔT と共に増加してゐる。(2) は Dobson の風速別に分類せる觀測からの結論であるが、之から見ても説明に無理を生じて來はしまいかと思ふ。次に於て之等は用ひた基本方程式に考慮すべき點があるとして理論的に Taylor 流の方程式を解いてみる。

3. 計 算（其の一）

今定常状態に於ける運動方程式を普通の記號を用ひて表せば次の如くなる

$$\left. \begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \lambda v - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho \lambda u - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

第 三 圖

但し平均運動の垂直氣流を無視し, 座標は Left-handed system を用ひてある

$$\lambda = 2\omega \sin \varphi$$

渦動粘性係數 η は各微粒子が恒に渦度を保存してゐると假定して上の如くおいた.

$$\eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} = D^2 \quad \text{とおけば}$$

$$D^2 u - \rho \lambda v - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$D^2 v + \rho \lambda u - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

計算を簡単にするために密度及び氣壓傾度を常數と考へて, u, v に對する式を造れば

$$\left. \begin{aligned} D^4 u + \rho^2 \lambda^2 u - \rho \lambda \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ D^4 v + \rho^2 \lambda^2 v + \rho \lambda \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

今 x 軸を等壓線の切線方向にとり, 即ち y 軸を之と直角に氣壓の減ずる方向にとれば

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{\rho \lambda} \frac{\partial p}{\partial y} = V_G \quad \text{とおけば}$$

$$\left. \begin{aligned} D^4 u + \rho^2 \lambda^2 (u - V_G) &= 0 \\ D^4 v + \rho^2 \lambda^2 v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

さて上の解を得るには次の微分方程式の解を知ればよい.

$$D^4 W + \rho^2 \lambda^2 W = 0$$

$$(D^2 + i\rho\lambda)(D^2 - i\rho\lambda)W = 0$$

$$W = W_1 + W_2 \quad (\text{put})$$

$$D^2 W_1 + i\rho\lambda W_1 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$D^2 W_2 - i\rho\lambda W_2 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$\eta = \eta_0(1 + \sigma z)$ なる關係があるときは

$$(\sigma > 0)$$

$$(2) \text{ は } \eta_0(1 + \sigma z) \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} + i\rho\lambda W_1 = 0$$

$$\sqrt{\eta_0(1 + \sigma z)} = z' \quad W_1 = z' W_1' \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{d^2 W_1'}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \frac{dW_1'}{dz'} + \left(4a^2 i - \frac{1}{z'^2} \right) W_1' = 0$$

$$a^2 = \frac{\rho \lambda}{\eta_0^2 \sigma^2}$$

即ち⁽¹⁾

$$W_1' = AJ_1(2a\sqrt{i}z') + BY_1(2a\sqrt{i}z')$$

$$W_1 = \{AJ_1\{2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} + BY_1\{2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{同様に } W_2 = \{CI_1\{2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} + DK_1\{2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}$$

無限の高さで速度の有限なることの条件を用ひて u, v を求むれば上式を用ひて次の様に表はし得る.

$$u = \{AY_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}) + BK_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}})\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} + V_G$$

$$v = \{A'Y_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}) + B'K_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}})\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}$$

之を (1) に代入して $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$

$$-iA = A' \quad iB = B'$$

故に

$$\left. \begin{aligned} u &= \{AY_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}) + BK_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}})\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} + V_G \\ v &= i\{-AY_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}) + BK_1(2a\sqrt{i}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}})\}\eta_0^{\frac{1}{2}}(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

今常数を決定するために、従来此の種の問題に普通に用ひられる条件を其の儘用ひることにする。即ち

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} / u\right]_{z=0} = \left[\frac{\partial v}{\partial z} / v\right]_{z=0}$$

(4) を之に代入し $\psi = 2a\eta_0^{\frac{1}{2}}$ とおけば

$$\begin{aligned} & \frac{(AY_1'(\psi\sqrt{i}) + BK_1'(\psi\sqrt{i}))\psi\sqrt{i} + AY_1(\psi\sqrt{i}) + BK_1(\psi\sqrt{i})}{AY_1(\psi\sqrt{i})\eta_0^{\frac{1}{2}} + BK_1(\psi\sqrt{i})\eta_0^{\frac{1}{2}} + V_G} \\ &= \frac{(-AY_1'(\psi\sqrt{i}) + BK_1'(\psi\sqrt{i}))\psi\sqrt{i} - AY_1(\psi\sqrt{i}) + BK_1(\psi\sqrt{i})}{-AY_1(\psi\sqrt{i})\eta_0^{\frac{1}{2}} + BK_1(\psi\sqrt{i})\eta_0^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

傾度風と地上風とのなす角を地上で α とすれば、

$$\tan \alpha = - \left[\frac{v}{u} \right]_{z=0} = - \frac{i\{-AY_1(\psi\sqrt{i}) + BK_1(\psi\sqrt{i})\}\eta_0^{\frac{1}{2}}}{\{AY_1(\psi\sqrt{i}) + BK_1(\psi\sqrt{i})\}\eta_0^{\frac{1}{2}} + V_G} \dots\dots\dots (6)$$

(5), (6) より A, B を求むれば

(1) Gray and MacRobert: Bessel function Y 函数は Neumann の function でない。
後文参照。(高谷氏の解式との比較のために特に此の Notation を用ひた)

$$A = V_G \cdot \frac{K_1(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \times \frac{i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = V_G \cdot \frac{Y_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + Y_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \times \frac{i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}}} \dots (7)$$

地上の風速を V_s とすれば

$$V_s^2 = [u^2 + v^2]_{z=0}$$

$$= 4AB Y_1(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i})\eta_0 + V_G^2 + 2AV_G\eta_0^{\frac{1}{2}} Y_1(\psi\sqrt{i})$$

$$+ 2BV_G\eta_0^{\frac{1}{2}} K_1(\psi\sqrt{i})$$

$$= 4V_G^2 \cdot \frac{\{K_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})\} \{Y_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + Y_1(\psi\sqrt{i})\}}{\{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})\}^2}$$

$$\times \frac{Y_1(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i})}{\psi^2 i} \cdot \frac{i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} \cdot \frac{i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} + V_G^2$$

$$+ 2V_G \cdot \frac{K_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \cdot \frac{Y_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \cdot \frac{i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha}$$

$$+ 2V_G \cdot \frac{Y_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + Y_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \cdot \frac{K_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \cdot \frac{i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$$

$$= V_G^2 \left[1 + \frac{2i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} \cdot \frac{Y_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \times \frac{K_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \right]$$

$$\times \left[1 + \frac{2i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \cdot \frac{K_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \cdot \frac{Y_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + Y_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} \right]$$

$$\dots (8)$$

$$Y_0(\psi\sqrt{i}) = \ker \psi - i \operatorname{kei} \psi$$

$$K_0(\psi\sqrt{i}) = \ker \psi + i \operatorname{kei} \psi$$

の関係を⁽¹⁾用ゐれば

$$Y_1(\psi\sqrt{i}) = -Y_0'(\psi\sqrt{i}) = -(\ker' \psi - i \operatorname{kei}' \psi) \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$$K_1(\psi\sqrt{i}) = -K_0'(\psi\sqrt{i}) = -(\ker' \psi + i \operatorname{kei}' \psi) \frac{1}{\sqrt{i}}$$

但しこゝで

(1) Harold G.: Savidge-Tables of the ber and bei and ker and kei functions. phil. Mag. Vol. 19, 1910.

$$\begin{aligned}
\ker \psi &= \operatorname{ber} \psi (\log 2 - \log \psi - \gamma) + \frac{1}{4} \pi \operatorname{bei} \psi \\
&\quad - \frac{\psi^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\psi^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots \\
\operatorname{kei} \psi &= \operatorname{ber} \psi (\log 2 - \log \psi - \gamma) - \frac{\pi}{4} \operatorname{bei} \psi + \frac{\psi^2}{2^2} - \frac{\psi^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots \\
\operatorname{ber} \psi &= 1 - \frac{\psi^4}{2^2 4^2} + \frac{\psi^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \dots \\
\operatorname{bei} \psi &= \frac{\psi}{2^2} - \frac{\psi^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{\psi^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \dots \\
\gamma &= \text{Euler's constant}
\end{aligned}$$

然るときは

$$\begin{aligned}
Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i}) &= +\frac{2}{\sqrt{i}}(\ker''\psi \operatorname{kei}'\psi - \operatorname{kei}''\psi \ker'\psi) \\
K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})Y_1'(\psi\sqrt{i}) &= -(\ker''\psi \operatorname{kei}'\psi - \operatorname{kei}''\psi \ker'\psi)\psi \\
&\quad - i[(\ker''\psi \ker'\psi + \operatorname{kei}''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi + (\ker'\psi)^2 + (\operatorname{kei}'\psi)^2] \\
Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})Y_1'(\psi\sqrt{i}) &= +(\ker''\psi \operatorname{kei}'\psi - \operatorname{kei}''\psi \ker'\psi) - i[(\ker''\psi \ker'\psi + \operatorname{kei}''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi \\
&\quad + (\ker'\psi)^2 + (\operatorname{kei}'\psi)^2]
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
\frac{Y_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \cdot \frac{K_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + K_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&\quad \times \frac{(\ker''\psi \ker'\psi + \operatorname{kei}''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi + (\ker'\psi)^2 + (\operatorname{kei}'\psi)^2}{(\ker''\psi \operatorname{kei}'\psi - \operatorname{kei}''\psi \ker'\psi)\psi} \\
\frac{K_1(\psi\sqrt{i})}{\psi\sqrt{i}} \cdot \frac{Y_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + Y_1(\psi\sqrt{i})}{Y_1'(\psi\sqrt{i})K_1(\psi\sqrt{i}) - K_1'(\psi\sqrt{i})Y_1(\psi\sqrt{i})} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \frac{(\ker''\psi \ker'\psi + \operatorname{kei}''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi + (\ker'\psi)^2 + (\operatorname{kei}'\psi)^2}{(\ker''\psi \operatorname{kei}'\psi - \operatorname{kei}''\psi \ker'\psi)\psi}
\end{aligned}$$

こゝに於て

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{(\ker''\psi \ker'\psi + \operatorname{kei}''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi + (\ker'\psi)^2 + (\operatorname{kei}'\psi)^2}{(\operatorname{kei}''\psi \ker'\psi - \ker''\psi \operatorname{kei}'\psi)\psi}$$

とおけば (8) は簡単となつて

$$\begin{aligned}
V_s^2 &= V_a^2 \left[1 + \frac{i \tan \alpha (1 + i \tan \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha} (1 + i \mathfrak{R}_0) \right] \\
&\quad \times \left[1 - \frac{i \tan \alpha (1 - i \tan \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha} (1 - i \mathfrak{R}_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_G^2 \left[\left\{ 1 - \frac{(\mathfrak{R}_0 + \tan \alpha) \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right\} + i \frac{\tan \alpha (1 - \mathfrak{R}_0 \tan \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha} \right] \\
&\quad \times \left[\left\{ 1 - \frac{(\mathfrak{R}_0 + \tan \alpha) \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right\} - i \frac{\tan \alpha (1 - \mathfrak{R}_0 \tan \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha} \right] \\
&= V_G^2 \left[\left\{ 1 - \frac{(\mathfrak{R}_0 + \tan \alpha) \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right\}^2 + \frac{\tan^2 \alpha (1 - \mathfrak{R}_0 \tan \alpha)^2}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \right]
\end{aligned}$$

故に

$$V_S = V_G [\cos \alpha - \mathfrak{R}_0 \sin \alpha]$$

然るにベッセル函数の性質によつて

$$\ker'' \psi + \frac{1}{\psi} \ker' \psi + \ker \psi = 0$$

$$\ker i'' \psi + \frac{1}{\psi} \ker i' \psi - \ker \psi = 0$$

之を用ひて $\mathfrak{R}_0$ を書き直せば

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\ker \psi \ker i' \psi - \ker' \psi \ker i \psi}{\ker \psi \ker' \psi + \ker i \psi \ker i' \psi} \dots \dots \dots (9)$$

ちょうど高谷氏の得られたものゝ逆数になつてゐる。 ψ が相當大きいときは

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_0 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} - \frac{1}{8\psi^3} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\psi} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots}
\end{aligned}$$

η_0, σ を観測より決定するもう一つの條件として, H なる高さで風向が傾度風の方角と一致したとすればそこでは $v=0$ となるから

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{K_1(\psi \sqrt{i} (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}})}{Y_1(\psi \sqrt{i} (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{K_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + K_1(\psi \sqrt{i})}{Y_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + Y_1(\psi \sqrt{i})} \cdot \frac{1 - i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha}
\end{aligned}$$

kelvin の函数を用ひて

$$\begin{aligned}
&\frac{\ker' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \} + i \ker i' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \}}{\ker' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \} - i \ker i' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \}} \\
&= \frac{(\psi \ker'' \psi + \ker' \psi) + i(\psi \ker i'' \psi + \ker i' \psi)}{(\psi \ker'' \psi + \ker' \psi) - i(\psi \ker i'' \psi + \ker i' \psi)} \cdot \frac{1 - i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \\
&(1 - i \tan \alpha) [\ker' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \} \cdot (\psi \ker'' \psi + \ker' \psi) + \ker i' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \} \\
&\quad \times (\psi \ker i'' \psi + \ker i' \psi) + i \{ \ker' \{ \psi (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \} \cdot (\psi \ker i'' \psi + \ker i' \psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi) \} \\
& = (1+i \tan \alpha) [\text{ker}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi) + \text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \\
& \times (\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi) + i \text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi) \\
& - \text{ker}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi) \} \\
& - \tan \alpha = \frac{\text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi) - \text{ker}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi)}{\text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi) + \text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi)} \\
& \frac{\text{kei}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\}}{\text{ker}'\{\psi(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}\}} = \tan \phi \quad \frac{\text{kei}'\psi}{\text{ker}'\psi} = \tan \chi
\end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\frac{\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi}{\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi} &= \frac{\text{ker}'\psi[(\text{kei}''\psi \text{ker}'\psi - \text{ker}''\psi \text{kei}'\psi)\psi]}{\text{ker}'\psi[(\text{ker}''\psi \text{ker}'\psi + \text{kei}''\psi \text{kei}'\psi)\psi + (\text{kei}'\psi)^2 + (\text{ker}'\psi)^2]} \\
&= \frac{+ \text{kei}'\psi[(\text{ker}''\psi \text{ker}'\psi + \text{kei}''\psi \text{kei}'\psi)\psi + (\text{kei}'\psi)^2 + (\text{ker}'\psi)^2]}{- \text{kei}'\psi[(\text{kei}''\psi \text{ker}'\psi - \text{ker}''\psi \text{kei}'\psi)\psi]}
\end{aligned}$$

なる恒等式が成立するから

$$\frac{\psi \text{kei}''\psi + \text{kei}'\psi}{\psi \text{ker}''\psi + \text{ker}'\psi} = \tan(\kappa + x)$$

here

$$\tan \chi = \frac{1}{\mathfrak{K}_1}$$

故に

$$\chi - \phi = \pi + \alpha - \kappa \dots \dots \dots (10)$$

$\sigma=0$ のとき $\chi - \phi = \sqrt{\frac{\rho\lambda}{2\eta_0}} H$, $\kappa = \frac{\pi}{\psi}$ となつて Taylor の $\sqrt{\frac{\rho\lambda}{2\eta_0}} H = \frac{3}{\psi} \pi + \alpha$ となるこ

とは、高谷氏の場合と同じである。

さて (9), (10) の関係よりして η, σ を求め得るのであるが、 ψ が小さくないときには (10) 式に approximation を施すと都合がよい。

ψ が大きいときは ker, kei 函数は次の様における

$$\left. \begin{aligned} \text{ker } \psi &= \sqrt{\frac{\pi}{2\psi}} e^{m_0} \cos n_0 \\ \text{kei } \psi &= \sqrt{\frac{\pi}{2\psi}} e^{m_0} \sin n_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

here

$$m_0 = -\frac{\psi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} - \frac{13}{128\psi^4} + \dots$$

$$n_0 = -\frac{\psi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} - \frac{1}{16\psi^2} + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} - \dots$$

その微係数は

$$\begin{aligned} \ker' \psi &= -\ker \psi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\psi} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots \right) \\ &\quad + \operatorname{kei} \psi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} - \frac{1}{8\psi^3} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots \right) \\ \operatorname{kei}' \psi &= -\ker \psi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} - \frac{1}{8\psi^3} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots \right) \\ &\quad - \operatorname{kei} \psi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\psi} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4} - \dots \right) \end{aligned}$$

今次のおきかへをする

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\psi(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2(1+\sigma z)} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4(1+\sigma z)^2} - \dots &= a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2(1+\sigma z)} - \frac{1}{8\psi^3(1+\sigma z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{25}{128\sqrt{2}\psi^4(1+\sigma z)^2} - \dots &= b \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\frac{\operatorname{kei}' \psi}{\ker' \psi} = \frac{b_0 \ker \psi + a_0 \operatorname{kei} \psi}{a_0 \ker \psi - b_0 \operatorname{kei} \psi}$$

$$\text{但し} \quad a_0 = (a)_{z=0} \quad b_0 = (b)_{z=0}$$

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{b_0}{a_0} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} - \frac{1}{8\psi^3} + \dots}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\psi} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} + \dots} \right\} \\ &= \tan^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}\psi} + \frac{4}{\psi^2} \pm \dots \right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}\psi} + \frac{9}{2\psi^2} \pm \dots \end{aligned}$$

であるから

$$\chi = \left\{ -\frac{\psi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} - \frac{1}{16\psi^2} + \dots \right\} + \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}\psi} + \frac{9}{2\psi^2} \pm \dots \right\}$$

故に

$$\begin{aligned} \chi - \phi &= \left[\frac{\psi}{\sqrt{2}} \left\{ (1+\sigma H)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} \left\{ \frac{1}{(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} + \dots \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}\psi} \left\{ \frac{1}{(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} - \frac{9}{2\psi^2} \left\{ \frac{1}{(1+\sigma H)} - 1 \right\} \pm \dots \right] \\ &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \left\{ (1+\sigma H)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} + \frac{3}{8\sqrt{2}\psi} \left\{ \frac{1}{(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} - \dots \quad (13) \end{aligned}$$

第二項に比して第一項が大きいとは第二項以下を省略し得る事高谷氏と同じ形である。

渦動粘性係数が高さと共に直線的に減する場合、即ち

$$\eta = \eta_0(1 - \sigma z)$$

$z = \frac{1}{\sigma}$ で速度の有限なことを考慮に入れて

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[C J_1 \left\{ 2a\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right\} + D I_1 \left\{ 2a\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \\ &\quad \times \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} + V_0 \\ v &= i \left[-C J_1 \left\{ 2a\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right\} + D I_1 \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 2a\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \eta_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

前と同じ条件で常数を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} C &= V_0 \frac{I_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + I_1(\psi\sqrt{i})}{J_1'(\psi\sqrt{i})I_1(\psi\sqrt{i}) - I_1'(\psi\sqrt{i})J_1(\psi\sqrt{i})} \\ &\quad \times \frac{i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}}} \\ D &= V_0 \frac{J_1'(\psi\sqrt{i})\psi\sqrt{i} + I_1(\psi\sqrt{i})}{J_1'(\psi\sqrt{i})I_1(\psi\sqrt{i}) - I_1'(\psi\sqrt{i})J_1(\psi\sqrt{i})} \\ &\quad \times \frac{i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi\sqrt{i} \eta_0^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

$$J_0(\psi\sqrt{i}) = \text{ber } \psi - i \text{bei } \psi$$

$$I_0(\psi\sqrt{i}) = \text{ber } \psi + i \text{bei } \psi$$

を用ひて、前と同様に

$$V_s = V_0 (\cos \alpha - \mathfrak{B}_0 \sin \alpha)$$

但しこゝで

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{(\text{ber}''\psi \text{ber}'\psi + \text{bei}''\psi \text{bei}'\psi)\psi + (\text{ber}'\psi)^2 + (\text{bei}'\psi)^2}{(\text{bei}''\psi \text{ber}'\psi - \text{ber}''\psi \text{bei}'\psi)\psi}$$

或は

$$\text{ber}''\psi + \frac{1}{\psi} \text{ber}'\psi + \text{bei } \psi = 0$$

$$\text{bei}''\psi + \frac{1}{\psi} \text{bei}'\psi - \text{ber } \psi = 0$$

の關係を用ひて書き直せば

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{\text{ber } \psi \text{ bei}' \psi - \text{ber}' \psi \text{ bei } \psi}{\text{ber } \psi \text{ ber}' \psi + \text{bei } \psi \text{ bei}' \psi} \dots\dots\dots (16)$$

丁度高谷氏のもと逆数関係になつてゐる。H なる高さで傾度風と一致することよりして、

$$\begin{aligned} \frac{C}{D} &= \frac{I_1(\psi \sqrt{i}(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}})}{J_1(\psi \sqrt{i}(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{I_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + I_1(\psi \sqrt{i})}{J_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + J_1(\psi \sqrt{i})} \cdot \frac{1-i \tan \alpha}{1+i \tan \alpha} \end{aligned}$$

之より

$$\begin{aligned} \frac{\text{bei}'\{\psi(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}}\}}{\text{ber}'\{\psi(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}}\}} &= \tan \beta & \frac{\text{bei}' \psi}{\text{ber}' \psi} &= \tan \gamma \\ \tan b &= \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \end{aligned}$$

とおくことによつて次の關係式を得る

$$\gamma - \beta = \pi + \alpha - b \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } \psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi} e^{m' \cos n'} \\ \text{bei } \psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi} e^{m' \sin n'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

here

$$\begin{aligned} m'_0 &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} - \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} - \dots \\ n'_0 &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} - \frac{1}{16\psi^2} - \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} + \dots \\ \left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\psi(1-\sigma z)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2(1-\sigma z)} + \dots &= a' \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2(1-\sigma z)} + \frac{1}{8\psi^3(1-\sigma z)^{\frac{3}{2}}} + \dots &= b' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

とおけば

$$\text{ber}' \psi = a'_0 \text{ber } \psi - b'_0 \text{bei } \psi$$

$$\text{bei}' \psi = b'_0 \text{ber } \psi + a'_0 \text{bei } \psi$$

但し

$$a'_0 = (a')_{z=0} \quad b'_0 = (b')_{z=0}$$

$$\tan^{-1} \frac{b'_0}{a'_0} = \tan^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} + \frac{1}{8\psi^3} + \dots}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\psi} - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi^2} - \dots} \right\}$$

$$=\tan^{-1}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}\psi}+\frac{4}{\psi^2}\pm\cdots\right\}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\sqrt{2}\psi}+\frac{9}{2\psi^2}\pm\cdots$$

〔第一 表〕

ψ	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{B}_0$	ψ	$\mathfrak{R}_0$	$\mathfrak{B}_0$
0.2	0.38453	200.00	2.8	0.81618	1.4658
0.4	0.48820	50.010	3.0	0.82536	1.3863
0.6	0.55797	22.244	3.2	0.83360	1.3294
0.8	0.60970	12.548	3.4	0.84110	1.2887
1.0	0.64992	8.0625	3.6	0.84797	1.2594
1.2	0.68195	5.6454	3.8	0.85426	1.2382
1.4	0.70910	4.2033	4.0	0.86003	1.2224
1.6	0.73162	3.2832	5.0	0.88320	1.1757
1.8	0.75087	2.6681	6.0	0.89976	1.1434
2.0	0.76747	2.2435	7.0	0.91224	1.1190
2.2	0.78303	1.9441	8.0	0.92190	1.1019
2.4	0.79470	1.7304	9.0	0.92970	1.089
2.6	0.80606	1.5764	10.0	0.93610	1.079

〔第二 表〕

ψ	kei' ψ /ker' ψ	ψ	kei' ψ /ker' ψ	ψ	bei' ψ /ber' ψ	ψ	bei' ψ /ber' ψ
0.2		3.2	2.6030	0.2	-1666.7	3.2	0.4024
0.4	-0.13165	3.4	1.8084	0.4	50.000	3.4	0.25635
0.6	0.2391	3.6	1.3468	0.6	22.210	3.6	-1.1752
0.8	0.36366	3.8	1.0066	0.8	12.496	3.8	+0.02039
1.0	0.5073	4.0	0.7597	1.0	7.9715	4.0	0.15349
1.2	0.67623	4.2	0.56003	1.2	5.5655	4.2	0.40007
1.4	0.88204	4.4	0.38924	1.4	4.0150	4.4	0.45996
1.6	1.1460	4.6	0.23595	1.6	3.0358	4.6	0.64053
1.8	1.5092	4.8	+0.92574	1.8	2.3574	4.8	0.8588
2.0	2.0621	5.0	-0.04767	2.0	1.8597	5.0	2.2645
2.2	3.0923	5.2	-10.0000	2.2	1.4825	5.2	3.0163
2.4	1.0000	5.4	0.2315	2.4	1.1749	5.4	4.1922
2.6	-21.046	5.6	0.50487	2.6	0.94286	5.6	6.3323
2.8	+10.8523	5.8	0.6954	2.8	0.73824	5.8	11.909
3.0	4.2860	6.0	-10.9277	3.0	0.5608	6.0	+74.000

$$\gamma-\beta=\frac{\psi}{\sqrt{2}}\left\{1-(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{5}{8\sqrt{2}\psi}\left\{1-\frac{1}{(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}}}\right\}+\cdots$$

.....(20)

4. 3 の計算と實測との比較

$\Re_0, \Im_0$ の値は第一表に示し $\text{kei}'\psi/\text{ker}'\psi$ 及び $\text{bei}'\psi/\text{ber}'\psi$ の値は第二表に示す.⁽¹⁾

今高谷氏の解との性質の差を明らかにするために, 同じ材料の Dobson の観測及び霞浦の材料よりの計算を示す.

ドブソンの材料	春		夏	
V_s/V_G	0.52	0.65	0.59	0.76
α	23°0	17°0	21°8	15°0
$\Re_0$			0.9114	0.7956
$\Im_0$	1.0251	1.0237		
κ			47°39'	51°30'
b	44°17.5'	44°20'		
$\frac{\psi}{\sqrt{2}} \left\{ (1+\sigma H)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}$			154°01'	143°30'
$\frac{\psi}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - (1-\sigma H)^{\frac{1}{2}} \right\}$	158°42.5'	152°40'		
ψ	29.94	31.0	6.93	2.41
$(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}$			1.54855	2.4697
$(1-\sigma H)^{\frac{1}{2}}$	0.86916	0.87845		
H	555 米	1220	460	880
σ	-44.066×10^{-5}	-0.1871×10^{-5}	$+3.039 \times 10^{-5}$	$+5.793 \times 10^{-5}$
$\frac{\eta_0}{\rho}$	2.738×10^4	14.16×10^4	1.074×10^4	2.445×10^4
ρ				
η_0	0.0354×10^3	0.1831×10^3	0.0139×10^3	0.0316×10^3
	$\rho=0.001293$	$\varphi=55^\circ$	とおいてである	
霞浦の材料				
		冬	春	
V_s/V_G		0.21	0.45	
α		37°8'	32°5'	
$\Re_0$		0.9467	0.7323	
ψ		12.11	1.63	
κ		46°34'	53°47'	
$\frac{\psi}{\sqrt{2}} \left\{ (1+\sigma H)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}$		171°6'	158°43'	
$(1+\sigma H)^{\frac{1}{2}}$		1.3569	3.403	
H		360 米	360	
σ		$+2.337 \times 10^{-5}$	29.39×10^{-5}	
$\frac{\eta_0}{\rho}$		0.427×10^4	0.149×10^4	
ρ				
η_0		0.0055×10^3	0.0019×10^3	
	$\varphi=36^\circ$	としてある		

(1) Jahnke u. Emde : Functiontafeln mit Formeln und Kurven.

高谷氏の得た結果は

ドブソン	春		夏	
	朝	晝	朝	晝
σ	$+0.598 \times 10^{-5}$	$+0.248 \times 10^{-5}$	-1.174×10^{-5}	-1.028×10^{-5}
η_0	0.0305×10^3	0.1723×10^3	0.0389×10^3	0.2716
霞浦	冬		春	
σ	-0.981×10^{-5}		-2.751×10^{-5}	
η_0	0.0168×10^3		0.0528×10^3	

兩者を比較して見るに、朝粘性係数が晝より小さい事は兩方同じであるが、地上に於ける粘性係数が春の方が夏より大きくなつてゐる。然して高谷氏の場合よりも粘性係数の高さによる増分率 σ は η_0 とは反對に大きくなり勝ちである。特に春の朝に於ては $\sigma = -44.066 \times 10^{-5}$ といふ大きい値で上に減少してゐる。

Lindenberg の観測値を用ひるときはドブソンの観測値とは反對に、丁度春と夏とが入り變つて朝と晝との ψ の大きさの割合だけその儘維持され、結局粘性係数は夏は上に向つて減少し地上に大きく春は地上に向つて増加して地上に小さい。晝は朝より大きいと云ふ結果になる。之の流儀で行くと一見此の理論は獨國の観測値にはよく合ふが英國の観測値とは合はないと云ふことになりそうであるが必ずしもそうでない。凡そ夏季冬季及び晝朝の渦動粘性の大小の説明を之を熱的源因に求めることは最も無難の考への様に思はれる。

もつとも之は傾度風が温度の靜的高さによる分布及び水平分布に影響されることは見逃せぬ事實で、例へば前掲 N. Shaw p. 193 によれば

$$\frac{ds}{dz} = g\rho \left(\frac{q}{\theta} - \frac{s}{p} \right)$$

here

$$s = \frac{d\rho}{dx} \quad q = \frac{d\theta}{dx}$$

θ : 絶體温度 p : 氣壓

なる關係式より

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho$$

$$p/\theta = R\rho$$

なる關係を用ひて傾度風 V_g との間に次の關係を簡単な算法で導き得る。

$$\frac{d}{dz} (V_g/\theta) = \frac{g}{2\omega \sin\phi} \frac{q}{\theta^2}$$

q は即ち温度の水平傾度で看過され易いものであるが, 傾度風に對する影響はときには輕視出来ない. 次に數量的關係を掲げる.

Horizontal gradient of temperature	increase upward of geostrophic wind velocity
1°C per 100 km	0.3 m/sec per 100 m
from W to E	Component from N
from S to N	Component from W

今然し考察を便にするために $q=0$ とおくと

$$V_g/\theta = \text{const.}$$

傾度風の大きさは絶對温度に比例する.

前出西村先生の論文中的 $V_s/T_g - \Delta T$ 圖形に於いて, ΔT の増加と共に V_s/V_g が増加してゐるのは V_g の小となる結果であると考へ得る所も可成り含まれてゐるには相違ないが氣温の逆轉を起したときに反對になつてゐないのはそのときには一般に V_s が小となるからで V_g の影響よりもより強力に利いて來ることを示してゐるものと思はれる. 然し此の靜的分布の關係をも解の性質上熱對流等と共に熱渦動と呼ぶことにする. 然して此の熱渦動は地熱及び氣温の減率によつて發達するもので夏季及び晝に於いては春冬及び朝よりも地上に大にして上に減するのがノルマルな常態であると思はれる. 高谷氏の解はドブソンの材料よりの計算の結果に關する限り非常によく一致してゐる様に思はれる⁽¹⁾. ドブソンの材料がいかなる性質のものか著者は知り得なかつたが, 要するに觀測値の平均値を用ひたとしてもかへつて一般の渦動の性質を表はしてゐると斷することは出來まい. つまり風速等の地面近くの觀測⁽²⁾ からも明らかな様に粘性係數は地上附近で非常に大なる値を有してゐるため, 又はその附近の地形の影響を受けて風速が特殊な⁽³⁾ 方向に特殊な發達をする結果, 例へば渦動が上空から下に及んでゐる様な場合でも, その影響が下のものよりも薄弱なるときは全體として上に減するが如き結果となることもあり得るし, 地熱等のために相當表面に渦性が大なるときでも, 上からの影響が強大なるときは全體として上に増加す

(1) 講演後の高谷氏の御注意に依るのであるが, 日々の觀測値を材料として用ひるものと, 平均値を用ひるものにより, 未だ充分論議の餘地があるものと思はれる. 彼の横粘性係數も此の意味に於て吟味する必要がありはしまいか?

(2) 淵 秀隆: 中央氣象臺無線塔測風報告 etc, 氣象集誌, 第十卷, 第七號.

(3) M. Kawano & S. Kitazawa: Comparison between the Distribution of Wind Directions over the Hakone-range and that in the Free Atmosphere. Geophy. Mag. Vol. VI, No. I or 荒川秀俊: 地形による風向及び風速の變化, 氣象集誌, 第十卷, 第六號.

る傾向を持つこともあると考へられる。只第一圖第二圖は飽くまでも此の種の見解からは當然充すべき條件を表はしてゐるもので、此點は確かに現在の解は満足してゐる。

次に風速による變化を知るために同じくドブソンの分類したものを掲げる。

V_s/V_G	light winds	moderate winds	strong winds
	0.72	0.65	0.61
α	13° 0	21° 5	19° 7
$\mathfrak{B}_0$	1.1307		
$\mathfrak{R}_0$		0.7651	0.9834
ψ	6.52	1.97	4.16
b	41° 29' 5		
κ		52° 35'	45° 29'
σH	0.8181	7.213	0.1914
H	610 m	800	1000
σ	-1.3405×10^{-5}	$+9.0166 \times 10^{-5}$	$+19.14 \times 10^{-5}$
η_0	0.08066×10^3	0.01953×10^3	0.0972×10^3
高谷氏による計算			
σ	$+2.155 \times 10^{-5}$	-1.192×10^{-5}	0.1301×10^{-5}
η_0	0.0315×10^3	0.2415×10^3	0.1389×10^3

此れによれば、moderate wind から strong wind にいたるや急に粘性係数の地上値及びその高さによる増分率は増加してゐる。即ち水平速度の差による純力學的な作用が粘性係数の發達により強力なることを示してゐる。

次に前に保留しておいた $V_s/V_G - \alpha$ 曲線に就いて若干考察を進める。

$$\text{一般に} \quad V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{U} \sin \alpha)$$

とおけば

$$\mathfrak{U} = 0 \quad V_s = V_G \cos \alpha \quad \text{グルドベルグ, モーン}$$

$$\mathfrak{U} = 1 \quad V_s = V_G (\cos \alpha - \sin \alpha) \quad \text{テラー}$$

$$\mathfrak{U} = \tan 27^\circ 50' \quad V_s = V_G (\cos \alpha - \tan 27^\circ 50' \sin \alpha) \quad \text{石丸}$$

$$\mathfrak{U} = \tan (c - \alpha) \quad V_s = V_G (\cos \alpha - \tan (c - \alpha) \sin \alpha) \quad \text{西村}$$

$$\mathfrak{U} = \begin{cases} \mathfrak{R}_0' \\ \mathfrak{B}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{R}_0' \sin \alpha) \\ V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{B}_0' \sin \alpha) \end{cases} \quad \text{高谷}$$

$$\mathfrak{U} = \begin{cases} \mathfrak{R}_0 \\ \mathfrak{B}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{R}_0 \sin \alpha) \\ V_s = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{B}_0 \sin \alpha) \end{cases} \quad \text{現論文}$$

第四圖は此の關係を特殊なものについて表はしたもので、45° を通る曲線がテラーの式 90° を通るものがグルドベルグ、モーンの式である。石丸の式は 62° 10' を切る一種の

餘弦曲線となる。西村の式は全然之等とは反對に上に凹なる曲線であつて 70° 以上に引延ばすときは意味のないものとなる。

今現論文の式は次の様にも (10) の関係を用ひて變形出来る。

$$V_s = V_g \{ \cos \alpha - \tan (c' - \alpha) \sin \alpha \}$$

$$\text{但し } c' = \left(\chi - \frac{\pi}{2} \right) - \phi - \pi = \chi - \phi - \frac{3}{2} \pi$$

之は一見西村の式と同じであつて、どうせ c' は時により色々の値をとり得るから、この式は理論的に西村の式を説明し得たとなりそうであるが決してさうでない。何となれば最も簡単に考へて見ても此の解式に於てはテラー曲線は粘性係数の高さによる増減の状態を決定するクリテカルな曲線で、 $\alpha = 0^\circ - 45^\circ$ 及びテラー曲線によつて境さるゝ域は高谷氏の場合には境界條件に左右されない水平速度の差に依つて起る本來の粘性係数の case を示して居り、 $\alpha = 45^\circ - 90^\circ$ 及びテラー曲線、グルドベルグ・モーン曲線に依つて圍まれる域は重に境界條件に左右された、即ち地熱、地形等の影響の勝つた粘性係数の上に減ずる場合を示す case を含んでゐる。故に之を無視して兩域にまたがる上に凹なる曲線を引くことは意味がない。故にこの場合にはあくまでも上に凸なる曲線を採用すべきで、即ち $\Re$ そのものをパラメーターとした曲線で、 $V_s/V_g - \alpha$ 圖は振幅及び相角は $\Re$ の値によつて違ふが全部余弦曲線より成る事になる。即ちいづれの系統にプロットされた點が載るかを重要視するもので若し西村の式が單にプロットを平均的に抱括し得るといふ事實のみを以て主張するものであつたとするならば、よしやわづかの曲線のフラツクスをもつて満足したとしても $\Re$ をパラメーターとする方を是とすべきであらう。ここに注意すべきは高谷氏の場合には、石丸の曲線が $62^\circ 10'$ の横軸を截るために、横渦動粘性係数なるものゝ性質に對して、藤原先生の研究⁽¹⁾及びその他の方々の研究⁽²⁾に對して、全く合致しない説明を要求する事になるが、現論文の場合にはよく以上の方々の研究と一致してゐる。

以上述べた事を簡単に總括すれば次の如くである。

(1) 地熱等に誘發された粘性係数は地上に大きく上に減少し、上空の水平速度の差によ

(1) Remarks on the Transverse Eddy Viscosity in the Atmosphere near the Earth's Surface. Geo. Mag. Vol. III.

(2) S. Watanabe: The Equation of Motion of a Viscous Fluid accompanied by the "Micromagnetic Field". Geo. Mag. Vol. V.

第 四 圖

つて起つた粘性係数は上より下に減少するを本則とする。

- (2) 夏は粘性係数は上に減少し春冬は上に増加するのが普通である。晝は朝に比して一般に粘性係数の地上値及び増分率が大である。
- (3) 渦は或る風速度を越へたときに急速に發達する。
- (4) 渦はその發達に最も良い條件を有する Lapse-rate を持つらしい。
- (5) 渦亂流の作用は渦度の恆存によつて行はれる。従つて Rossby の云ふが如き渦亂流の作用によつて動學的の不連續を造る事はない。

5. 計 算 (其の二)

風速度の分布

粘性係数が直線的に増加する場合

合速度を $\mathfrak{V}_i$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{V}_i^2 &= u^2 + v^2 \\
 &= [V_G + 2AY_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}] \\
 &\quad \times [V_G + 2BK_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} \eta_0^{\frac{1}{2}} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}] \\
 &= V_G^2 \left[1 + \frac{2Y_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \{K_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + K_1(\psi \sqrt{i})\}}{Y_1'(\psi \sqrt{i}) K_1(\psi \sqrt{i}) - K_1'(\psi \sqrt{i}) Y_1(\psi \sqrt{i})} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi \sqrt{i}} \right] \\
 &\quad \times \left[1 + \frac{2K_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \{Y_1'(\psi \sqrt{i}) \psi \sqrt{i} + Y_1(\psi \sqrt{i})\}}{Y_1'(\psi \sqrt{i}) K_1(\psi \sqrt{i}) - K_1'(\psi \sqrt{i}) Y_1(\psi \sqrt{i})} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\psi \sqrt{i}} \right] \\
 &= V_G^2 \left[1 - \frac{Y_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{Y_1(\psi \sqrt{i})} (1 - i \Re_0) \times \frac{i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \right] \\
 &\quad \times \left[1 + \frac{K_1 \{\psi \sqrt{i} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}\} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{K_1(\psi \sqrt{i})} (1 + i \Re_0) \times \frac{i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \right] \\
 &\quad \left. \begin{aligned} &\frac{\ker' \psi \ker' \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} + \ker' \psi \ker' \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{(\ker' \psi)^2 + (\ker' \psi)^2} \times (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} = E \\ &\frac{\ker' \psi \ker' \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} - \ker' \psi \ker' \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{(\ker' \psi)^2 + (\ker' \psi)^2} \times (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} = F \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

とおけば, 明らかに高谷氏の得た式と同じ形の

$$\mathfrak{B}_I = V_G \sqrt{(\cos \alpha - \mathfrak{K}_0 E \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - F \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \{(1-E)^2 + (F \mathfrak{K}_0 + 1)^2\} - 1} \dots \dots (21)$$

同様にして粘性係数が直線的に減小する場合は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{ber}'\psi \text{ber}'\psi (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} + \text{bei}'\psi \text{bei}'\psi (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{(\text{ber}'\psi)^2 + (\text{bei}'\psi)^2} \times (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} &= G \\ \frac{\text{ber}'\psi \text{bei}'\psi (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} - \text{bei}'\psi \text{ber}'\psi (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{(\text{ber}'\psi)^2 + (\text{bei}'\psi)^2} (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} &= L \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

とおけば合速度 $\mathfrak{B}_D$ は

$$\mathfrak{B}_D = V_G \sqrt{(\cos \alpha - \mathfrak{B}_0 G \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - L \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \{(1-G)^2 + (L \mathfrak{B}_0 + 1)^2\} - 1} \dots \dots (23)$$

argument が大きいときは (20), (22) は (12), (19) を用ひて次の様にかへ得る.

$$\begin{aligned} E &= \frac{a a_0 + b b_0}{a_0^2 + b_0^2} \cdot \frac{\text{ker} \psi \text{ker} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} + \text{kei} \psi \text{kei} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ker}^2 \psi + \text{kei}^2 \psi} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{a b_0 - a_0 b}{a_0^2 + b_0^2} \cdot \frac{\text{ker} \psi \text{kei} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} - \text{kei} \psi \text{ker} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ker}^2 \psi + \text{kei}^2 \psi} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{a a_0 + b b_0}{a_0^2 + b_0^2} (1+\sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m-m_0)} \cos(n_0 - n) - \frac{a b_0 - a_0 b}{a_0^2 + b_0^2} (1+\sigma z)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times e^{-(m-m_0)} \sin(n_0 - n) \end{aligned}$$

here

$$\begin{aligned} m_0 - m &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \left[(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} \left[1 - \frac{1}{(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &\quad + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} \left[1 - \frac{1}{(1+\sigma z)^{\frac{3}{2}}} \right] - \dots \dots \\ n_0 - n &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \left[(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} \left[1 - \frac{1}{(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{16\psi^2} \left[1 - \frac{1}{1+\sigma z} \right] + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} \left[1 - \frac{1}{(1+\sigma z)^{\frac{3}{2}}} \right] - \dots \dots \\ F &= \frac{a a_0 + b b_0}{a_0^2 + b_0^2} \cdot \frac{\text{ker} \psi \text{kei} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} - \text{kei} \psi \text{ker} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ker}^2 \psi + \text{kei}^2 \psi} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{a b_0 - a_0 b}{a_0^2 + b_0^2} \cdot \frac{\text{ker} \psi \text{ker} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} + \text{kei} \psi \text{kei} \psi (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ker}^2 \psi + \text{kei}^2 \psi} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{a a_0 + b b_0}{a_0^2 + b_0^2} (1 + \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m-m_0)} \sin(n_0 - n) \\ - \frac{a b_0 - a_0 b}{a_0^2 + b_0^2} (1 + \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m-m_0)} \cos(n_0 - n)$$

同様にして

$$G = \frac{a' a_0' + b' b_0'}{a_0'^2 + b_0'^2} \cdot \frac{\text{ber } \psi \text{ ber } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} + \text{bei } \psi \text{ bei } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ber}^2 \psi + \text{bei}^2 \psi} \cdot (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{a' b_0' - a_0' b'}{a_0'^2 + b_0'^2} \cdot \frac{\text{ber } \psi \text{ bei } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} - \text{bei } \psi \text{ ber } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ber}^2 \psi + \text{bei}^2 \psi} \cdot (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{a' a_0' + b' b_0'}{a_0'^2 + b_0'^2} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m'_0 - m')} \cos(n'_0 - n') \\ - \frac{a' b_0' - a_0' b'}{a_0'^2 + b_0'^2} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m'_0 - m')} \sin(n'_0 - n')$$

here

$$m'_0 - m' = \frac{\psi}{\sqrt{2}} \left[1 - (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} \left[\frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \\ + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} \left[\frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] + \dots \\ n'_0 - n' = \frac{\psi}{\sqrt{2}} \left[1 - (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{8\sqrt{2}\psi} \left[\frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \\ + \frac{1}{16\psi^2} \left[\frac{1}{1 - \sigma z} - 1 \right] + \frac{25}{384\sqrt{2}\psi^3} \left[\frac{1}{(1 - \sigma z)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] + \dots \\ L = \frac{a' a_0' + b' b_0'}{a_0'^2 + b_0'^2} \cdot \frac{\text{ber } \psi \text{ bei } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} - \text{bei } \psi \text{ ber } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ber}^2 \psi + \text{bei}^2 \psi} \cdot (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{a' b_0' - a_0' b'}{a_0'^2 + b_0'^2} \cdot \frac{\text{ber } \psi \text{ ber } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} + \text{bei } \psi \text{ bei } \psi (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}}}{\text{ber}^2 \psi + \text{bei}^2 \psi} \cdot (1 - \sigma z)^{\frac{1}{2}} \\ = -\frac{a' a_0' + b' b_0'}{a_0'^2 + b_0'^2} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m'_0 - m')} \sin(n'_0 - n') \\ - \frac{a' b_0' - a_0' b'}{a_0'^2 + b_0'^2} (1 - \sigma z)^{\frac{1}{4}} e^{-(m'_0 - m')} \cos(n'_0 - n')$$

地表近くの粘性係数は非常に大となれる結果 ψ は可成り小さい値なりとすれば

$$\text{ker } \psi \doteq \alpha - \log \psi \quad \text{kei } \psi \doteq -\frac{\pi}{\psi}$$

第一圖及第二圖の附表

month hour	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX		X		XI		XII		合 計		$\frac{\mathcal{N}>1}{\mathcal{N}<1}$
	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	$\mathcal{N}>1$	$\mathcal{N}<1$	
1h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50%
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27
5	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
9	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	51
10	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	67
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	42
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
13	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	103
14	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	130
15	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	43
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	200(?)
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
合 計	42	3	40	5	19	11	34	8	26	7	13	11	24	18	28	31	13	33	15	22	16	11	10	301	151	50%	
$\mathcal{N}>1/\mathcal{N}<1$	7%		13%		58%		24%		27%		85%		200%		156%		42%		45%		73%		91%		50%		

$$\alpha = 0.1159315 \dots$$

$$\ker' \psi = -\frac{1}{\psi} \quad \text{kei}' \psi = 0$$

とおけるから

$$E \doteq \frac{\frac{1}{\psi} \cdot \frac{1}{\psi(1+\sigma z)^{\frac{1}{2}}}}{\psi^2} (1+\sigma z)^{\frac{1}{2}} \doteq 1$$

$$F \doteq 0$$

故に

$$\mathfrak{B}_I = V_G (\cos \alpha - \mathfrak{B}_0 \sin \alpha)$$

又

$$\text{ber}' \psi \doteq \frac{\psi}{2} \quad \text{bei}' \psi \doteq 0$$

$$G \doteq (1 - \sigma z) \quad L \doteq 0$$

故に

$$\mathfrak{B}_0 \doteq \sqrt{(\cos \alpha - \mathfrak{B}_0 \sin \alpha (1 - \sigma z))^2 + \sin^2 \alpha \times \sigma^2 z^2}$$

上の計算によれば極めて地面近くに於ては粘性係数が上に増加してゐるときは地上の關係式はある高さまでその儘適用出来るが上に減じてゐる時は地上を離れると風速は急速に發達する。之は前者は影響が全く上から來るためであり後者は粘性係数が地面近くで前者に比して大きいためであると見做し得る。

此の小文は藤原先生の理論氣象の御講義に負ふ所が多い。

第一報の終りに臨み有益なる注意を與へられ、且つ熱心に御激勵下さいました藤原先生に滿腔の感謝を捧げ、數理の部を閲讀且誤を指摘して下さいました小平先生に厚く御禮申上げます。

時正に生等三年の過程を終へて何事かなすあらんとするとき、臺長岡田先生始めその他の諸先生方の御享恩を回顧し、こゝに紙面を以て厚く御禮申上げます。

又挿圖を御願ひした星爲藏氏に感謝いたします。