氣 象 集 誌

第二輯 第十二卷 第十號

論 文 Memoirs

ベンドルフ電位計に就て⁽¹⁾

畠 山 久 尙

On Benndorf's Self-recording Electrometer.

By H. HATAKEYAMA.

Abstract:—

(1) The equation of motion of the needle of Benndorf's self-recording electrometer was solved when the potential of the needle was kept constant, the potential of the "Referenzpunkt" kept constant and the latter varied periodically.

(2) Constants ω and k were determined from the observation of the motion of "Zeiger." The relation of k and the density of sulphuric acid, derived from the increase of its volume, is illustrated in Fig. 1. The value of k also varies according to the position of the mica-vane in the liquid. It is noticeable that k becomes larger when the upper rim of the mica-vane approaches the liquid surface.

(3) A method of determining the leaking-rate of the whole electric system under the working state of the collector was proposed. Which involves the observation of the motion of "Zeiger" when the potential of the needle increases from zero by the action of the collector.

(4) The position of the "Zeiger" after one or two minutes in the damped oscillation which was initially caused by the kick of the lever-work was calculated with the observed k and ω .

(5) The decrease of amplitude and the phase retardation of the oscillation of the needle, when the potential of the "Referenzpunkt" varied periodically, was calculated with observed k , ω and $\alpha+\beta$ for some given periods.

1. 緒 言

ベンドルフ電位計に就いては川野技師の研究⁽²⁾があり、それはこの電位計を使用するに

(1) 中央氣象臺彙報.

(2) Geophys. Mag. Vol. 1, p. 1.

際しての好指針となつて居る。著者はこの電位計を用ひて空中電位差の測定をなすに當り遭遇する二三の事實に對して説明及び解決を與へた。例へば此の種の觀測では先づ全電氣系に對する荷電率 (charging rate), 並に漏電率 (leaking rate) 及び電位計のニードル (needle) の運動に對する諸常數によつて示針 (Zeiger) の示す電位と外界 (Referenzpunkt) の電位とは異つて來るのであつて、この點に就いてはペンドルフ自身⁽¹⁾ もかなり詳しく研究して居る様であるが、著者は先づ電位計のニードルの電位を一定に保つた時の示針の運動を實測して、運動系の常數を定め、次いで外界の電位が一定の時及變化する時のニードルの運動を論じた。その結果は單に空中電位差のみならず一般に電位計にて電位を測定する際に應用出来る。又全電氣系の漏電率は水滴蒐集器を用ふる場合ならばコックにより水滴の放出を止め、放射物蒐集器の場合ならば蒐集器を桿の先より取外して實測すればよいと普通には考へられるが、蒐集器の位置が地面上相當の高さにあつて簡単に蒐集器の取外しが出来ない様な時には漏電率の測定に困難を來す。又桿自身は弱いながらも一種の蒐集器の働をするから、上記の方法を用ふる場合にもこれを考慮に入れねばならぬ。それで著者は蒐集器の作用状態に於ける漏電率の測定法を考へてみた。又器中に用ひる濃硫酸は時日の経過と共に水を吸つて密度は小さくなり、粘性も變つて來る。これはニードルの運動の式の抵抗係數の變化となつて現はれる。密度對抵抗係數の關係と川野氏の與へられた密度對粘性係數の關係とを比較してみた。又液中に於ける雲母板の位置によつて制振度にかなり著しい差異がある事を示した。

2. ニードルの運動の數理的計算

A. 電位を一定に保つた時のニードルの運動。

電池その他の手段によりニードルの電位を一定に保つた場合は、廻轉角のさまで大きくない限りその運動の式は次の様であると考へられる。

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k' \frac{d\varphi}{dt} + \omega'^2(\varphi_0 - \varphi) \dots\dots\dots (1)$$

こゝに φ は任意時刻に於ける廻轉角、 φ_0 は一定に保たれた電位に相當する廻轉角である。運動系の慣性能率 I で各項を除し、 $\varphi_0 - \varphi = -x$, $\frac{k'}{I} = k$, $\frac{\omega'}{I} = \omega$ とおきかへると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \dots\dots\dots (2)$$

となり、この解は ω と k の大きさに従つて異つて來るのであるが、後節に見る様に實測の

(1) Wiener Ber. IIa. Bd. 118, S. 1173. (1909). その概要は Wien-Harms: Handbuch d. Exp. Phys. Bd. 25, 1 teil. S. 323, 363 に出て居る。

結果は常に $4\omega^2 > k^2$ であつたから、すべてこの場合の解のみを記す。最初の條件として $(r)_{t=0} = -x_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$ とすると解は次の様になる。

$$x = A e^{-\frac{kt}{2}} \cos(\sigma t - b) \dots\dots\dots (3)$$

但し

$$A = -x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{k}{2\sigma}\right)^2}, \tan b = \frac{k}{2\sigma}, \sigma = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}}.$$

B. 外界の電位が一定の時のニードルの運動.

此の場合には先づ蒐集器の作用によつてニードルの電位が變化してゆき、それによつてニードルの運動がおこる。ニードルの電位 v は次の式で定まると考へられる。

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(v_0 - v) - \beta v = \alpha v_0 - (\alpha + \beta)v \dots\dots\dots (4)$$

v_0 は外界の一定の電位、 α は荷電率、 β は漏電率である。 $t=0$ で $v=0$ としてこれを積分すれば

$$v = x_0 (1 - e^{-(\alpha+\beta)t}), \dots\dots\dots (5)$$

但し

$$x_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_0$$

を得る。(1) 式の φ_0 は今度は上の様な形をとる。前と同様の置き換へをするとニードルの運動の方程式は次の様になる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = -\omega^2 x_0 e^{-(\alpha+\beta)t} \dots\dots\dots (6)$$

最初の條件として $(x)_{t=0} = -x_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$ とすると解は次の様になる。

$$x = A e^{-\frac{kt}{2}} \cos(\sigma t - \beta) - B e^{-(\alpha+\beta)t} \dots\dots\dots (7)$$

但し

$$A = \frac{\omega x_0 (\alpha + \beta)}{\sigma \sqrt{\left\{\frac{k}{2} - (\alpha + \beta)\right\}^2 + \sigma^2}}, \tan \beta = \frac{\frac{k}{2} \{k - (\alpha + \beta)\} - \omega^2}{\sigma \{k - (\alpha + \beta)\}},$$

$$B = \frac{\omega^2 x_0}{\left\{\frac{k}{2} - (\alpha + \beta)\right\}^2 + \sigma^2}.$$

C. 外界の電位が週期的に變化する時のニードルの運動 外界の電位 v_0 は

$$v_0 = V_0 + V \cos pt$$

で表される様な變化をするものとする、

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(V_0 + V \cos pt - v) - \beta v = \alpha(V_0 + V \cos pt) - (\alpha + \beta)v \dots\dots\dots (8)$$

となる. $t=0$ で $v=0$ としてこれを積分すれば

$$v = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} V_0 + \frac{\alpha V}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 + p^2}} \cos \left\{ pt - \tan^{-1} \frac{p}{\alpha+\beta} \right\} + A e^{-\alpha+\beta)t} \dots \dots (9)$$

但し
$$A = - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} V_0 + \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2 + p^2} V \right)$$

を得る. ニードルの電位に於て既にこれだけの變形をうけて居る. 次にニードルの電位が上の様な時のニードルの運動であるが, 第三項は稍時間の経過した所ではもう認め難くなる筈であるからこれは考へぬこととし, 次の様な置かへをすると

$$pt_1 = pt - \tan^{-1} \frac{p}{\alpha+\beta} = p \left(t - \frac{1}{p} \tan^{-1} \frac{p}{\alpha+\beta} \right)$$

$$x_v = v, \quad x_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} V_0, \quad x_1 = \frac{\alpha V}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 + p^2}}$$

或る瞬間に於けるニードルの電位は

$$x_v = x_0 + x_1 \cos pt_1$$

となる. 前と同様の置き換へによりニードルの運動の式は

$$\frac{d^2 x}{dt_1^2} + k \frac{dx}{dt_1} + \omega^2 x = \omega^2 x_1 \cos pt_1 \dots \dots \dots (10)$$

となる. この解は

$$x = A e^{-\frac{k t_1}{2}} \cos \sigma t_1 + B e^{-\frac{k t_1}{2}} \sin \sigma t_1 + \frac{\omega^2 x_1}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} \cos (pt_1 - \beta), \dots \dots \dots (11)$$

但し
$$\beta = \tan^{-1} \frac{k p}{\omega^2 - p^2}$$

となる. 今は與へられた電位の變化に對して電位計の示す電位の變化の歪みをみるのが主眼であるから第三項のみに着目する. その振幅は

$$\frac{\omega^2 x_1}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}} = \frac{\omega^2 \alpha V}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + k^2 p^2} \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + p^2}}$$

であるが, 與へられた電位變化の週期が非常に大きい時即 $p=0$ の時の振幅でこれを割れば

$$\frac{\alpha^2 (\alpha+\beta)}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + k^2 p^2} \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + p^2}} \dots \dots \dots (12)$$

又位相のおくれの方は

$$pt_1 - \beta = pt - \left(\tan^{-1} \frac{p}{\alpha+\beta} + \tan^{-1} \frac{k p}{\omega^2 - p^2} \right) \dots \dots \dots (13)$$

となる.

3. ニードルの運動の實測結果

A. ω 及 k の値の決定 先づ實際の電位計に就いて k や ω の常数をきめるため、ニードルに電池によつて或る電位 v_1 を與へ示針の靜止するを待ち、瞬間的に他の電位 v_2 を與へる。さうすると示針は (3) 式で表される減衰振動をしながら v_2 に相當する位置に近づいてゆく。この時示針前面の硝子窓に貼り附けた紙尺とストップウォッチとにより、示針尖端が v_2 に相當する點その他二三の點を經過するまでの時間、並に次々の振幅の大きいさを讀みとる。昭和8年3月17日に比重1.84の濃硫酸を入れてから同6月15日硫酸の吸水のためその粘性が小さくなつて再び硫酸をとりかへるまでの間の數回の實測の結果を第1圖に圖示する。勿論この間に硫酸は容積が増えて容器に満ちて來るから數回餘分

第 1 圖

の硫酸をスポイトで汲み出して居る。汲み出した硫酸の分量は別に測つて全體としての硫酸の容積の増加は計算出来る様にしておく。5月10日及6月15日には雲母板の下縁が容器の底に近い所から上縁が液面と極く近くなる所まで數回その位置をかへて實測した。

これ等の材料により振幅の對數減衰率から $\frac{k\pi}{\sqrt{4\omega^2 - k^2}}$ を、週期から $\frac{4\pi}{\sqrt{4\omega^2 - k^2}}$ を計算し、これから ω と k を算出して表示すれば第1表の第二、三列となる。 ω は吊線に關する常數で、吊線を調節しない限りさう大きな變化はない筈のものであるから4月13日以降の平均をとつて $\omega = 0.235$ の一定値をとるものとし、この値を使つて k を再算したものを第四列に示す。更にチェツクのためにこれ等の ω 及 k の値を用ひて位相のおくれ

$b = \frac{k}{\sqrt{4\omega^2 - k^2}}$ を計算したものを第五列に、實測から出した b を第六列に示す。位相のお

第 1 表

日	ω	k	$k(\omega=0.235)$	b (計算値)	b (實測値)	硫酸の容積	硫酸の密度
Mar. 17	0.281	0.327	0.273	35°6	42°5	100.0	1.84
Apr. 1	0.300	0.383	0.299	39.6	41.4	108.5	1.81
Apr. 13	0.233	0.254	0.256	33.1	37.8	115.6	1.78
May. 2	0.226	0.202	0.211	26.7	31.5	128.6	1.72
May. 10 a	0.246	0.226	0.216	27.4	30.7	136.2	1.68
b	0.236	0.165	0.166	20.2	27.3		
c	0.231	0.161	0.163	20.3	22.3		
d	0.223	0.162	0.170	21.3	22.8		
e	0.232	0.181	0.184	23.0	25.1		
June 6	0.234	0.0968	0.970	11.9	11.5	150.3	1.63
June 15, a	0.239	0.103	0.101	12.5	11.0	165.0	1.58
b	0.239	0.0993	0.0975	12.0	11.5	171.8	1.56
c	0.238	0.0907	0.0895	11.0	11.6		
d	0.238	0.0943	0.0895	11.4	11.6		

これは共に角度で表はしたが時間に直せば 0.5 秒程度の範囲内でよく一致して居る。

第1表によれば時日の経過と共に k の値の減少する事は著しく注目される。一方容器中の硫酸の容積は第七列に示される様に増加して居る（最初の容積を 100 とす）。硫酸が 100% の時の密度と容積を ρ_0, v_0 とし、 $x\%$ の時のそれ等を ρ_x, v_x とすると、

$$\frac{\rho_0}{\rho_x} \cdot \frac{100}{x} = \frac{v_x}{v_0}$$

であるから、これによつて硫酸が水を吸つて容積を増してゆく時の容積と濃度との関係がわかる。⁽¹⁾ 使つた濃硫酸は市販の密度 1.84 のものであつたから、この濃度を 95% とし、この時の容積を基準とした濃度—容積の圖表を作つておく。この圖表により容積からその時の濃度を出すことが出来る。更に濃度と密度との関係によりその時の密度を出して第八列に示す。次にこの密度と k との関係を圖示したものが第2圖である。これが川野氏⁽²⁾ の與へられた密度と粘性係数の関係と極めて似て居て、濃度 1.8 附近で k の極大を示して居る。

第 2 圖

(1) 濃度と密度との関係は Kage の表による。

(2) 前出。

次に注目すべき事は液中の雲母板の位置により k の値が異つて来る事である。液の容器の大きさは直径 6.0 cm, 深さ 4.3 cm の圓筒形のもので, 雲母板は縦 2.7 cm, 横 3.5 cm で四隅は僅か落してある。5月10日及6月15日の各場合につき雲母板の位置を k と共に第2表に表示する。これによつて見れば雲母板が液の底に近い時 k は大きく, 溶底を離れるに従つて k は小さくなるが, 雲母板が液面に近づくと再び k が稍増すのは注目される。これは雲母板の一部が液面上に出ると静止の位置が不定になると云ふ點から川野氏の言及された表面刚性 (surface rigidity) の影響と考へられ, 表面剛性が液體の運動に相當大きな役割を演ずる事がわかる。

第 2 表

日	k	雲 母 板 の 位 置	
		上縁(液面より)	下縁(底面より)
May. 10.	a	0.216	12.0 mm
	b	0.166	8.6
	c	0.163	4.0
	d	0.170	1.7
	e	0.184	2.0
June. 15.	a	0.101	11.9
	b	0.0975	8.5
	c	0.0895	5.1
	d	0.0925	1.7

B. 漏電率の推定 豊原地磁氣觀測所では廳舎の二階の一室から蒐集器を室外に出して居るので蒐集器の地上の高さは 4.8 m, 壁よりの距離 1.5 m で, 普通の脚立を用ひるも梯子を用ひるも蒐集器をその柄から取外す事は困難である。第一にこの點から蒐集器の作用して居る儘の状態で全電氣系の漏電率を測定する事は望ましい。又試みに蒐集器をその桿より取外して, 桿のみを電位計につないで漏電を實測してみ

るに第3圖に示す様に, 最初正に荷電するか, 負に荷電するかで電位の減り方は甚だしく異なり, 終極の電位は零に非ず正の或る點に近づく様に見える。今の場合は +2.2 mm 邊に近づいて行く様に見える。

(4) 式を $t=0$ で $v=\pm V$ として積分すると

$$v - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_0 = \left(\pm V - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_0 \right) e^{-(\alpha + \beta)t}$$

となり, これが今の場合に相當する。 $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_0$ に相當する點を 2.2 mm として $(\alpha + \beta)$ を求めると

$$\alpha + \beta = 0.00192 \text{ sec}^{-1}$$

となり, 一方漏電測定を行つた前後の v_0 は 4.4 mm であつたから

るに従つて k は小さくなるが, 雲母板が液面に近づくと再び k が稍増すのは注目される。これは雲母板の一部が液面上に出ると静止の位置が不定になると云ふ點から川野氏の言及された表面刚性 (surface rigidity) の影響と考へられ, 表面剛性が液體の運動に相當大きな役割を演ずる事がわかる。

第 3 圖

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{2.2}{4.4} = 0.50$$

即ち

$$\alpha = \beta = 0.00096 \text{ sec}^{-1}$$

となる。即ち壁から突出した蒐集器の桿は弱いながらも一種の蒐集器の働きをなし、その α の値は上に掲げた程度のものである。⁽¹⁾ 斯様な次第であるから蒐集器を取外し又は水滴の放出を止めて漏電率を出すには、成る可く外界の電位の變化しない時を見計らつて、上にやつた様に正及負に荷電して實測せねばならぬ。

蒐集器の作用したまゝの状態で漏電率を推定するには、 $t=0$ で接地を切つてからの示針の運動（外界の略一定電位の下に蒐集器の作用する時）を観測した、但しこの場合は静謐な時を見計らつてやつても外界の電位が多少は變化するのを避けることが出来ない。それで一回の實測毎に終極電位 v_0 を測定し $\frac{v}{v_0}$ になるまでの時間 t を測定すると云ふやり方をとつた。その観測結果の中の二三例を第4圖に掲げる。

この場合の運動は (7) 式で表されると考へて

よいから、この式で表される運動と比較してみる。 k, ω の値はニードルの電位を一定に保つた實驗で前に得て居る。 α は別に人工電場中に蒐集器において清水式電位計を用ひて實測した結果から、ベンドルフ電位計を用ひた全電気系の容量 (60.5 cm) に従つて改算して 0.1205 sec^{-1} となる。⁽²⁾ $\beta=0$ 及び 0.0116 (半減期 60 秒に相當する) として (7) 式で計算して運動を圖中に

第 4 圖

曲線で示す 兩日の場合共に β の値はこの範囲内にあることは確實である。此の方法ではこゝに見る様に β の精確な値を求られぬ。併し實際問題としては β が或る範圍をこえて過大にならぬ様注意して居ればよいのであるから、この様な方法によつて充分効果を収める事が出来る。

4. 運動の式に基づく論議

A. 1 分後の或は 2 分後の方針の位置 ベンドルフ電位計では 1 分毎或は 2 分毎に電磁石によつて働く挺子仕掛によつて示針をリボンの上に押しつけて自記紙上に記象させる

(1) Linke の所謂 “Ladekoeffizient” k に改算すれば全電気系の容量は 60.5 cm であるから 0.058 cm/sec となる。

(2) “Ladekoeffizient” で云へば 7.30 である。

様になつて居るが、電流が断たれてこの押しつける装置が示針から離れる時示針に多少の速度を與へ、そのため示針が振動を起す この振動が次の1分間の中に十分に減衰してしまはないと、その時の示針の位置は正當な電位を示さない事となる。この點を次に考へてみる。

この場合はニードルは接地する事なくニードルとは電氣的に絶縁された示針をリボン上に押しつけるのであるから、外界の些少なる電位の變化は考慮外において、ニードルの電位が一定に保たれた場合と考へてよい。この時の運動は (3) 式より

$$Ae^{-\frac{kt}{2}} \cos \sigma t$$

で表される。示針が離された時は正又は負の方向に或る速度を得、それより $\frac{1}{4}$ 週期を経て正又は負の最大振幅に達し、減衰振動をなす。この最大振幅はうまく器械の調節が出來て居れば殆ど認め難い程度で大きくとも 1 cm 位のものである。考へ様によつては週期が適當の大きさでありさえすれば、次の1分目の時が丁度示針の平均位置を過ぎる時と一致して、振幅の減衰が著しくなくとも正當な記象を得る可能性があるが、硫酸は時日の経過と共に密度が變じ、従つて運動に對する k の値を變化し、週期が變つて來る事になるから、上記の方法は好ましくない。どうしても1分或は2分以内に相當の範圍迄振幅の減衰を必要とする。今前の k の實測結果より1分或は2分後の振幅を計算してみるに第3表の様に

第 3 表

日	1 分 後		2 分 後	
	$e^{-\frac{kt}{2}}$	$e^{-\frac{kt}{2}} \cos \sigma t$	$e^{-\frac{kt}{2}}$	$e^{-\frac{kt}{2}} \cos \sigma t$
Mar. 17	0.0035			
Apr. 1	0.0048			
" 13	0.00132			
May 2	0.0039			
" 10	0.0089	0.0043		
June 6	0.076	0.072	0.0042	0.0026
" 15	0.083	0.078	0.0067	0.0041

なる。これは $\frac{1}{4}$ 週期だつた所の最大振幅を1とした値である。即ち May 10 の分では最大振幅を 1 cm とするも 1 分後に既に誤差は 0.1 mm に足らず。June 6 及び 15 は 2 分後に至つて誤差 0.1 mm に足らなくなる。

B. 外の電位が週期的に變化する時 空中電位差の記象を見ると數分乃至十數分位の週期で週期的に變化する事が屢々あり、又稀には數十分の週期で美しい正弦曲線を描くこ

ともあり、日變化も亦1日或は半日を週期とする振動と考へる事が出来る。これ等の振動には(12)式で示される振幅の歪みがあり、(13)式で示される位相のおくれを伴ふのであるが、今實測の $k, \omega, \alpha + \beta$ 等を與へ色々の p の値について、これ等のものがどの程度の大いさを持つか計算してみるに第4表

第 4 表

週 期	振 幅	位 相 差
5min	98.8%	16°3
Apr. 1 { 10	99.8	8.1
30	100.0	2.7
5	98.8	12.0
June. 6 { 10	99.8	6.0
30	100.0	2.0

のようになる。

この結果より見れば數分以内の週期の振動を論ずる時には器械的に生ずる振幅の歪み、位相の遅れを問題にせねばならぬが、10分以上のものに就いてはこれは殆ど問題にならない。

5. 概 要

以上述べ來つた概要を摘記すれば次の様である。

(1) ペンドルフ電位計のニードルの運動の方程式を、ニードルの電位を一定に保つた時、外界の電位が一定の時、外界の電位が週期的に変化する時の條件の下に解いた。

(2) 示針の運動の實測結果から ω や k の値を定め一方硫酸の容積の變化からその密度を求めて、密度と k の關係を出した。 k の値は2液中の雲母板の位置により異なり、液の表面に近い所で大きくなるのは注目される。

(3) 蒐集器の働いて居る状態で、ニードルの電位が零から次第に高まつてゆく時の示針の運動を觀測して全電氣系の漏電率を推定する方法を示した。

(4) 示針をリボンの上に押しつけて離す時に示針に速度が與へられ、示針は振動を起すが、この影響が1分或は2分後にどの程度まで減衰するかを實測の k や ω の場合について計算して見た。

(5) 外界の電位が週期的に変化する時はニードルの運動の振幅に歪みが出來、位相が遅れて來るが、その大いさを實測の ω と k で計算してみた。その結果は週期10分程度以上となればもはやこの影響は考慮しなくて宜しい。

(昭和九年六月、豊原地磁氣觀測所にて)