高さと氣壓日變化との關係について*

藤原 咲平, 磯部 谷郎

On the Relation of the Diurnal Variation of Pressure with Height.

By S. FUJIWHARA and T. ISOBE.

Abstract:—Hitherto little is known on the vertical change of the diurnal variation of pressure. Recently, H. R. Kubota and S. Miyake have undertaken an investigation based on the data at Lindenberg computed by Fujiwhara and Takeda, but it ended in unsatisfactory result. In the present note, the same problem is attacked by solving the differential equation given by Max Margules, in which the vertical lapse rate of temperature is newly taken into consideration, so that the pressure variations at several heights are calculated. The obtained values coincide well with those calculated by Fujiwhara and Takeda, applying Laplace's formula, layer by layer, in the free air and these also agree in order and character with the results of mountain observations.

By introducing a boundary condition that at the earth's surface, the vertical motion is zero, another solution is obtained, which after numerical calculation is proved to coincide well with the above result.

1. 緒 言

氣壓の日變化について古來多くの論文が發表されてゐる。⁽¹⁾ 併し垂直分布に就ての研究は餘り進んでゐない。最近久保田, 三宅兩氏⁽²⁾が藤原, 武田⁽³⁾計算の Lindenberg の上層の氣溫の値を用ひて垂直方向の氣壓の日變化を論じたが思はしい結果を得られなかつた。兩氏は多くの假定をしてゐる。著者は一步を進めるために氣溫の遞減率を考へに入れて計算を試みる事にした。但し計算及び事實の根據としては矢張り藤原, 武田の調査を用ひた。⁽⁴⁾ 此調査は推算を主としては居るが, 日變化の狀況が山上觀測所の觀測結果と形に於てよく類似して居るから相當信用が置けるものと思ふ。

2. 上記兩氏同様 Margules の考へに従つて二次元的に考へ上方へ z 軸, 東方へ x 軸を取り $p = p_0(1 + \varepsilon)$ $\rho = \rho_0(1 + \sigma)$ $T = T_0(1 + \tau)$ と置いて $\varepsilon, \sigma, \tau$ は微小量であると考へれば, 運動方程

* 中央氣象臺彙報.

- (1) Max Margules: Sitz. Ber. Wien (math.) 99, 204, 1890; 101, 597, 1892; 102, 11, 1369, 1893.
P. Järisch: Met. Zeit. p. 481, 1907. E. Gold; Phil. Mag. pp. 26, 448, 1910.
G. C. Simpson: Quar. Jour. Roy. Met. Soc. p 11, 1918.
T. Terada, M. Kiuti and T. Tukamoto: Jour. Col. Scien. Tôkyô Imp. Univ. Vol. XLI, 1917.
H. Arakawa: Geophysical Magazine. C. M. O. Tôkyô. 7, 25, 1933.
- (2) 氣象集誌. 第2輯, 第12卷, 534頁.
- (3) 氣象集誌. 本號.

式，連續方程式及び狀態式から次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{g}{RT_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{g\tau}{RT_0} \left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dz} \right) - \frac{1}{RT_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \dots (1)$$

ここに p_0, ρ_0, T_0 は平衡状態に於ける氣壓，密度及び温度であり，夫々高さの函数である。 g は重力の加速度， R は氣體常數で $2.869 \times 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2 \text{deg}}$ なる値をもつ。 t は時間である。

氣温の遞減率を考へに入れて $T_0 = \theta - \beta z$ と置く。Lindenberg の觀測値によると

$$\theta = 283.1^\circ K \quad \beta = 5.4 \times 10^{-5} \text{deg/cm} \text{ である。}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{amp}} e^{i(\omega t + m x + q(z))}, \quad \tau = \tau_{\text{amp}} e^{i(\omega t + m x + \varphi(z))}$$

と置いて (1) 式を變形すれば次の如くなる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} - \frac{g}{R(\theta - \beta z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} + \left\{ \frac{\omega^2}{R(\theta - \beta z)} - m^2 \right\} \varepsilon(z) \\ = \frac{g}{R(\theta - \beta z)} \frac{d\tau(z)}{dz} - \left[\left\{ \frac{g}{R(\theta - \beta z)} - \frac{\beta}{\theta - \beta z} \right\} \frac{g}{R(\theta - \beta z)} - \frac{\omega^2}{R(\theta - \beta z)} \right] \tau(z) \dots (2) \end{aligned}$$

但し $\varepsilon(z) = \varepsilon_{\text{amp}} e^{iq(z)}$ $\tau(z) = \tau_{\text{amp}} e^{i\varphi(z)}$ を表はす。 $\varepsilon_{\text{amp}}, \tau_{\text{amp}}$ は ε, τ の振幅であり， $q(z), \varphi(z)$ は氣壓波及び氣温波の位相を表はす。

$$\omega \text{ は地球の自轉角速度で } \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \text{ radian/sec.}$$

$$m \text{ は } \frac{2\pi}{\text{波長}} \text{ なる量を表はす。}$$

Lindenberg の緯度を 52° とし赤道に沿ふての地球一週の長さを $4 \times 10^9 \text{cm}$ とすれば

$$\text{波長} = 4 \times 10^9 \cos 52^\circ \text{ と考へられる。}$$

簡單のために (2) 式の右邊を $f_1(z)$ で表はす。

先づ (2) 式左邊の第三項にある m^2 なる量を無視して解く事にする。

$$\theta - \beta z = \zeta^{1 - \frac{g}{R\beta}} \text{ と置けば標準形に直り}$$

$$\frac{d^2 \varepsilon(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2 R \left(1 - \frac{g}{R\beta}\right)^2} \zeta^{-\frac{2g - R\beta}{g - R\beta}} \varepsilon(\zeta) = f_2(\zeta) \dots (3)$$

となる。

$$\text{ここに} \quad f_2(\zeta) = -\frac{\zeta^{-\frac{g}{g - R\beta}}}{\beta^2 \left(1 - \frac{g}{R\beta}\right)^2} f_1\left(\frac{1}{\beta} \left(\theta - \zeta^{1 - \frac{g}{R\beta}}\right)\right)$$

$\varepsilon(\zeta)$ は $\varepsilon(z)$ の z を ζ で置き代へたものである。

$$\text{更に} \quad \frac{\omega^2}{\beta^2 R \left(1 - \frac{g}{R\beta}\right)^2} = a^2, \quad -\frac{2g - R\beta}{g - R\beta} = b \quad \text{と置く}$$

(3) 式は次の如くなる.

$$\frac{d^2 \varepsilon(\zeta)}{d\zeta^2} + a^2 \zeta^b \varepsilon(\zeta) = f_2(\zeta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

之を解くために homogeneous equation

$\frac{d^2 \varepsilon(\zeta)}{d\zeta^2} + a^2 \zeta^b \varepsilon(\zeta) = 0$ の二つの特解を求めれば (寺澤, 數學概論 563 頁).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \zeta^{J_{-\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2a}{b+2}\zeta^{\frac{b+2}{2}}\right)} \\ \varepsilon_2 &= \zeta^{J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2a}{b+2}\zeta^{\frac{b+2}{2}}\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

J は Bessel の函数を表す.

此の二つの特解が知れてゐると (4) 式の解は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\zeta) &= c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \int \frac{f_2(\zeta) \varepsilon_2}{\Delta} d\zeta + \varepsilon_2 \int \frac{f_2(\zeta) \varepsilon_1}{\Delta} d\zeta \\ \Delta &= \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_2}{d\zeta} - \varepsilon_2 \frac{d\varepsilon_1}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

で與へられる.

$g=980$ C. G. S. として a, b を計算すれば

$$a = \pm 1.4929 \times 10^{-4} \quad b = -2.1877 \quad \text{である.}$$

之を使つて $J_{\pm \frac{1}{b+2}}\left(\frac{2a}{b+2}\zeta^{\frac{b+2}{2}}\right)$ の展開式の第一項及び第二項の比を求めて見る.

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+2s+1)} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad \text{とすれば}$$

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{4}{x^2} \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n+1)} = \frac{4(n+2)(n+1)}{x^2} \quad \text{となる.}$$

$$n = +\frac{1}{b+2} = -5.3256 \quad \text{の場合には}$$

$$\frac{u_0}{u_1} \approx 10^{5.5} \quad \text{但し } \zeta \sim 10^{-13} \quad \text{である.}$$

$$n = -\frac{1}{b+2} \quad \text{の場合も order は同じである.}$$

何れにしても第二項は第一項の十萬乃至百萬分の一の程度であつて第二項は無視し得る. 第一項だけを取れば

$$\varepsilon_1 = \kappa_1 \cdot \zeta \quad \varepsilon_2 = \kappa_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

但し κ_1, κ_2 は常數である.

従つて $\Delta = -\kappa_1 \kappa_2$ となるから (6) 式は

$$\varepsilon(\zeta) = C_3 \zeta + C_4 + \zeta \int f_2(\zeta) d\zeta - \int \zeta f_2'(\zeta) d\zeta$$

となる. 更に部分積分法によつて變形し ζ を元の z にもどせば

$$\varepsilon(z) = C_3(\theta - \beta z)^{1-\frac{g}{R\beta}} + C_4 + \int \left\{ \int (\theta - \beta z)^{\frac{g}{R\beta}} f_1(z) dz \right\} (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} dz \quad \dots \quad (8)$$

次に (2) 式中の m^2 を考へに入れた場合については近似的に $m^2 = \frac{\theta m^2}{\theta - \beta z}$ と置くと

$$a^2 = \frac{\omega^2 - R\theta m^2}{\beta^2 R \left(1 - \frac{g}{R\beta}\right)^2}$$

となり, 數値を入れて見ると

$$a = \pm 3.3 \times 10^{-6}$$

即ち前よりは二桁も小さな値が得られ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の第一項だけを取つた場合の近似の程度はますます良くなる. 併し (8) には a を含まないから a の大きさは今後の計算には無關係である.

3. τ の實驗式について

Lindenberg の觀測値について藤原, 武田の調和分析をした結果は氣温の一日變化を $\tau_{\text{amp}} \sin(\omega t + \varphi(z))$ の形として $\tau_{\text{amp}}, \varphi(z)$ を與へてゐる.

4000 m 迄ある觀測値を便宜上 2000 m を境とする二つの部分に分けて, その各々について $\tau(z)$ の實驗式を作ると次の如くなる.

(i) $z \leq 2000$ m

$$\tau(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$$

$$A = -(10.1717 + 10.2780i) \times 10^{-3}, \quad B = (27.2518 + 40.1728i) \times 10^{-8}$$

$$C = -(31.8017 + 53.5242i) \times 10^{-13}, \quad D = (16.4346 + 29.1364i) \times 10^{-18}$$

$$E = -(3.0578 + 5.6128i) \times 10^{-23}$$

(ii) $2000 \text{ m} \leq z \leq 4000 \text{ m}$.

$$\tau(z) = A' + B'z$$

$$A' = (0.006890 + 0.3289i) \times 10^{-3}, \quad B' = -(0.01193 + 0.5694i) \times 10^{-8}.$$

この $\tau(z)$ の値を用ひて (8) 式の積分の項を z の冪級數に展開したものの計算を行へば

(i) $z \leq 2000$ m

$$G(z) = \int_0^z \left\{ \int_0^z (\theta - \beta z)^{\frac{g}{R\beta}} f_1(z) dz \right\} (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} dz$$

$$= (170.625 + 248.684i) \times 10^{-15} z^2 - (125.474 + 211.834i) \times 10^{-20} z^3$$

$$\begin{aligned}
 & + (47.785 + 84.861 i) \times 10^{-25} z^4 - (6.649 + 12.249 i) \times 10^{-30} z^7 \\
 & - (0.106 + 0.95 i) \times 10^{-35} z^6 - (0.002 + 0.003 i) \times 10^{-40} z^7 \\
 & + (0.000 + 0.001 i) \times 10^{-45} z^8
 \end{aligned}$$

(ii) $2000 \text{ m} \leq z \leq 4000 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}
 G'(z) &= \int_{2 \times 10^5}^z \left\{ \int_{2 \times 10^5}^z (\theta - \beta z)^{\frac{g}{R\beta}} f_1(z) dz \right\} (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} dz \\
 &= -(0.2208 + 11.21 i) \times 10^{-7} + (0.2358 + 11.17 i) \times 10^{-10} z \\
 &\quad - (0.05775 + 2.762 i) \times 10^{-15} z^2 - (0.00251 + 0.0122 i) \times 10^{-20} z^3 \\
 &\quad + (0.000013 + 0.00061 i) \times 10^{-25} z^4 + (0.00000073 + 0.000035 i) \times 10^{-30} z^5
 \end{aligned}$$

となる.

$$\left. \begin{aligned}
 z \leq 2000 \text{ m.} \quad \varepsilon(z) &= (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} C_3 + C_4 + G(z) \\
 2000 \text{ m} \leq z \leq 4000 \text{ m} \quad \varepsilon(z) &= (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} C_3' + C_4' + G'(z)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

4. 試みに層毎に Laplace の公式を用ひて計算された値と比較して見る事にする.

122 m 及び 500 m の二點の値を用ひて C_3, C_4 なる常數を決定し 1000 m, 1500 m 及び 2000 m 三點の値を (9) によつて計算すると第 1 表に示した如くなる.

但し

$$C_3 = -13.647 \times 10^{10} - 14.346 \times 10^{10} i$$

$$C_4 = 122.563 \times 10^{-1} + 127.634 \times 10^{-1} i$$

$$\varepsilon_{\text{amp}} = \sqrt{\{\Re(\varepsilon(z))\}^2 + \{\Im(\varepsilon(z))\}^2} \quad q(z) = \tan^{-1} \frac{\Im(\varepsilon(z))}{\Re(\varepsilon(z))} \dots \dots \dots (10)$$

である.

第 1 圖 (b)

實線は Laplace の公式で計算したるもの, 虚線は著者の求めたる式にて計算したるもの.

第 1 表

高 さ	(9) 式によるもの		Laplace の公式によるもの	
	ϵ_{amp}	$q(z)$	ϵ_{amp}	$q(z)$
122 m	2.107×10^{-4}	25°	2.107×10^{-4}	25°
500 m	0.416	254.5°	0.416	254.5°
1000 m	1.224	204.6°	1.106	209.3°
1500 m	2.013	209.2°	1.850	206.8°
2000 m	2.427	216.2°	2.403	211.9°

之を圖示すれば第1圖の如くなり、よく一致してゐる。

5. 次に地表面に於ては空氣の上下運動が無いと言ふ事を境界條件として入れて見る。

地表面が平面であつて $z=z_0$ で表はされるものとする。運動方程式 $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ によつて $z=z_0$ に於て $w=0$ 即ち $\frac{\partial w}{\partial t}=0$ と言ふ事は次の式で表はされる。

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \right]_{z=z_0} = 0.$$

之を少し變形すると

$$\left[\frac{d\epsilon(z)}{dz} - \frac{g}{RT_0} \tau(z) \right]_{z=z_0} = 0$$

を得る。

(8) 式によれば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d\epsilon(z)}{dz} - \frac{g}{RT_0} \tau(z) \right]_{z=z_0} \\ &= \left[-\beta \left(1 - \frac{g}{R\beta} \right) (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} C_3 + \left\{ \int_0^z (\theta - \beta z)^{\frac{g}{R\beta}} f_1(z) dz \right\} (\theta - \beta z)^{-\frac{g}{R\beta}} - \frac{g}{RT_0} \tau(z) \right]_{z=z_0} = 0. \end{aligned}$$

之によつて C_3 が定まる。

z_0 として Lindenberg の近くの Potsdam の海面上の高さ 122 m を用ひて計算して見ると

$$C_3 = -13.825 \times 10^{10} - 13.962 \times 10^{10} i$$

となる。更に Potsdam に於ける氣壓の觀測値を用ひると C_4 も定まる。

$$C_4 = 124.140 \times 10^{-4} + 124.233 \times 10^{-4} i$$

この C_3, C_4 で $z=2000$ m 迄 $\epsilon(z)$ を計算し得る。 $z=2000$ m に於て $\epsilon(z)$ 及び $\frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z}$ が連続であるとして C'_3, C'_4 を求めると次の如くなる。

$$C'_3 = -0.645 \times 10^{10} - 1.042 \times 10^{10} i$$

$$C'_4 = 4.67 \times 10^{-4} + 10.54 \times 10^{-4} i$$

之等を使つて 500 m 毎に 4000 m 迄の ϵ_{amp} 及び $q(z)$ を (9) 式によつて計算して見ると第2表の如くなる。

第 2 表

	122 m	500 m	1000 m	1500 m	2000 m	2500 m	3000 m	3500 m	4000 m
ϵ_{amp}	$\times 10^{-4}$ 2.107	0.305	1.276	2.050	2.403	2.97	3.86	4.77	5.99
$p_0 \epsilon_{amp}$	mmHg 0.159	0.022	0.087	0.131	0.144	0.167	0.204	0.236	0.278
$q(z)$	25.6°	236.2°	188.5°	193.0°	196.9°	206.7°	214.7°	222.8°	228.4°

第 2 圖 (a)

實線は Laplace の公式を用ひて計算したるもの
虚線は著者の計算したるもの

第 2 圖 (b)

實線は Laplace の公式を用ひて計算したるもの
虚線は著者の計算したるもの

第2圖にはこの値と共に Laplace の公式を用ひて層別に計算したものと及び第3表に示した歐洲の八箇所の高地觀測所の觀測値を比較のために入れてある。

第 3 表

地 名	地 形	高 さ (海拔)	氣 壓 變 化 振 幅	位 相
Zell a. S.	谷	770 m	0.689 m. m. Hg	31.6°
Bad Fusch	山 腹	1180	0.343	50.7
Kolm Saigurn	"	1600	0.161	147.7
Obir	山 頂	2040	0.141	193.6
Santis	"	2500	0.265	182.6
Zug Spitze	"	2960	0.224	178.5
Sonnblick	"	3100	0.315	181.9
Mont Blanc	"	4360	0.290	189.3

6. 結 論

要するに自由大氣中の氣壓日變化と高さとの關係は氣溫の日變化が與へられれば (8) 式によつて知れる。即ち $\epsilon(z)$ が得られれば (10) 式によつて ϵ_{amp} 及び $q(z)$ が求まり或高さ z に於ける氣壓日變化は

$$p_0 \epsilon_{amp} \sin \omega t + q(z)$$

によつて與へられる。

原點に取つた地點より東方へ x だけ隔たつた所に於ての氣壓變化は

$$p_0 \varepsilon_{\text{amp}} \sin(\omega t + m x + q(z))$$

である。

第2圖で見ると山頂觀測所の値は自由大氣中のものと相當よく合つてゐるが谷や山腹のものは違ひが大きいように見える。地形が相當の影響をもつてゐる事が想像せられる。

成 層 圏 の 大 循 環*

荒 川 秀 俊

The Circulation of Air in the Stratosphere.

By H. ARAKAWA.

成層圏における氣温の分布は、高さについては略一定だが、極で最高で赤道で最低である。従て成層圏内では極で上昇し、成層圏の上限に沿ふて赤道の方に移動し、赤道帶で下降して、tropopause に沿ふて極にかへる循環⁽¹⁾が考へられる。これについて二、三の批評乃至反對意見が考へられる。第一にかゝる熱對流が起つては、等温層とも言はれて居る對流圏の本來の性質と矛盾しないか。第二にかゝる循環は Tropopause を境にして起り得るものであらうか、Tropopause は相當に變形し易いものであり、又極と赤道との間に約十軒だけ高さの差異があるのだが、こうした事柄が熱對流を阻みはしないであらうか。

私は之等の異論に充分答へるわけには行かない。然し乍らこれから引き出すことが出來た結論が種々の實測結果を説明するに足るものであれば、相當に信を置き得るものと考へる。以下の理論のたて方はすべて筆者の大氣大循環論の手法を踏襲した。⁽²⁾

扱て、成層圏では極と赤道とに於ける氣温の差は夏季最大になり、冬季最小になる。⁽³⁾ 今氣温を緯度の函数として球函数で表はし、三次までとると

$$T_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) P_2(\cos \theta) + \left(A_3 r^3 + \frac{B_3}{r^4} \right) P_3(\cos \theta)$$

* 中央氣象臺彙報。

(1) 端的に言へば對流圏内の大循環と全く反對の向きをもつ循環である。

(2) H. Arakawa: Geophys. Mag., 8, p. 219-294 (1935); 荒川秀俊: 氣象集誌 第二輯 第十三卷 第三號, 第九號 (昭和十年). (3) E. Palmén: Met. ZS., 1934, S. 17-23.