地球磁場の變化に依つて異方性の傳導率を有する地殻に誘起される地電流に就いて*

平 山 操

On the Earth Potential Gradients induced by the Magnetic Variations in the Anisotropic Earth Crust.

By M. HIRAYAMA.

Abstract—S. Chapman and T. T. Whitehead calculated, first, the earth potential gradients induced by the magnetic variations, considering the earth core enveloped by the non-conducting layer, but the calculated gradients differed from the observed ones, much in amplitude (the latter was 5 or 6 times larger) and little in phase.

Latley, H. Ertel made the amplitude-difference clear, due to non-uniform conductivity of the earth crust varying rapidly with depth.

The author extends Ertel's idea to the anisotropic earth crust which is regarded as the isotropic when it is averaged over the sufficiently wide regions and generalises the Chapman's and Ertel's solutions. We see that the solution answers the existence of the vertical potential gradient and the phase-difference between the calculated and observed potential gradients.

1. 緒 言

地磁氣の日變化の理論は多くの學者に依つて研究されて居るが、A. Schuster⁽¹⁾ は其の根源の大部分は地球外にあり、其の一部分は地球内にあることを見出した。而して後者は外部磁場の變化に依つて地球内に誘起されるものと考へた。S. Chapman と T. T. Whitehead⁽²⁾ は地球の核（傳導率 3.6×10^{-12} C.G.S.）は深さ約 250 浬の不導體にて包まれて居るものとして、外部磁場と内部磁場の振幅比及び位相差を説明することが出来た。然しそれから導かれる地電位差は實測と比較するに、振幅に於て約五分の一程度であり、且つ位相差も僅かながら認められた。

最近 H. Ertel⁽³⁾ は地殻の上層は深さに依つて急變する傳導率をもつものと考へ、この振幅の不一致は測定地附近の傳導率が地球全體の平均傳導率（上層に關して）と著しく異なる結果であることを示し、同時に O. H. Gish と W. Rooney⁽⁴⁾ に依つて指摘された“地電流の振幅は土地の抵抗に

* 中央氣象臺彙報。

(1) A. Schuster: Phil. Trans. A 180, 1889.

(2) S. Chapman & T. T. Whitehead: Trans. Cambridge. Phil. Soc. Nr. 25, 1922.

(3) H. Ertel: Veröffentlichungen des Preussischen Met. Inst. Nr. 391.

(4) O. H. Gish & W. Rooney: Terr. Mag. 35, 1930.

比例する”とも説明することが出来た。

以上の研究は地電位差の鉛直分力を無視して論じて居るが、其の存在は多くの學者の認むる處であり、又 S. E. Forbush⁽¹⁾に依つて實測もされてゐる。而してこの鉛直地電位差は土地が等方性でなし異方性なるが爲に水平地電位差が偏倚される結果ではないかと考へられる。地殻を局部的に見るときは、種々雑多な地質が複雑な配布をしてゐるのが普通であるから必ずしも等方性ではないであらうし、又當所に於て畠山技師と著者の測定した結果も東西方向の傳導率と南北方向のそれとは多少の差のあるのが認められた。

依つて著者は地殻の上層は局所的に見るときは異方性であるが、十分に廣汎な地域を平均して考へるときは等方性と看做されるものとし、H. Ertel の論を更に擴張して鉛直地電位差の存在及び S. Chapman 等の計算せる地電位差と實測との間の位相差を説明せんと試みた。

2. 基本方程式

等方性の傳導率を有する媒質内に於ては、電流 i と電場 E は同方向をとり、 $i = \sigma E$ なる關係にて表され、傳導率 σ はスカラーであるが、異方體にあつては傳導率 σ_{ik} はテンソルであつて、電流と電場は同方向をとらずして、電流の成分 $i_\alpha, i_\beta, i_\gamma$ と電場の成分 $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ とは次の如く結ばれる。

$$\left. \begin{aligned} i_\alpha &= \sigma_{\alpha\alpha}E_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}E_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}E_\gamma \\ i_\beta &= \sigma_{\beta\alpha}E_\alpha + \sigma_{\beta\beta}E_\beta + \sigma_{\beta\gamma}E_\gamma \\ i_\gamma &= \sigma_{\gamma\alpha}E_\alpha + \sigma_{\gamma\beta}E_\beta + \sigma_{\gamma\gamma}E_\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\beta}.$$

Maxwell の方程式に於て變位電流を無視すると

$$\text{rot } H = 4\pi i \dots\dots\dots (2)$$

或は

$$\text{div } i = 0 \dots\dots\dots (3)$$

今地表面 ($r=a$ 或は $z=0$) より深さ $d(\theta, \varphi)$ までは異方性の傳導率 $\sigma_{ik}(r, \theta, \varphi)$ をもつものとし (海沼等の影響は考へない) σ_{ik} は各座標に就いて微分し得るものとする。

地表面及び shell の底 ($z=d(\theta, \varphi)$) に於ては鉛直電流 $i_n=0$ であるから、断面 $a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, 高さ d なる柱部に Gauss' Law を適用し、

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^d i_r r dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \int_0^d i_\theta dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^d i_\varphi dz = 0$$

或は (1) を球座標にて表し

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^d (\sigma_{rr}E_r + \sigma_{r\theta}E_\theta + \sigma_{r\varphi}E_\varphi) dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \int_0^d (\sigma_{\theta r}E_r + \sigma_{\theta\theta}E_\theta + \sigma_{\theta\varphi}E_\varphi) dz$$

(1) S. E. Forbush: Terr. Mag. vol. 38, No. 1, 1933.

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^a(\sigma_{\varphi r}E_r+\sigma_{\varphi\theta}E_\theta+\sigma_{\varphi\varphi}E_\varphi)dz=0\cdots\cdots(4)$$

電場の深さによる變化は極めて小であるが、⁽¹⁾ 傳導率は O. H. Gish 等の Huancayo に於ける測定や著者等の當地に於ける結果を見ても非常に急激な變化を示してゐる。故に (4) に於て電氣力は傳導率に比較すれば常數と看做して差支へないものとする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(E_r\int_0^a\sigma_{rr}dz+E_\theta\int_0^a\sigma_{r\theta}dz+E_\varphi\int_0^a\sigma_{r\varphi}dz\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(E_r\int_0^a\sigma_{\theta r}dz+E_\theta\int_0^a\sigma_{\theta\theta}dz+E_\varphi\int_0^a\sigma_{\theta\varphi}dz\right) \\ +\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(E_r\int_0^a\sigma_{\varphi r}dz+E_\theta\int_0^a\sigma_{\varphi\theta}dz+E_\varphi\int_0^a\sigma_{\varphi\varphi}dz\right)=0 \end{aligned}$$

$$\text{今} \quad \frac{1}{a}\int_0^a\sigma_{ik}dz=\bar{\sigma}_{ik}(\theta,\varphi), \quad (ik=r,\theta,\varphi) \cdots\cdots(5)$$

とおく、

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta(\bar{\sigma}_{\theta r}E_r+\bar{\sigma}_{\theta\theta}E_\theta+\bar{\sigma}_{\theta\varphi}E_\varphi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\bar{\sigma}_{\varphi r}E_r+\bar{\sigma}_{\varphi\theta}E_\theta+\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}E_\varphi)=0 \cdots\cdots(6)$$

次に地表面及び shell の底に於ける normal の方向が r の方向に一致するか又は非常に近い場合は勿論であるが、然らざる場合に於ても $\bar{i}_r$ は ($\bar{i}=\frac{1}{a}\int_0^a i dz$ の意) は $\bar{i}_\theta, \bar{i}_\varphi$ に比較すると極めて小さく零と置き得るものとする。すると stream function ψ を使つて (6) を表し次の聯立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}E_r+\bar{\sigma}_{r\theta}E_\theta+\bar{\sigma}_{r\varphi}E_\varphi &= 0 \\ \bar{\sigma}_{\theta r}E_r+\bar{\sigma}_{\theta\theta}E_\theta+\bar{\sigma}_{\theta\varphi}E_\varphi &= \frac{\partial\psi}{a\partial\lambda} \\ \bar{\sigma}_{\varphi r}E_r+\bar{\sigma}_{\varphi\theta}E_\theta+\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}E_\varphi &= -\frac{\partial\psi}{a\partial\theta} \end{aligned} \right\} \cdots\cdots(7)$$

但し

$$d\lambda = -\sin\theta d\varphi.$$

こゝに ψ は θ, φ の函数で、地表面に於ける磁氣ポテンシャルによつて決定される。

(7) を E_r, E_θ, E_φ に就いて解けば、

$$E_r = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{r\theta} & \bar{\sigma}_{r\varphi} \\ \frac{\partial\psi}{a\partial\lambda} & \bar{\sigma}_{\theta\theta} & \bar{\sigma}_{\theta\varphi} \\ \frac{\partial\psi}{a\partial\theta} & \bar{\sigma}_{\varphi\theta} & \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} \equiv K_1 \frac{\partial\psi}{a\partial\theta} + K_2 \frac{\partial\psi}{a\partial\lambda}$$

(1) 地球が一様な等方性の傳導率 σ を有するものとする $\nabla^2 \mathbf{E} = 4\pi\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ であつて $\mathbf{E}$ が $\frac{1}{e}$ になる深さは $\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, T : 週期) であるから、今 $\mu=1$, $\sigma=10^{-14}\text{ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$ とすると一日週期の場合、其の深さは 1.5×10^3 浬となる。

$$\begin{aligned}
 E_\theta &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_{rr} & 0 & \bar{\sigma}_{r\varphi} \\ \bar{\sigma}_{\theta r} & \frac{\partial \psi}{a \partial \lambda} & \bar{\sigma}_{\theta \varphi} \\ \bar{\sigma}_{\varphi r} & \frac{\partial \psi}{a \partial \theta} & \sigma_{\varphi \varphi} \end{vmatrix} \equiv K_3 \frac{\partial \psi}{a \partial \theta} + K_4 \frac{\partial \psi}{a \partial \lambda} \\
 E_\varphi &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_{rr} & \bar{\sigma}_{r\theta} & 0 \\ \bar{\sigma}_{\theta r} & \bar{\sigma}_{\theta \theta} & \frac{\partial \psi}{a \partial \lambda} \\ \bar{\sigma}_{\varphi r} & \bar{\sigma}_{\varphi \theta} & \frac{\partial \psi}{a \partial \theta} \end{vmatrix} \equiv K_5 \frac{\partial \psi}{a \partial \theta} + K_3 \frac{\partial \psi}{a \partial \lambda}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

但し

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_{rr} & \bar{\sigma}_{r\theta} & \bar{\sigma}_{r\varphi} \\ \bar{\sigma}_{\theta r} & \bar{\sigma}_{\theta \theta} & \bar{\sigma}_{\theta \varphi} \\ \bar{\sigma}_{\varphi r} & \bar{\sigma}_{\varphi \theta} & \bar{\sigma}_{\varphi \varphi} \end{vmatrix} \neq 0^{(1)} \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &\equiv \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}_{\theta \varphi} \bar{\sigma}_{r\theta} - \bar{\sigma}_{r\varphi} \bar{\sigma}_{\theta \theta}), & K_2 &\equiv \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}_{r\varphi} \bar{\sigma}_{\varphi \theta} - \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{\sigma}_{\varphi \varphi}) \\
 K_3 &\equiv \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}_{\theta r} \bar{\sigma}_{r\varphi} - \bar{\sigma}_{rr} \bar{\sigma}_{\theta \varphi}), & K_4 &\equiv \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}_{rr} \bar{\sigma}_{\varphi \varphi} - \bar{\sigma}_{r\varphi}^2) \\
 K_5 &\equiv \frac{1}{\Delta} (\bar{\sigma}_{rr} \bar{\sigma}_{\theta \theta} - \bar{\sigma}_{r\theta}^2)
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

今空氣中に於ては磁氣ポテンシャル Ω が存在し

$$\Omega = \left\{ E_n^m \frac{r^n}{a^{n-1}} + I_n^m \frac{a^{n+2}}{r^{n+1}} \right\} P_n^m \cos \theta e^{im(\varphi+t)} \dots\dots\dots (11)$$

こゝに E_n^m, I_n^m は夫々 external part 及び internal part の振幅と位相差を表す complex const.

で、 t は或基準子午線の時刻である。(故に $\varphi+t$ は local time を與へる.)

$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}$ であるから (8) より磁場の強さ H_r, H_θ, H_φ が計算され、それ等の地表面の條件より ψ を決定することが出来る。即ち μ を地殻の誘磁率とすると

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left(K_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + K_3 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) - \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_3 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + K_4 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \\
 &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial t} \right)_{r=a}
 \end{aligned}$$

或は (11) を代入して書き直すと

$$\frac{K_5}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{K_4}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial K_5}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial K_4}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

(1) $\bar{\sigma}_{ik}(i \neq k)$ は $\bar{\sigma}_{ii}(i=k)$ に比して小さいのが普通であるから Δ の値は主として $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta \theta}, \bar{\sigma}_{\varphi \varphi}$ に依つて定まるを以つて $\Delta \neq 0$ として差支へない。

$$-\frac{2K_3}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial K_3}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_3}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -a^2 \varepsilon_n^m P_n^m \cos \theta e^{im(\varphi+t)} \dots (12)$$

但し
$$\varepsilon_n^m = \frac{im}{\mu} \left\{ nE_n^m - (n+1)I_n^m \right\} \dots \dots \dots (13)$$

3. ψ の決定

狭い地域に着目すれば shell は異方性と看なければならぬが、充分に廣い面積に就いて平均するとき、等方性の様な傳導率を有するものと考へてもよいとする。

$$\frac{1}{S} \int_S \bar{\sigma}_{ik} dS = \bar{\theta}_{ik} \begin{cases} = \bar{\theta}(\text{const}) & (i=k) \\ = 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

この考へを帯球面に適用すると

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \bar{\sigma}_{ik} d\varphi = \bar{\theta}_{ik} \begin{cases} = \bar{\theta} & (i=k) \\ = 0 & (i \neq k) \end{cases} \dots \dots \dots (14)$$

次に $\bar{\sigma}_{ik}$ 及び $K_i (i=1, 2, \dots, 5)$ を表面球函数にて表はし

$$\bar{\sigma}_{ik} = \sum_{r_{ik}=0}^\infty \sum_{s_{ik}=-\infty}^\infty (\bar{\sigma}_{ik})_{r_{ik}}^{s_{ik}} P_{r_{ik}}^{s_{ik}}(\cos \theta) e^{is_{ik}\varphi} \dots \dots \dots (15)$$

$$\begin{aligned} K_i &= \sum_{r_i=0}^\infty \sum_{q_i=-\infty}^\infty (K_i)_{r_i}^{q_i} P_{r_i}^{q_i}(\cos \theta) e^{iq_i\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r_i=0}^\infty (2r_i+1) \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 K_i(\mu') P_{r_i}^{q_i}(\mu) P_{r_i}^{q_i}(\mu') l \mu' d\varphi' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q_i=-r_i}^{r_i} \frac{(r_i-q_i)!}{(r_i+q_i)!} \int_{-1}^1 K_i(\mu', \varphi') P_{r_i}^{q_i}(\mu) P_{r_i}^{q_i}(\mu') \cos q_i(\varphi-\varphi') d\mu' d\varphi' \dots (16) \right] \end{aligned}$$

但し
$$\mu = \cos \theta.$$

ψ を次の如く表面球函数に表し $\psi_n^m(\theta, \varphi)$ には無關係) を決定しよう。

$$\psi = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=-\infty}^\infty \psi_n^m \cdot P_n^m(\cos \theta) e^{im(\varphi+t)} \dots \dots \dots (17)$$

(16), (17) を (12) に代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=-\infty}^\infty \psi_n^m e^{im(\varphi+t)} \left[\sum_{r_5=0}^\infty \sum_{q_5=-\infty}^\infty (K_5)_{r_5}^{q_5} e^{iq_5\varphi} \cdot \frac{P_{r_5}^{q_5}(\mu)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \sum_{r_4=0}^\infty \sum_{q_4=-\infty}^\infty (K_4)_{r_4}^{q_4} e^{iq_4\varphi} \right. \\ &\quad \times \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{r_4}^{q_4}(\mu) P_n^m(\mu) + \sum_{r_5=0}^\infty \sum_{q_5=-\infty}^\infty (K_5)_{r_5}^{q_5} e^{iq_5\varphi} \frac{\partial P_{r_5}^{q_5}(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \\ &\quad - \sum_{r_4=0}^\infty \sum_{q_4=-\infty}^\infty (K_4)_{r_4}^{q_4} e^{iq_4\varphi} \frac{m \cdot q_4}{\sin^2 \theta} P_{r_4}^{q_4}(\mu) P_n^m(\mu) - 2 \sum_{r_3=0}^\infty \sum_{q_3=-\infty}^\infty (K_3)_{r_3}^{q_3} e^{iq_3\varphi} \cdot \frac{im}{\sin \theta} P_{r_3}^{q_3}(\mu) \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \\ &\quad \left. - \sum_{r_3=0}^\infty \sum_{q_3=-\infty}^\infty (K_3)_{r_3}^{q_3} e^{iq_3\varphi} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \left(im \cdot \frac{\partial P_{r_3}^{q_3}(\mu)}{\partial \theta} \cdot P_n^m(\mu) + iq_3 \cdot \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \cdot P_{r_3}^{q_3}(\mu) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n^m P_n^m(\mu) e^{im(\varphi+t)} \dots \dots \dots (18)$$

(18) を簡単に次の如く書く。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l_i=0}^{\infty} \sum_{q_i=-\infty}^{\infty} A_{n, r_i}^{m, q_i}(\mu) e^{im(\varphi+t)+l_i q_i \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n^m(\mu) e^{im(\varphi+t)}$$

上式の兩邊に $e^{-ia\varphi}$ をかけ、 $0-2\pi$ まで積分するときは

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-\alpha)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & (m \neq \alpha) \\ 2\pi & (m = \alpha) \end{cases}$$

なるを以て

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r_i=0}^{\infty} \sum_{q_i=-\infty}^{\infty} A_{n, r_i}^{a_i - q_i l_i}(\mu) e^{-l_i q_i t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^a(\mu)$$

然るに $0 \leq t \leq 2\pi$ であるから (18) が成立する爲には $q_i = 0$ であり、且つそれにて充分である。

故に (18) は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_n^m \cdot e^{im(\varphi+t)} & \left[\sum_{p_5=0}^{\infty} (K_{\bar{5}})_{p_5} \frac{P_{p_5}(\mu)}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \sum_{p_4=0}^{\infty} (K_4)_{p_4} \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \cdot P_{p_4}(\mu) P_n^m(\mu) \right. \\ & + \sum_{p_6=0}^{\infty} (K_{\bar{6}})_{p_6} \frac{\partial P_{p_6}(\mu)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - 2 \sum_{p_3=0}^{\infty} (K_{\bar{3}})_{p_3} \frac{im}{\sin \theta} P_{p_3}(\mu) \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \\ & \left. - \sum_{p_2=0}^{\infty} (K_{\bar{2}})_{p_2} \frac{im}{\sin \theta} \frac{\partial P_{p_2}(\mu)}{\partial \theta} \cdot P_n^m(\mu) \right] = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n^m \cdot P_n^m(\mu) e^{im(\varphi+t)} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

然るに

$$\begin{aligned} \sum_{r_{ik}=0}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ik})_{r_{ik}} P_{r_{ik}}(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r_{ik}=0}^{\infty} \sum_{s_{ik}=-\infty}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ik})_{r_{ik}}^{s_{ik}} P_{r_{ik}}^{s_{ik}}(\mu) e^{is_{ik}\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_{ik} d\varphi = \bar{\theta}_{ik} \quad (i, k = r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

なるを以て (16) より

$$\begin{aligned} \sum_{p_i=0}^{\infty} (K_i)_{p_i} P_{p_i}(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p_i=0}^{\infty} \frac{(2p_i+1)}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} K_i(\mu') P_{p_i}(\mu) P_{p_i}(\mu') d\mu' d\varphi' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p_i=0}^{\infty} (2p_i+1) P_{p_i}(\mu) \int_{-1}^1 K_i(\bar{\theta}_{ik}) P_{p_i}(\mu') d\mu'^{(1)} \\ &= K_i(\bar{\theta}_{ik}). \end{aligned}$$

但し $K_i(\bar{\theta}_{ik})$ は θ, φ に無関係であつて唯 $\bar{\theta}_{ik}$ に依つて定まるものなるを意味する。而して (14)。

の假定により其の値は、

$$(1) \quad \int_{-1}^1 P_{p_i}(\mu') d\mu' = \begin{cases} 0 & (p_i \neq 0) \\ 2 & (p_i = 0) \end{cases}$$

$$K_i(\bar{\theta}_{ik}) = \begin{cases} 0 & (i=1, 2, 3) \\ \frac{1}{\bar{\theta}} & (i=4, 5) \end{cases}$$

故に (19) は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n^m}{\bar{\theta}} \cdot e^{im(\varphi+t)} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m(\mu) \right\} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n(n+1)}{\bar{\theta}} \cdot \psi_n^m \cdot e^{im(\varphi+t)} \cdot P_n^m(\mu) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n^m e^{im(\varphi+t)} \cdot P_n^m(\mu) \end{aligned}$$

依つて

$$\psi_n^m = \frac{\bar{\theta}}{n(n+1)} a^2 \varepsilon_n^m$$

結局 (17) により ψ は

$$\psi = a^2 \cdot \bar{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^m}{n(n+1)} \cdot P_n^m(\mu) e^{im(\varphi+t)} \quad (20)$$

故に (8) より

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{a \cdot \bar{\theta}}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \left\{ K_1 \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \frac{im \cdot K_2}{\sin \theta} P_n^m(\mu) \right\} \\ E_{\theta} &= \frac{a \cdot \bar{\theta}}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \left\{ K_3 \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \frac{im \cdot K_4}{\sin \theta} P_n^m(\mu) \right\} \\ E_{\varphi} &= \frac{a \cdot \bar{\theta}}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \left\{ K_5 \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} - \frac{im \cdot K_3}{\sin \theta} P_n^m(\mu) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

Chapman 及び Ertel の式は (21) の特別の場合として誘導することが出来る。即ち

Ertel の式：

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ \sigma & (i = k) \end{cases}$$

従つて

$$K_4 = K_5 = \frac{1}{\sigma} \quad \text{となり} \quad \bar{\theta} = \bar{\sigma} \quad \text{と書けば}$$

$$\left. \begin{aligned} {}_e E_r &= 0 \\ {}_e E_{\theta} &= \frac{a}{\mu} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\mu) \\ {}_e E_{\varphi} &= \frac{a}{\mu} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

Chapman の式：

(22) に於て $\sigma = \bar{\sigma}$ とすると

(1) 更に一般化して $\psi = e^{im\varphi + \beta t}$ なる場合も同様にして解くことが出来る

$$\psi = a^2 \bar{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^m}{n(n+1)} P_n^m(\mu) e^{im\varphi + \beta t}$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} sE_{\theta} &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\mu) \\ sE_{\varphi} &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} im \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\} e^{im(\varphi+t)} \cdot \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

4. 鉛直地電位差

S. E. Forbush は鉛直地電位差の變化は非常によく地磁氣の水平分力の變化と相對應して居り、其の間には linear の關係があるものとして、(どんな式にて表はしたかは示してゐない) 後者より前者を算出し、其の殘餘の變化は氣溫の日變化に酷似して居ることを指摘し、これは極板に及ぶ氣溫の影響であらうと述べてゐる。

$$\left. \begin{aligned} H_{\theta} &= -\frac{\partial Q}{a \partial \theta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (E_n^m + I_n^m) e^{im(\varphi+t)} \cdot \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \theta} \\ H_{\varphi} &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (E_n^m + I_n^m) \frac{im}{\sin \theta} e^{im(\varphi+t)} \cdot P_n^m(\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

であるから、

$$E_r = -\frac{a}{\mu} \bar{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{im \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\}}{E_n^m + I_n^m} (K_1 H_{\theta} - K_2 H_{\varphi})$$

或は δ を偏角とすると

$$E_r = -\frac{a}{\mu} \bar{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{im \left\{ \frac{E_n^m}{n+1} - \frac{I_n^m}{n} \right\}}{E_n^m + I_n^m} (K_1 \cos \delta - K_2 \sin \delta) \cdot H \dots\dots\dots (25)$$

(25) は鉛直地電位差と地磁氣の水平分力との關係を示すもので、(偏角も勿論時刻と共に變化するが) 兩者の變化が對應することも想像される。

又鉛直地電位差が水平地電位差に比較して略、十分の一の程度であることも $\bar{\sigma}_{ik}(i \neq k)$ が $\bar{\sigma}_{ik}(i=k)$ に比して十分の一と考へれば説明することが出来る。而してこの程度の $\bar{\sigma}_{ik}(i \neq k)$ の値はあり得るものと思はれる。

5. 位 相 差

Chapman 等が地磁氣の變化より地電位差を計算するに用ゐた式は (23) を次の如く書き換へ ΔH_r の調和分析より C_n, α_n を求め、 E_{θ}, E_{φ} を算出した。 $P_n^m(\mu)$ は $\bar{P}_n^{n-1}(\mu)$ として日變化の年平均に適用し、 ΔH_r を r で、 E_{θ}, E_{φ} を 10^{-3} volt/km で表してある。

$$\Delta H_r = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nt + \alpha_n) \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} sE_{\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.463}{\sin \theta} \cdot \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot C_n \sin(nt + \alpha_n) \\ sE_{\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \cdot 0.463 \frac{n}{(n+1)(n+2)} \cdot C_n \cos(nt + \alpha_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

(27) を簡単に次の如く書く,

$$\left. \begin{aligned} {}_sE_{\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} {}_sA_n \sin (nt + \alpha_n) \\ {}_sE_{\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} {}_sB_n \cos (nt + \alpha_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} {}_sA_n &= \frac{0.463}{\sin \theta} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot C_n \\ {}_sB_n &= \frac{n \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \cdot 0.463 \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot C_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

今 (21) より E_{θ}, E_{φ} を次の如く表す.

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin (nt + \epsilon_n') \\ E_{\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos (nt + \epsilon_n'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

然るときは, (21), (28), (30) より

$$\left. \begin{aligned} A_n^2 &= \bar{\theta}^2 (K_{4s}^2 A_n^2 + K_{5s}^2 B_n^2) \\ \tan \epsilon_n' &= \frac{K_{4s} A_n \sin \alpha_n + K_{5s} B_n \cos \alpha_n}{K_{4s} A_n \cos \alpha_n - K_{5s} B_n \sin \alpha_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} B_n^2 &= \bar{\theta}^2 (K_{5s}^2 B_n^2 + K_{4s}^2 A_n^2) \\ \tan \epsilon_n'' &= \frac{K_{5s} B_n \sin \alpha_n - K_{4s} A_n \cos \alpha_n}{K_{5s} B_n \cos \alpha_n + K_{4s} A_n \sin \alpha_n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

或は

$$\tan \epsilon_n' = \tan \left(\alpha_n + \tan^{-1} \frac{K_{5s} B_n}{K_{4s} A_n} \right)$$

$$\tan \epsilon_n'' = \tan \left(\alpha_n - \tan^{-1} \frac{K_{4s} A_n}{K_{5s} B_n} \right)$$

なるを以つて

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n' &= \alpha_n + \tan^{-1} \frac{K_{5s} B_n}{K_{4s} A_n} + S\pi \quad (S=0, 1, 2, \dots) \\ \epsilon_n'' &= \alpha_n - \tan^{-1} \frac{K_{4s} A_n}{K_{5s} B_n} + S\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

故に (21) に依つて計算したる地電位差は Chapman のそれと比較すると, 南北分力に於ては $\tan^{-1} \frac{K_{5s} B_n}{K_{4s} A_n}$, 東西分力に於ては $\tan^{-1} \frac{K_{4s} A_n}{K_{5s} B_n}$ の位相差がある. 而して $\frac{K_3}{K_4}$ と K_3/K_5 とは大抵の場合同符號 (通常の場合 K_4 は $\sigma_{\theta\theta}$ と, K_5 は $\sigma_{\varphi\varphi}$ と同符號と考へられる) と考へられるから, 兩者の位相差は其の符號が相反することになる. Chapman 等が (27) に依つて計算し, Ebro に於ける測定の結果と比較したるに, 實測の南北分力は計算のそれより約一時間早く, 東西分力にては約二時間遅れを示してゐる. これは (33) によりよく説明されてゐる.

6. 結 語

地殻を異方性の導體と考へ、Chapman, Ertel の式を更に一般化し、計算より出した地電位差と實測のそれとの位相差を説明し、併せて、Forbush の鉛直地電位差はこの shell 中を流れる水平電流の偏倚されたものであらうと考へた。

以上は地殻が異方質であるとの假定の下に論じたので、其の當否は各地方に於て測定した結果に待たなければならないのであるが、もし以上の所論が正しいものとするならば、觀測所の密でない現在に於て、地電流嵐の方向や種々な局部的擾亂を調査する場合には、この點に相當の考慮を拂ふの必要があるものと思はれる。

終りに臨み、お閱讀を賜つた岡田臺長先生竝に種々有益なるお助言に預つた畠山技師寺田畏兄に對し滿腔の謝意を表します。

(昭和十年四月、於臨時豐原地磁氣觀測所)

音波に依る振子の振動に就て*

廣野 卓藏, 岩崎 章二

On the Vibration of a Pendulum by Sound Waves.

By T. HIRONO and S. IWASAKI.

Abstract:—In this paper it is treated on the case that a spherical pendulum is forced to vibrate from repose by plane waves. The authors give the solution for the vibration of the pendulum, when the motion of the air particle is expressed by the following formula

$$\begin{cases} 0 & t - \frac{x}{c} < 0 \\ \sin p\left(t - \frac{x}{c}\right) & t - \frac{x}{c} > 0 \end{cases}$$

It is proved that there is an oscillation which occurs in an instant of the arrival of sound waves at the pendulum and vanishes rapidly, besides the forced and self oscillations.

1. 1929 及び 30 年に起つた淺間山の爆發に際して各觀測所の地震計の記象に音波の影響と覺しい位相が明瞭に現はて居るのが見られた。この時の材料を集めて石川氏が位相の走時を求めてそ

*中央氣象臺彙報.