週期性の意義, 輪廻現象, 及びその検出法に就きて*

高橋 浩 一 郎

§1. 緒 言

天氣に一週間の週期があるとか, 大地震に六十年の週期があるとか云ふ事は, 屢々耳にする事である. ところが, 此の週期性と云ふ事を考へて見るに, 眞の意味の週期性とは少し異なつて居るやうに思はれる. 而して, 通常單に週期と云つて居る言葉の内には種々の場合が含まれて居り, 今少し吟味する必要が感ぜられる. そこで, いささか此の言葉の意義を検當し, 合はせて週期検出法を論じて見よう.

§2. 週期性の意義

週期性とは如何なる事であらうか. 嚴密な意味に於ては次の如く解釋出來よう. 今, y が x の函數であり,

$$y(x) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0 + 2\Delta x) = \dots \quad (1)$$

等の關係が満足されるならば, y には週期性があり, Δx をその週期と名付ける. 勿論, Δx は必ずしも一つとは限らない. 時に依ると澤山ある事がある. 此のやうな場合は多週期性と云つて良いであらう. 即ち, 言葉をもつて云ひ表はすならば, 一定時間 (必ずしも時間のみとは限らないが) 經過する毎に全く同じ状態が出現する事である. 例へば振子の運動を考へる. 若しエネルギーの消費がないならば

$$y(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \quad (2)$$

となり, 確かに (1) の定義が満足される故, 週期性があり, 且つその週期は T であると云へる. ところが, 若しもエネルギーの消費のある時, 例へば

$$y(t) = Ae^{-\rho t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \quad (3)$$

の如き場合は最早 (1) の關係は成立しない. それにも拘はらず我々は此れにも T なる週期があると云ふ事に躊躇しない. 何故ならば, 變位そのものは (1) を満足しないが, その振幅と云ふ事を除いて其の振動の形式を考へれば確かに T 經過する毎に同じ様になるからである. 即ち, 此の場合には状態と云ふ言葉を形式なる言葉に書き換へる事に依つて前の定義が用ひられる. 更に一步進めて, 天氣の一週間週期の如きを考へて見よう. 成程時には一週間毎に同じ状態が繰り返へされるか

* K. Takahasi: On the Meaning of the Periodicity and the Method for Detecting It. 中央氣象臺彙報.

も知れないが、時に依ると 8 日或は 6 日になり、甚だしい時には 3 日とか 4 日に縮んだり、或は 10 日 11 日と延びる事もあらう。即ち此の場合には形式なる言葉をもつてする事も出来ない。しかしながら、此れは確率なる言葉を導入する事に依り救はれる。即ち或る時は 6 日、或る時は 8 日に繰返へされるが、平均的に見て 7 日に繰返へされる事が最も多い。換言すれば同じ状態が 7 日毎に繰返へす確率が最も大である。天氣の場合の週期性とは此のやうな意味と解釋出来よう。即ち、今或る一つの状態が起きたとき、 t 後に再び同じ状態が起る確率を $w(t)$ とするとき、 $w(t)$ に週期性のある事である。唯、此の場合には最早や週期と云ふ言葉は不適當かもしれない。寧ろ輪廻⁽¹⁾とも名付く可きであらう。

此の様に觀察して来るならば、週期性とは次の如く定義してよいであらう。

ある事象 A (此れには何等の制限がない。) が起きたとき、一定時間 T 後 (必ずしも時間のみとは限らない。位置の如きものでもしつかへない。) に再び必ず A が起るか、或は少くも A の起る事が他の時に比して多いならば週期性があり、 T をもつてその週期と名付ける。

前者は眞の週期であり、後者は輪廻の場合である。もつとも實際問題に於いて、眞の週期に他の邪魔が入つて一見後者の如き觀を呈する事がある。例へば、或る一地點を通過する電車の如き此れである。自働停止信號の有する週期をもつて通過する可き筈であるが、電車の速度の違いなどに依りある時間動搖する。又或る時は續いて二臺來たり、又或る時は來なかつたりする。しかし此の變動は或る範圍に限られて居り、一見輪廻に似て非なるものである。此れは寧ろ、眞の週期の方に入れる可きであらう。即ち第二種のもは更にこの二つにわけなければならない。

輪廻の現はれるよい例は振子に不規則な外力が作用した時である。振子は外力が作用するから決して眞の週期性は有しないが、固有振動に近い變化が共振れにより一番よく誘發され、結局平均的にはその固有振動に近いものが現はれる。例へばその外見的週期⁽²⁾の平均はその固有振動に略近い。従つて實際の輪廻現象を此のやうな力學的系で抽象化すると前に定義した T に相當の根據が出て來ると云ふ利點がある。又此の場合今一つ重要な因子は固有振動に於ける減衰比である。此の大小に依り位相のづれに大きな差が出て來る。減衰比が 1 に近いと、即ち減衰が少ないと、固有振動が強く惹起される故、輪廻が眞の週期性に近くなる。これに反し非常に大きくなると、即ち減衰が劇しいと、週期性が弱められ輪廻の現象が不明瞭になる。此のやうな意味で、輪廻現象を此のやうな力學的系で抽象化した場合、減衰比は週期と共に輪廻現象を理解する爲に重要な役割りを演ずる。

§3. 週期性の検出法及び分類

此の様に議論を進めて行くと、次のやうな考へが浮んで來る。實測値から週期性を検出するには

(1) 藤原博士著：雲を掴む話。103—104 参照。

(2) 外見的週期とは、山から山まで、又は谷から谷までの長さで定義する。従つて此れは一振動毎に異なる。

面倒な事はせず、素朴な定義自身に立戻つたならば良いではなからうか。即ち今 $y=f(x)$ がいろいろの x について與へられて居るとき、例へば y_0 と云ふ値を有するものを此の群の内から撰び出し(其の時の x を x_i とする)、一般に $x_i+n\Delta x$ (n は整数)に於ける y の値を調べて見る。若し常に y_0 なら定義に従ひ確かに Δx なる週期を有する眞の週期性がある。若し又、全部は y_0 にはならなくとも y_0 になる確率が他の時に比して大ならば、第二の意味の週期性、即ち輪廻がある事になる。もつとも此の場合には眞の週期に何か不規則なものが交つたのかもしれない。しかし此れを區別する事は容易である。次には其の實際的方法を掲げて見よう。

(a) 質的の場合

今一列の観測値(観測は一定の時間間隔をもつて行はれるものとしよう。)

A B A A B B A B B B A A B B A A B B A B A B A A B.....

があり、此れに週期性があるかどうか調べて見る。此の観測値の群から或る一つの性質(此れは何でもよい)を有するものを撰び出す。そしてその数を N とする。例へば天氣に就いて云ふならば雨天の日の如きである。其の撰び出したものから後に、途中の経過はどうでもよいが、再び A の現はれて居る場合の数を n とする。而して、週期性の定義から容易に解る事であるが、若し n/N と t の関係が第1圖(a)の如くなれば眞の週期性があり、(b)の如くなれば輪廻があり、又(c)の如くなつて居れば眞の週期に他の變動が交つたものと見られる。又此の場合週期は山から山迄の間隔になる事は云ふを待たない。又輪廻を表はす一つの因子の減衰比も此のやうな質的の場合には正確に數式にかけて解くことはむづかしいが、 $(n/N, t)$ 曲線から大體の見當はつく。斯くして、週期性の有無、種類の判定、週期性を特長付ける因子、即ち週期、減衰比等が求められる。唯、此の場合問題になるのは、統計の場合にはいつも現はれる事であるが、統計的變動の事である。此れを考慮しないと週期がないにも拘らずあるかの如き誤謬に陥る。従つて此の變動がどれ位現はれるか調べておく必要がある。今或る任意の時に A が起きたとき、 t 後に再び A の現はれる確率を $w(t)$ とする。但し途中の経過は考へないものとする。問題は實測値から $w(t)$ を決定した時どれ位の誤差 ϵ が起り得るかにある。確率論の教へる事に依れば

$$w(t) \approx \frac{n}{N} \quad (4)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{w(1-w)}{N}} \quad (5)$$

第 1 圖

である。従つて n/N が此の誤差より大きく變動して居るならば確かに週期性があり、若し小なら週期性はまづないものと認む可きである。例へば前提の観測値に就いて週期性を調べて見よう。

計算法は左圖の如くする。此れで見ると $t=4$ の時 $n/N=0.7$ となり他に比し著るしく大きい。故に 4 の週期があるらしい。そこで ϵ を調べて見ると

$$\epsilon \sim \sqrt{\frac{0.7 \times (1-0.7)}{10}} = 0.15$$

となる故 0.7 はまづ誤差外にある。即ち確かに 4 の週期がある事になる。

(b) 極値から極値までの間隔に依る方法

観測値の列に於いて山から山迄, 又は谷から谷までの間隔の頻度を調べ, 若し或る一定の時間の時最大となるならばそれは或る意味に於いて週期性を有する事であ

t	0	1	2	3	4	5
	A	B	A	A	B	B
	A	A	B	B	A	B
	A	B	B	A	B	B
	A	B	B	B	A	A
	A	A	B	B	A	A
	A	B	B	A	A	B
	A	A	B	B	A	B
	A	B	B	A	B	A
	A	B	A	B	A	A
	A	B	A	A	A	B
A の数	10	3	3	5	7	4
n/N	1.0	0.3	0.3	0.5	0.7	0.4

り, 又屢々用ふる方法である。しかし此處で提出しようと云ふのは一つの山からすぐ次の山の間隔だけでなく, 更に先の山まで勘定に入れるのである。換言すれば (a) の場合に於いて山又は谷と云ふ条件を與へる事である。唯, しかし山とか谷とか云ふ条件は相續く三つの観測値の相對的位置で定まるものであり, 全く獨立したものではない。従つて上の場合と少し異なる。そこで, 全く偶然の場合にどうなるか調べて見よう。若し相續く二つの観測値が全く獨立と云ふ假定をすると,

- 一つの山が現はれたとき, すぐ次に又山の現はれる確率 $\dots 0$
- 一つの山が現はれたとき, 一つおいて山の現はれる確率 $\dots 2/5$
- 一つの山が現はれたとき, 二つおいて又山の現はれる確率 $\dots 1/3$
- 一つの山が現はれたとき, 三つおいて又山の現はれる確率 $\dots 1/3$

.....

となる事がわかる。(付たり参照) なほ週期だけを調べる爲ならば, 普通の如く山から山迄の間隔の頻度曲線に依るもよいであらうが, 現在のやうな方法に依るとその週期性が如何なる種類のものであるかも解かる利點がある。

(c) 定差に依る方法

長年變化のある場合に割合短週期のものを検出したい時,⁽¹⁾ 丁度加速度地震計, 速度地震計が短週期の波の検出に都合よい様に, 此の方法に依ると便利な事がある。*即ち前述の A なる性質として一度微分した形式の曲線の上昇, 下降をもつてするのである。猶, 前と同様曲線の上昇, 下降は相續く二つの観測値の相對的位置で定まるものであり, もとの観測値が全く偶然であつてもその差

(1) 地震計との比較を試みるなら (a) は變位地震計, (b) は加速度地震計, (c) は速度地震計に相當する。而してそれ等の特長もそれに相當して居る。

の相續くものは全く偶然とは云はれない。例へば全く偶然に現はれる値の列

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

があつたとき相續く二つの値の差の列

$$\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3, \dots$$

に於て Δf_i と Δf_i との相關係數を計算して見ると、

$$r_i = \frac{\overline{\Delta f_i \Delta f_i}}{\sqrt{\overline{\Delta f_i^2} \overline{\Delta f_i^2}}} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ -\frac{1}{2} & i=2 \\ 0 & i>2 \end{cases} \quad (6)$$

となる。従つて $i=1$, 及び 2 の場合には獨立にならないから注意を要する。即ち、上昇したすぐ次には下降する事が全く偶然であつても相當多いから、此の方の見極めを付けておかなければならない。

(d) 量的方法

今迄述べた方法は總べて質的方法であつたが、量的の場合に擴張する事も容易である。筆者が會つて提出した分析法⁽¹⁾はまさに之に外ならない。

(e) 例

輪廻の場合の例として、前述の如き非常に細い針金に棒をつるし、不規則な風により起きた振れ振動の觀測値を示すと第2圖 (a)

第 2 圖

の如くなる。此れに (b) の方法を應用した結果が第3圖 (a) である。第1圖 (b) と比較して確かに

此れが輪廻現象である事がわかる。なほ此の振り振子の週期、減

衰比はそれぞれ 24 sec 1.4 である。次に眞の週期が他の變動により隠されてゐる場合として前述の電車の場合を探る。第2圖 (b) は駿河臺で觀測した結果であり、此れに就いて (a) の方法を用ふると第3圖 (c) の如くなる故、確かに上述の如き種類の週期性がある事がわかる。

§4. 應 用 例

(a) 東京に於ける天氣の週期性

大正十三年から昭和八年迄の一月に於ける雨天の日 (0.1 耗以上の

第 3 圖

(1) K. Takahasi and K. Husimi: Geoph. Mag. 9 (1935) 29. 高橋浩一郎: 理研彙報. 14 (1935), 255.

降水のあつた日)を撰び (a) の方法に依り調べた。第4圖 (a) が其の結果である。これから見ると 5 日 8 日 12 日 15 日 17 日 20 日 22 日 26 日等の所が極大になつて居るが、誤差を計算して見ると約 3 になる故、5 日 19 日、26 日のあたりは先づ信用出来るが他は疑はしい。むしろないと見た方がよいであらう。同じく東京に於ける 1902 年より 1921 年迄の月に就いて試みた結果は第4圖 (b) である。同じ材料で晴の日について試みると (c) の如くなり (b) と殆んど同じ形を有する。此れは當然な事であらう。此の結果から一日の持続性の著るしい事、6 日の週期があるらしい事がわかる。

第 4 圖

(b) 東京に於ける氣壓及び氣溫の週期性

氣壓には四日の週期がある事が知れて居る。實際此れが出るかどうか (b) の方法に依つて調べて見た。前と同様東京に於ける大正十三年から昭和八年迄の一月に於ける観測値に依つた。其の結果を圖示すると第5圖 (a) の如くなり明に 4 日の週期がある事がわかる。氣溫について同じ事を試みるとやはり 4 日の週期が出るが氣壓の方程明瞭でない (第5圖 (b))。

第 5 圖

なほ此の週期性は圖から判斷して輪廻現象である事がわかる。今一つの例として氣壓に三年の週期があるかないか調べて見た。材料は東京に於ける 1876—1935 年迄の年平均に依つた。その結果第5圖 (c) に示す如く約 2.8 年の週期がある事が知れた。なほ藤原咲平博士、關口領氏の諏訪湖の結氷期日に關する研究に依れば確かに 3 年位の週期性がある事が知れて居る。最も此れは多少性質の異なるものではあるが、氣候に此れ位の週期性のある事を物語るものであらう。

(c) 再び氣壓波の週期

(c) の方法に依り東京に於ける昭和六年～八年の一月の氣壓に就いて數日の週期性を求めて見た。結果は第6圖の如く前と同じ 4 日の週期を得た。なほ又減衰比を第5圖 (a) 及び第6圖から見當を付けて見ると約 2 位である。

第 6 圖

§5. 付 たり

§3 (b) の關係をざつと數式的に證明して見よう。問題は全く不規則に現はれる量の列に就いて一つの極大が現はれたとき n 番目が再び極大になる確率如何と云ふ事である。(但し途中の経過は考へないものとする。) 今不規則に現はれる量の分布曲線を $p(x)dx$ とする。而して分布曲線と云ふ事から

$$\int_{-\infty}^x p(x) dx = Q(x)$$

とするとき

$$Q(\infty) = 1 \quad Q(-\infty) = 0 \quad \frac{dQ}{d\chi} = p \quad (7)$$

なる条件がある。さて今一つの極大が現はれた事が確かな場合 2 目に再び極大の現はれる確率は

$$w(2) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) dx_1 \int_{x_1}^{\infty} p(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{x_2} p(x_3) dx_3 \int_{x_3}^{\infty} p(x_4) dx_4 \int_{-\infty}^{x_4} p(x_5) dx_5}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) dx_1 \int_{x_1}^{\infty} p(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{x_2} p(x_3) dx_3} \quad (8)$$

で與へられる。(7) の關係を用ひて積分を行ふと

$$w(2) = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (9)$$

となる。同様に n が 3 より大きな時には

$$w(n) = \frac{1}{3} = 0.333 \quad n > 3 \quad (10)$$

となる事が云へる。此の關係は p に對し何等の假定を必要としない。もつとも、時に依ると相並ぶ二つの値が等しくなる事がある。此れをどうするかは可成り厄介な問題である。しかし此のやうな場合はあまりないから問題外にしても良いものとする。此等の關係は實驗を試みるまでもなく明かであるが、次のやうな事を試みたから其の結果を示さう。その一つはカードに毎日の氣壓、雲量等を記入しごちやごちやに混ぜる。そして此から勝手に一枚づつ抜き出し、その順に並べる。その値の列について §3 の (b) の方法を試みた。氣壓の場合は p は誤差曲線に近く、雲量の場合は U 字狀分布をして居る事は衆知の事であらう。又特別の場合として 1 から 100 迄の値を書き入れたカードに就いて同じ事を行つた。此の時 p は常數である。今一つの場合として書物の各行にある e の字について調べて見た。この時の p はボアツソンの分布をする。その結果は次の表の如くである。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
氣 壓	43 48	47 40	42 40	36 40	46 40	35 40	47 40	33 40	43 40	觀測値 計算値
1—100	206 215	190 179	173 179	174 179	184 179	180 179	186 179	173 179	174 179	觀測値 計算値
雲 量	84 89	79 72	66 72	75 72	72 72	75 72	72 72	70 72	71 72	觀測値 計算値
文 字	46 44	35 37	40 37	33 37	41 37	31 37	44 37	31 37	32 37	觀測値 計算値

大體兩者一致して居る故まづ實驗的に證明出來たと見てよいであらう。

最後にいつも相變らぬ御懇切なる御指導を賜りし藤原先生に衷心よりの謝意を表する。

なほこの材料の一部は養成所本科二年演習に行つたものである。

潮汐に依る地球磁場の太陰日變化に就いて*

平 山 操

§1. 緒 言

媒質が磁場内に於て運動する際に起る電場に依つて、地球磁場の日變化を説明せんとする考へは、即ち dynamo-theory であるが、從來この考へは専ら atmospheric tide に就いてのみ論ぜられたが、oceanic tide に就いても當然適用されるべきである。

簡単に一樣な深さ (2 軒とす) の海洋が地球を包んでゐる場合を考へれば、この層の全電気傳導度は海水の傳導度を 4×10^{-14} emu とすれば 8×10^{-6} emu となる。然るに電離層の全電気傳導度は日變化の要求する値が 2×10^{-5} emu にして、一方 S. Chapman⁽¹⁾ の計算によれば 2×10^{-6} emu なるを以て海洋の其れと大差ないものである。故に日變化の問題、殊に太陰日變化 (L V.) を論ずるに際しては、この oceanic tide に依る磁場を度外視することは出来ないであらう。

§2. 磁氣ポテンシャル

一樣な深さ h なる海洋が廻轉しない地球を包める場合の潮汐は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\zeta - \bar{\zeta}) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta - \bar{\zeta}) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{h}{a \sin \theta} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u) + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

u, v は夫々北及び東向きを正とし、 $\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}$ (Ω は起潮力のポテンシャル) で平衡論による海面の高さにして次の如く球函數にて表せるものとする。

$$\bar{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \bar{\zeta}_n^m P_n^m(\mu) e^{im(\varphi + t)} \dots\dots\dots (4)$$

然るときは容易に

* M. Hirayama: On the Lunar Diurnal Variation of the Terrestrial Magnetic Field produced by the Oceanic Tides. 中央氣象臺彙報.

(1) Proceedings of the Royal Society. A, vol. 122, p. 369.