とおくと

$$x = -\frac{p_{001}}{p_{100}}t - \frac{p_{002} + 2Cp_{101} + C^2p_{200}}{2p_{100}}t^2, \quad C = -\frac{p_{001}}{p_{100}},$$

となる。本式における t 及 t^2 の係数は Petterssen が等圧線に對して與へた C 及 $\frac{4}{2}$ となる (荒川前掲論文公式 15)。

即ち Petterssen の公式と Angervo-荒川の公式とは同等であることがわかる。

註記 氣壓中心の徑路を圖式解法によつて出す方法を O. Dinkelacker (Met. ZS. 1933, S. 166-171) が發表した。近似的に言へば氣壓中心が t 時間後に達すべき位置は

$$x = -p_{101}t/p_{200}, \quad y = -p_{011}t/p_{020},$$

である。 p_{200} 及 p_{020} は夫々氣壓中心の曲率半徑 r_x 及 r_y の逆数である。氣壓變化の勾配を $\text{tg } \tau_x$ 及 $\text{tg } \tau_y$ で表はすと

$$x = -r_x \text{tg } \tau_x \cdot t, \quad y = -r_y \text{tg } \tau_y \cdot t$$

となり、天氣圖から計算出来る。圖式解法だと大局から見た平均を採ることになるから、具合がよい。又圖を用ひると誤が目立つから、過誤が少くなるといふ特長がある。

静振及び地表層振動の安定度に就いて*

櫻庭 信一

本文は内容上二部に別れる。第一編に於ては静振の安定度 (後述) の理論を述べ、理解に便ならしむる爲に關東大地震の際の地盤隆起に伴ふ東京灣の静振、及び室戸颱風通過の爲の異狀水位に伴ふ琵琶湖の長週期静振に就いて述べる所があつた。

第二編に於いては地表層振動に就いて述べる。即剛體の上に密着して振動する表面層の問題を取扱つた。

論文の主意は兩者とも全く同じもので、例へば前者に就いて云へば、非常に緩かな振動 (つまり長週期振動) はよく底部の僅かな深さ變化にもその振動が禍されて不安定に成り半定常的に恒久な振動を續行し得ないといふ事に盡きる。

後者に就いて云へば、只深さ變化が彈性率變化で置き換へられた丈けであるが、彈性率の空間變化に比して相對的に週期の長い自由振動は不安定になる爲に起り得ないといふ事になる。

第一編 静振の安定度に就て

第一編は曾つて筆者が「海と空」⁽¹⁾誌上に發表したものゝ補遺で、聊か實際問題にも觸れて解式の持つ意味を明瞭ならしめんとするものである。

* S. Sakuraba: On the Stability of Seiche and Free Oscillations of the Surface Layer of the Earth's Crust. 中央氣象臺彙報.

(1) 櫻庭信一: 静振の一問題, 海と空, 第十五卷第八號 (昭和十年八月)。

問題は其の場合 $+b \sim -b, 0 \sim a$ なる長方形の周邊に圍まれた湖海を考へ、深さ h は或方向 (例へば之を x 軸に選び) にのみ變化し、

$$h = h_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$$

の函数形を假定した。

然らば解は次式で與へられる。

$$\zeta = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} J_\nu \left\{ \frac{i n \pi a}{2b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\} \sin \left[\frac{n \pi y}{2b} + \frac{\pi}{4} \{1 + (-1)^n\} \right] \cdot e^{i \sigma t}.$$

茲に ζ は自由水面からの昇降で、 J_ν は ν 次の第一種圓壙函数、 ν は次の式で與へられる。

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\sigma^2 a^2}{g h_0}}.$$

σ は勿論振動數で、週期 T との間に

$$T = \frac{2\pi}{\sigma}$$

なる關係がある。

前論文で筆者の得た結果は、

$$\frac{1}{4} \geq \frac{\sigma^2 a^2}{g h_0}$$

の場合には安定な靜振が起り得ないが、

$$\frac{1}{4} < \frac{\sigma^2 a^2}{g h_0}$$

の關係を満足する時は安定な波が存在し得るといふのである。⁽¹⁾

然かも注目値する事は、median line の長さ a 及び最深點の深さ h_0 に依つて特性づけられる湖海の週邊に關する要素を除いては (g は重力に依る加速度で一定)、起る波自身に就いては安定度に關する限り週期にのみ依關するといふ事である。

上式の臨界條件を物理的に解釋すれば、非常に緩かな振動の波は僅かの底盆の傾斜でも能く効いて來て安定であり得なくなるといふ事である。

此の關係は、運動が全然 y 軸に無關係に行はれる時に於ても成立する事は次の様にして證明出来る。

基本方程式は一次元の夫れを採用して

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\}.$$

$h(x)$ の形として、前同様な函数形を假定すれば、解は容易に次式で與へられる。

$$\zeta = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2} + \nu} \cdot e^{i \sigma t}.$$

茲に ν は實數であり、積分常數は無視し、且

⁽¹⁾ 縦、横振動の fluid coupling に於いて y 方向の横振動は安定としても。

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\nu} \text{ の項を捨てたのは } [\zeta]_{x=a} \neq \infty$$

の境界条件に因る。即ち ν が實数の時には波が起り得ない事を上式は意味する。

$$\nu \text{ が虚数の時は解は } \zeta = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin\left\{\nu' \log\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right\}}{\cos\left\{\nu' \log\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right\}} \cdot e^{i\sigma'}$$

となり、明らかに安定な定常振動が存在する。

$$\text{茲に } \nu' = \sqrt{\frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} - \frac{1}{4}}.$$

二次元運動の場合と同じ結論に達した譯である。

諸理解に便ならしむる爲に實際問題と對比して見よう。

最近地震學教室の鈴木武夫氏は⁽¹⁾「大正 12 年 9 月 1 日の地震の際土地隆起に伴つて生じた東京灣の静振」と題して關東大地震の際の土地の隆起に伴つた静振に就いて興味深い研究を發表されてゐる。

横須賀及び千葉の驗潮儀に依れば、約 55 種の地盤隆起が認められる。

誘發された静振の週期は約 125 分、單節振動として見た median line の長さ約 53.8 杆、平均の深さ 15.7 米と云ふ。

現論文の結果を當てはめる事は甚だ亂暴ではあるが、大體の傾向を見るには勿論差支へない。

即其の静振發生の有無を決定する臨界條件として

$$\frac{1}{4} = \frac{\sigma^2 a^2}{gh_0} = \frac{4\pi^2 a^2}{gh_0 T^2}.$$

$$\text{書き直して } \frac{a^2}{T^2 h_0} = 6.206 \text{ C.G.S. } (g=980)$$

$$\text{茲に } a = 5.38 \times 10^6, \quad T = 7.5 \times 10^3$$

$$\text{と置けば } h_0 = 0.83 \times 10^7 \text{ cm.}$$

即最深のものとして 800 米位迄可能といふ事を示してゐる。

即ち鈴木氏の場合は流體力學的にも正しい事が證明された譯で、一見可成り緩やかと思はれる振動ではあるが、尙且之を不安定ならしむるには一層大きい深さの變化を必要とするものである。

第二の實例として震研の高橋龍太郎氏⁽¹⁾に依つて提唱された琵琶湖の静振の約 300 分の週期を持つものに就いて考へて見よう。

(1) T. Suzuki: Seiche in the Tokyo Bay caused by the Land Upheaval on the Occasion of the Great Earthquake of Sep. 1, 1923. Bull. Earth. Resear. Inst. 13 (1935).

(1) 高橋龍太郎: 昭和 9 年 9 月 21 日の颱風に依る琵琶湖の水位變化, 震研彙報別冊, 第 2 號 (昭和 10 年 5 月).

此の長週期の靜振は既に古くから注目された様に堅田以南の、琵琶湖の湖南部に現れるのが特色で、湖全體の基本振動とする説と湖南部のみの振動とする説とが相對峙してゐる様であるが、兎も角誘起された靜振そのものが急速に減幅する事から考へて摩擦が可成り利いて來て週期に影響してゐる事には間違ひない。

然かも湖全體の振動と考へる時は深さの變化が可成り急激な變化をしてゐるために、振動のモードは可成り不安定だらうといふ事は次の様に知られる。

今湖全體の median line として $a=60 \text{ km.}, T=300 \text{ 分}$

とおき、前同様の計算を施せば $h_0=1.79 \times 10^4 \text{ cm.}$

を得る。之は實測される琵琶湖の最も深い所の約 2 倍となつて居り、辛うじて上式の要求する流體力學的正鵠さを満足してゐる程度である。

但此の 300 分の週期のものが摩擦の影響に依つてもつと短週期のものが週期をのばされた結果とすれば、本來の此の式導入の關係上少しく疑問を伴ふ譯にはなる。

最近日高博士⁽¹⁾は波狀の海底を持つ湖海に起る靜振に就いて述べ、此の波長より長い振動の起り得ない事を理論的に證明した。

即此の結果と關聯して、非常にのろい振動を論ずる場合には海底の傾斜を無視して（現在の安定度の意義に於て）形式的に導いた週期なるものは可成り危險を伴ふ例のあり得る事を強調しておきたい。

（此の編昭和十年九月十九日脱稿）

第二編 地表層振動の安定度に就て

最近土地の自由振動、脈動等の問題に關聯して表層の自由振動、強制振動等の問題が理論的に取扱はれて來た。⁽²⁾又最近筆者⁽³⁾も不均質彈性體に起るラブ型波動に就いて論じ、緩かな週期の波は比較的僅かな彈性率の空間變化に對しても安定であり得なくなる事を證明した。

之は同様の論旨のもとに第一編に於て計算した、深さの變化する底盆を有する湖海に起る自由振動と同じものである。

最近の精密檢測結果からも明らかにされた様に、吾々が巨視的に地殻といふものを取扱ふ場合には假令かゝる事柄は問題にならないとしても、極く地表層附近では兎も角も可成り急激な擬似的彈性率變化が考へられるし、然かも下層の比較的硬い岩盤は上層のものに對して殆んど剛體として取扱つて大差ない（之は勿論分散曲線等を論ずる際には看過出來ないとしても）やうな場合も考へら

(1) 日高孝次：海靜振と海底の地形，科學（昭和十年八月）。

(2) 妹澤，西村，飯田等の諸氏に依る計算。

(3) S. Sakuraba: A Contribution to the Theory of the Love Waves propagating over a Semi-infinite Solid Body of Varying Elasticity. Geophys. Mag. 9 (1935).

れる。

かゝる弱層が弾性學的に如何なる意味を持つかの議論は暫くおいて、以降惹起される振動の安定度如何といふ事を主眼として考察を進めよう。

諸原點を地表に持つ直交座標を考へて、 z 方向を地表内に取り、然かも z にのみ依關する一次元運動を考へれば運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

茲に u, v, w は勿論 x, y, z 方向の分變位で、 λ, μ は Lamé の常數である。

方程式は同形であるから、今後第一式のものに就いて考へる。

今
$$\mu = \mu_0(1 + \sigma z)^n \dots \dots \dots (2)$$

なる函数形を假定する。

然らば解は圓壙函数 (但し $n \neq 2$) で與へられる。

$$u = (1 + \sigma z)^{\frac{1-n}{2}} \left[A J_{\frac{1-n}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} (1 + \sigma z)^{\frac{2-n}{2}} \right\} + B Y_{\frac{1-n}{2-n}} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} (1 + \sigma z)^{\frac{2-n}{2}} \right\} \right] \cdot e^{i p t} \dots \dots \dots (3)$$

茲に A, B は積分常數で
$$v_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho} \dots \dots \dots (4)$$

の關係にある。 $n=2$ の場合は解は簡単な函数で與へられて振動の性質を調べる事は比較的簡單であるから、先ず此の場合から始める。

即
$$u = \mu_0(1 + \sigma z)^2 \dots \dots \dots (5)$$

の時は、時間の項を考へないで

$$u = A(1 + \sigma z)^{-\frac{1}{2} + \nu} + B(1 + \sigma z)^{-\frac{1}{2} - \nu}, \dots \dots \dots (6)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^2}{v_0^2 \sigma^2}} \dots \dots \dots (7)$$

境界條件として

$$\left. \begin{aligned} [u]_{z=H} &= 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

つまり深さ H の所で剛體に密着してゐる場合である。

先ず第一に
$$\frac{1}{4} \geq \frac{p^2}{v_0^2 \sigma^2} \dots\dots\dots (9)$$

とすれば、 ν は實數となり、境界條件に依り自由振動の週期を決定する方程式として

$$(1+\sigma H)^{2\nu} = \frac{-\frac{1}{2} + \nu}{-\frac{1}{2} - \nu} \dots\dots\dots (10)$$

を得る。

$(1+\sigma H)$ は正にして 1 より大、 ν は正なる事を考慮に容れれば、此の (10) 式が實根を持たない事は容易に了解される。

$$\frac{1}{4} < \frac{p^2}{v_0^2 \sigma^2} \dots\dots\dots (11)$$

の時は特性方程式は
$$\tan \left\{ \eta \log (1+\sigma H) \right\} = \frac{\eta}{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (12)$$

$$\nu = i\eta \dots\dots\dots (13)$$

で與へられ、明らかに無数の實根を有する。上述の結果を一口に云へば、弾性率の空間的に比較的急激に変化してゐる層の中には緩やかな振動の波は起り得ないといふ事である。

今理解の爲に、一例として

$$v_0 = 200 \text{ m/sec}, \quad T = 10 \text{ sec.}$$

と置けば、波の發生の臨界條件たる

$$\frac{1}{4} = \frac{4\pi^2}{T^2 v_0^2 \sigma^2}$$

に上の數値を入れて

$$\sigma = 6.28 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

を得る。

扱

$$(1+\sigma H)^2 \doteq 1+2\sigma H$$

として考へれば次の事が云へる。

即、地表横波速度 200 m/sec (極く地表層では大體此の値をとる事は最近の精密測定結果からも明らかである) の地表層の中に週期 10 秒の自由振動が發生し得る爲には、深さ約 80 米で剛性率が地表のその 2 倍になる程度以上の急激な剛性率變化があつてはいけないと云ふ事になる。

諸次に $n=2$ ならざる一般の場合に移らう。特性式は前と同様にして

$$\frac{J_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} (1+\sigma H)^{\frac{2-n}{2}} \right\}}{Y_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} (1+\sigma H)^{\frac{2-n}{2}} \right\}} = \frac{\frac{1-n}{2} J_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} \right\} + \frac{p}{v_0 \sigma} J'_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} \right\}}{\frac{1-n}{2} Y_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} \right\} + \frac{p}{v_0 \sigma} Y'_{1-n} \left\{ \frac{2}{2-n} \frac{p}{v_0 \sigma} \right\}}.$$

之は一般にあまり簡單でない。

$n=1$ とおけば

$$\frac{J_0 \left\{ \frac{2p}{v_0 \sigma} (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \right\}}{Y_0 \left\{ \frac{2p}{v_0 \sigma} (1 + \sigma H)^{\frac{1}{2}} \right\}} = \frac{J_0' \left\{ \frac{2p}{v \sigma} \right\}}{Y_0' \left\{ \frac{2p}{v_0 \sigma} \right\}}$$

となつて、此の場合は比較的簡単に $\frac{2p}{v_0 \sigma} \leq 1^{(1)}$

の時は兎も角も實根を持たなく $\frac{2p}{v_0 \sigma} > 1$

のある點に於ては實根の無數に存在する事が解る。一般の場合には證明困難を覺えるが、類似の結果が期待される筈である。
(此の編昭和十年九月三十日脱稿)

附 記

如上の結果は、但し嚴密には不均質層内に於てのみ成立するもので、例へば均質な層と連なる様な場合には可成り上の結果は修飾されなければならぬ。之は次の様にして證明される。

今地表に原點を取り第一層（不均質層）の厚さ H_1 、第二層（均質層）の夫れを H_2 とすれば運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \dots \dots \dots \text{(第一層)}$$

$$0 \leq z \leq H_1$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \dots \dots \dots \text{(第二層)}$$

$$H_1 \leq z \leq H_2$$

で、茲に

$$\mu_1 = \mu_0 (1 + \sigma z)^2.$$

解は

$$\frac{1}{2} \geq \frac{p}{v_0 \sigma} \quad v_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho}$$

の場合を考へる事にして

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A(1 + \sigma z)^{-\frac{1}{2} + \nu} + B(1 + \sigma z)^{-\frac{1}{2} - \nu}, \\ u_2 &= C \sin \frac{p}{v_2} z + D \cos \frac{p}{v_2} z. \end{aligned} \right\}$$

時間の項 $e^{i p t}$ は簡單の爲除いて考へる。

境界條件として

$$\left. \begin{aligned} \left[\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right]_{z=0} &= 0, \\ [u_1]_{z=H_1} &= [u_2]_{z=H_1}, \\ \left[\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right]_{z=H_1} &= \left[\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right]_{z=H_1}, \\ [u_2]_{z=H_2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(1) G. N. Watson: Theory of Bessel Functions (1922), pp. 477-521 参照の事.

之より週期を決定する式として

$$\frac{p}{\sigma v_2} \tan \frac{p}{v_2} (H_2 - H_1) = \frac{1}{1 + \sigma H_1} \frac{\left(-\frac{1}{2} + \nu\right) + \left(\frac{1}{2} + \nu\right)(1 + \sigma H_1)^{2\nu}}{(1 + \sigma H_1)^{2\nu} - 1},$$

$$v_2^2 = \frac{\mu_2}{\rho}.$$

之は明らかに實根を有する。

即下層の固有振動週期に影響されるからであらう。

大氣擾動の安定度に就て*

櫻庭 信一

§1. 緒言

茲に大氣擾動の安定度と題して論じてあるが、内容は別して二部門に分れる。第一には傾度風と地表風との特殊な關係に依つて生じ得べきものと推察するゝ渦動運動の安定度に就て述べる。附けたりとして筆者に依つて最近發表された、特殊な渦度傳播様式の場合に於て生ずる横抵抗（藤原博士等の所謂横粘性係數に依て特性づけられる横抵抗と本質的に同じもの）を伴ふ渦運動が *equi-partition* の立場から見て安定か不安定かの一解釋を試みた。

第二には大氣成層の安定度に就て述べてある。所謂此の種の安定度を示す目安として従來考へられて來たのは空氣の斷熱變化遞減率で (the *adiabatic lapse-rate*) で約 $9.89 \times 10^{-5} \text{C per cm.}$ に相當する。然し實際問題として *Aerologie* に依る上層溫度觀測を調べて見ると、一杆内外の比較的大氣の下層に屬する部分に於ては比較的稳定と見做さるる大氣の状態に於てすら *super-adiabatic lapse-rate* の例を屢々發見する。

此の説明の一つの有力なる解釋として *Rayleigh, Low, Jeffreys*, 小平, 最近では *Hales* 等に依つて發展された粘性流體の運動學的熱平衡理論を用いた。即ち此の論旨を是認するときは、大氣下層に於ては擾亂が發達して粘性流體の性質を多分に持つ場合に於ては *adiabatic lapse-rate* は大氣成層の安定度を示す目安となり得ない事となる。

§2. 渦度傳播擾動運動の一型式に就いて

筆者は屢々渦度傳播論が大氣の實際現象に如何に應用されるかに就いて述べて來たが、最近の論

* S. Sakuraba: On the Stability of Eddy Motion and Stratification of the Atmosphere. 中央氣象臺彙報.