尙ほ以上の様に單に一つの分値のみとつて二箇所と比較することは、振動が單絃振動的に起つて居る時は問題はない。併し振動が橢圓振動だとすると、⁽¹⁾ その橢圓の長軸の方向が兩地で異なれば、長軸の端から同時に振動が始まるものとして、上の様に一分値のみとつて比較した場合には當然極値の起時に差が起こる。斯様な事も將來は十分考慮されねばならぬ。

地上屈折に就いて*

川 畑 幸 夫

§1. 微分方程式及び其の變形

等密度面を地心 C を中心とする同心球とすれば屈折の微分方程式は通常の如く

$$dR = -\frac{d\mu}{\mu} \tan z \dots\dots\dots (1)$$

地球の扁率は地上屈折に於ては影響を有しないことは F. R. Helmert の證明したところである。

地上屈折では dR を求めるよりも高さの變化 $dh(=dr)$ を求める方が便利なる場合が多いから (1) を變形する。

微分三角形 CPP' に於て $CP=r$ とかけば

$$dh \equiv dr = r d\gamma \cot \varphi' \dots\dots\dots (2)$$

然るに一般に $\mu r \sin z = \text{const}$ であるから、觀測點 P_1 に於ける値を傍符 1 であらはすと、光路の任意の一點に於て

$$\mu r \sin z = \mu_1 r_1 \sin z_1 \dots\dots\dots (3)$$

(2) に於て φ' の代りに z とおき之を (3) に代入すると

$$dr = r \frac{\sqrt{\mu^2 r^2 - \mu_1^2 r_1^2 \sin^2 z_1}}{\mu_1 r_1 \sin z_1} d\gamma \dots\dots\dots (4)$$

之はラプラスが既に求めた式である。

(4) を積分するためには μ が r の函数としてわかればよい。更に左邊を dr のままで積分したいのであるから右邊を先づ γ の函数としてあらはさう。Taylor の定理により

(1) 一般に地磁氣、地電流の脈動は橢圓振動である。

* Y. Kawabata: On the Terrestrial Refraction. 中央氣象彙報.

第 1 圖

$$r = r_1 + \frac{1}{1} \left(\frac{dr}{d\gamma} \right)_1 \gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 r}{d\gamma^2} \right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d^3 r}{d\gamma^3} \right)_1 \gamma^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{d^4 r}{d\gamma^4} \right)_1 \gamma^4 + \dots \quad (5)$$

$$(2) \text{ から } \quad \frac{dr}{d\gamma} = r \cot z$$

$$\frac{d^2 r}{d\gamma^2} = \cot z \frac{dr}{d\gamma} - \frac{r}{\sin^2 z} \frac{dz}{d\gamma}, \text{ etc}$$

然るに $dz = dR - d\gamma$ とおき得るから

$$\frac{dz}{d\gamma} = - \left(1 - \frac{dR}{d\gamma} \right) = - \left(1 - \frac{dR}{d\mu} \frac{d\mu}{d\gamma} \right)$$

今

$$\frac{dR}{d\mu} \frac{d\mu}{d\gamma} = \kappa, \quad \frac{d\kappa}{dh} = \kappa', \quad \frac{d^2 \kappa}{dh^2} = \kappa'' \quad \dots \dots \dots (6)$$

とおけば

$$\frac{dz}{d\gamma} = -(1 - \kappa)$$

$$\frac{d^2 z}{d\gamma^2} = r \cot^2 z + \frac{r(1 - \kappa)}{\sin^2 z}$$

$$\frac{d^3 z}{d\gamma^3} = r \cot^3 z + \frac{r \cot z}{\sin^2 z} (1 - \kappa)(5 - 2\kappa) - \frac{r^2 \cot z}{\sin^2 z} \kappa'$$

$$\frac{d^4 z}{d\gamma^4} = r \cot^4 z + \frac{r \cot^2 z}{\sin^2 z} (1 - \kappa)(18 - 16\kappa + 4\kappa^2)$$

$$+ \frac{r}{\sin^4 z} (1 - \kappa)^2 (5 - 2\kappa) - \frac{r^2 \cot^2 z}{\sin^2 z} (11 - 6\kappa) \kappa'$$

$$- \frac{r^2}{\sin^4 z} (1 - \kappa) \kappa' - \frac{r^3 \cot^2 z}{\sin^2 z} \kappa''$$

etc.

となるから之を (5) に代入し、且つ實際の場合には γ は 0.01 を超えること無く又 z_1 は 81.5° より常に大なるを以て r の誤差が 1 cm 以下は許さるゝときは

$$\frac{r - r_1}{r_1} = \cot z_1 + \frac{1}{2} \left(\cot^2 z_1 + \frac{1 - \kappa_1}{\sin^2 z_1} \right) \gamma^2$$

$$+ \frac{1}{3} \left\{ \cot^3 z_1 + \cot z_1 (1 - \kappa_1)(5 - 2\kappa_1) - \frac{r_1 \cot z_1}{\sin^2 z_1} \kappa_1' \right\} \gamma^3$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ 5 - \frac{r_1 \cot^2 z_1}{\sin^2 z_1} (11 - 6\kappa_1) \kappa_1' - \frac{r_1}{\sin^4 z_1} (1 - \kappa_1) \kappa_1' - \frac{r_1^2 \cot^2 z_1}{\sin^2 z_1} \kappa_1'' \right\} \gamma^4$$

$$+ \text{higher terms} \quad \dots \dots \dots (7)$$

とかける。そこで問題は要するに κ を γ 或は h の函数としてあらはし得ればよいことになる。然るに (1) と (2) で (6) の κ の式を變形すれば

$$\kappa = -\frac{r}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \dots\dots\dots(8)$$

となる。μ は密度の函数であり、これは又温度、氣壓並びに水蒸氣張力の函数と見做し得るから結局高さ h の函数である。それ故に κ を z_1 と h の函数としてあらはし、同時に (7) の γ も z_1 と h の函数としてあらはすのが便利である。(7) に用ふべき γ の算定は測地學的に極めて困難であるからである。

この變形を行ふ前に先づ κ', κ'' のかゝつた項の大きさを調べるために κ の式を求める。

§2. 大氣温度及び壓力の函数としての κ

c を常數とし、 ρ を大氣の密度とすれば $\mu^2 - 1 = 2c\rho$ であるから

$$\mu^2 - 1 = (\mu_0^2 - 1) \frac{\rho}{\rho_0}$$

然るに $\rho = \frac{p}{RT}$ であるから上式は

$$\mu^2 - 1 = (\mu_0^2 - 1) \frac{pT_0}{p_0T}$$

となる。之を對數的に微分し (8) に代入し、且つ又 $\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{g}{RT}$ なる關係を代入すれば

$$\kappa = \frac{r}{2} \frac{(\mu_0^2 - 1) \frac{pT_0}{p_0T}}{1 + (\mu_0^2 - 1) \frac{pT_0}{p_0T}} \left(\frac{g}{R} + \frac{dT}{dh} \right) \frac{1}{T}$$

空氣が水蒸氣を含む場合には f を水蒸氣の壓力とすれば R は變じて $R' = R \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right)^{-1}$ とならなければならないから

$$\kappa = \frac{r}{2} \frac{(\mu_0^2 - 1) \frac{pT_0}{p_0T}}{1 - (\mu_0^2 - 1) \frac{pT_0}{p_0T}} \frac{1}{T} \left\{ \frac{dT}{dh} + \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right) \frac{g}{R} \right\}$$

こゝに用ふべき r は觀測點から視準點方向にいたる平均曲率半徑をとる。今單位はすべて米突で測り、重力は通常の如く緯度 45° の海面上の値を標準とし、又 μ_0 を各色の平均 1.000293 ととれば

$$\kappa = 0.000293 \frac{\frac{273}{760} \frac{p}{T^2}}{1 - 0.000293 \frac{273}{0.760} \frac{p}{T}} \left\{ \frac{dT}{dh} + \frac{273 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right)}{7993} \left(1 - 0.00265 \cos 2B - \frac{2h}{r+h} \right) \right\} r$$

吾々の場合 B を平均 35° にとり、又地上屈折に於ては $\frac{2h}{r+h}$ は極めて小さいから之を省略すると上式は

$$\kappa = 0.000293 \frac{\frac{273}{760} \frac{p}{T^2}}{T^2 \left(1 - 0.000293 \frac{273}{0.760} \frac{p}{T} \right)} \left\{ \frac{dT}{dh} + \frac{273 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right)}{8000} \right\} r \dots\dots\dots(9)$$

この簡略のために何等の誤差を生じないことは次の如くして容易に證明することが出来る。

§ 3. 地上屈折の概算

近似的に $d\gamma = \frac{\tan z_1}{r+h_0} dh$ であるから

$$R = \int_0^{\gamma} \kappa d\gamma \div \tan z_1 \int_{h=h_0}^h \frac{\kappa}{r} \left(1 - \frac{h_0}{r} + \dots\right) dh \dots\dots\dots (10)$$

ここに用ふべき κ は (9) に於て分母の $1 - 0.000293 \frac{273}{0.760} \frac{p}{T^2}$ を 1 とおき、
 p, T, f は地上 11 km 以下の標準大氣の値

$$\left. \begin{aligned} p &= 760 \left(1 - \frac{0.0065}{288} h\right)^{5.251} \\ T &= 288 \left(1 - \frac{0.0065}{288} h\right) \\ f &= f_0 e^{-\frac{h}{2736}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

にとれば $B=35^\circ$ の平均曲率半径 r に對し

$$\kappa = [0.7881](1-ch)^{3.251} \left\{ 0.0286 - 0.0000168 \frac{f_0 e^{-\frac{h}{2736}}}{(1-ch)^{5.251}} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。但し f_0 は平均海水面に於ける水蒸氣張力であり、又 c は簡單のために $c = \frac{0.0065}{288}$ とおいてある。[$\cdot$] は常用對數である。今 $f_0 = 7$ mm と假定すれば

$$\kappa = [9.2445_{-10}](1-ch)^{3.251} - [6.8636_{-10}]e^{-\frac{h}{2736}}(1-ch)^{-2.251}$$

$(1-ch)^m$ を級數に展開すれば $ch < 1$ 即ち $h = 44$ km 以下では收斂する。實際には h は 4 km を超えることなき故其の收斂度は相當に高い。上式によつて κ を計算して見ると標準大氣に對し第 1 表の如くなる。

上式の第二項は第一項に較べて極めて小さいから之を省略し、初項だけをとつて (10) に代入し地上屈折の概算値を求めると

$$R'' = \rho'' \frac{\left(1 - \frac{h_0}{r}\right)}{r} \tan z_1 \int_{h_0}^h [9.2445_{-10}](1-ch)^{3.251} dh \\ \div [7.7548_{-10}]' (h-h_0) \{1 - 0.0000368(h+h_0) + \dots\} \tan z_1$$

in meters

第 1 表	
高 さ	κ
$h = 0^m$	0.175
1000	0.162
2000	0.150
3000	0.139
4000	0.129

第 2 表				
z_1	81°	83°	85°	87°
h				
1000 ^m	35''	65''	100''	120''
2000	45''	85	125	160
3000	65''	120	175	220
4000	105''	200	290	370

第 2 圖

之によつて地上屈折の大體の有様は第2表の如くなる。但し $h_0=0$ とする。 $\frac{2h}{r+h}$ を棄却せるため生ずる誤差は上表の約 10^{-17} であり、又 (9) に於て分母の $1-0.000293 \frac{273}{760} \frac{p}{T^2}$ を1とおきたるために起る誤差は上表の 3×10^{-4} であるから z_1 が 87° を超えない限り、現今の最良の器械の精度に於ても

$$\kappa = 0.000293 \frac{273}{760} \frac{p}{T^2} \left(\frac{dT}{dh} + \frac{273 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right)}{8000} \right) r \dots\dots\dots (13)$$

とおいて何等の誤差を生じない。

§4. κ' 及び κ''

(12) を h について微分し κ' 及び κ'' の式を求め之を實際の場合に適用して見ると第3表を得。之によつて見るに κ' は約 10^{-5} の量で又 κ'' は 10^{-9} の量である。そこで §2 に立ちかへつて (7) を簡単にすることが出来る。

第 3 表

h	κ'	κ''
0 ^m	-1.26×10^{-5}	5.7×10^{-10}
1000	-1.21 "	5.9 "
2000	-1.15 "	5.9 "
3000	-1.10 "	5.9 "
4000	-1.06 "	5.8 "

§5. r による展開

(7) によつて求めたる r の誤差を 1 cm 迄許すものとすれば

$$\begin{aligned} \frac{r-r_1}{r_1} = & \frac{1}{1} \cot z_1 \gamma + \frac{1}{2} \left(\cot^2 z_1 + \frac{1-\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right) \gamma^2 \\ & + \frac{1}{3} \left\{ \cot^3 z_1 + \cot z_1 (1-\kappa_1) (5-2\kappa_1) - \frac{r_1 \cot z_1}{\sin^2 z_1} \kappa_1' \right\} \gamma^3 \\ & + \frac{1}{4} \left\{ 5-r_1(1-\kappa_1)\kappa_1' \right\} \gamma^4 \\ & + \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

これから γ を h の函数として漸近似法で求める。先づ第一近似として

$$\gamma = \frac{r-r_1}{r_1 \cot z_1}$$

として之を (14) の第二項に代入し、より精確な値を求め順次斯くの如くして 第四近似を求めると

$$\left. \begin{aligned} \gamma = & \sum_{m=0} (-1)^m \frac{r_1^{2m+1}}{2^m (r_1 \cot z_1)^{2m+1}} a^m \left(\frac{r-r_1}{r_1} \right)^{m+1} \\ \text{但し} \quad & a_0 = 1 \\ & a_1 = \cot^2 z + \frac{1-\kappa_1}{\sin^2 z_1} \\ & a_2 = 2 \left(\cot^2 z + \frac{1-\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right)^2 - \frac{2 \cot^2 z_1}{3} \left\{ \cot^2 z_1 + (1-\kappa_1) (5-2\kappa_1) - \frac{r_1 \kappa_1'}{\sin^2 z_1} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$a_3 = 5 \left(\cot^2 z_1 + \frac{1-\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right)^3 - \frac{10 \cot^2 z_1}{3} \left\{ \cot^2 z_1 + (1-\kappa_1)(5-2\kappa_1) - \frac{r_1 \kappa_1'}{\sin^2 z_1} \right\} \\ \times \left(\cot^2 z_1 + \frac{1-\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right) + \frac{\tan z_1}{3} \{ 5 - r_1(1-\kappa_1) \kappa_1' \}$$

第五項は $z_1 = 87^\circ$ に於ては明かに 10^{-6} 以下であるから屈折には 0.01 臺の影響をもつだけであるから上式の $\sum$ に於ける m の上限は $m=3$ において充分である。(15) を微分すれば

$$d\gamma = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+1)r_1^{2m}}{2^m(r_1 \cot z_1)^{2m+1}} a_m \left(\frac{r-r_1}{r_1} \right)^m dr \quad \dots\dots\dots (16)$$

(16) に於ける $\left(\frac{r-r_1}{r_1} \right)^m$ の係数はすべて観測に固有な常數であつて、観測値からだけで求まる。一見發散に見えるが實は然らずして $r-r_1$ が 4 km を超えず γ も亦 0.01 を超えないから可成りいゝ收斂級數である。従つて地上屈折の一般式はこれ等の條件のもとに

$$R = \rho'' \int_{h_0}^h \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{0.000293 \frac{273}{760} \frac{p}{T^2} \left\{ \frac{dT}{dh} + \frac{273 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{f}{p} \right)}{8000} \right\} (m+1) r_1^{2m}}{2^m (r_1 \cot z_1)^{2m+1}} a_m \left(\frac{r-r_1}{r_1} \right)^m r dr \quad \dots\dots\dots (17)$$

で與へられる。 $p, T, f, \frac{dT}{dh}$ 等は何れも高さの函數と考へる。

§ 6. 大氣の標準狀態に對する地上屈折

$R = \rho'' \int_{h_0}^h \kappa d\gamma$ であるから、 $d\gamma$ に (16) を、 κ に (12) を用ひると、氣壓 760 mm 、絶對溫度 273°C 、氣溫遞減率 0.0065°C/m の標準狀態に對し、

$$R = [1.7744n]'' \tan z_1 \times \left[\begin{aligned} & a_0(1-ch)^{4.251} \\ & - [7.121_{-10}] a_1 \{ 5.251(1-ch)^{4.251} ch + (1-ch)^{5.251} \} \tan^2 z_1 \\ & + [4.292_{-10}] a_2 \{ (5.251)(6.251)(1-ch)^{4.251} (ch)^2 + 2(6.251)(1-ch)^{5.251} ch \\ & \quad + 2(1-ch)^{6.251} \} \tan^4 z_1 \\ & - [1.449_{-10}] a_3 \{ (5.251)(6.251)(7.251)(1-ch)^{4.251} (ch)^3 \\ & \quad + 3(6.251)(7.251)(1-ch)^{5.251} (ch)^2 \\ & \quad + 6(7.251)(1-ch)^{6.251} ch + 6(1-ch)^{7.251} \} \tan^6 z_1 \\ & + [7.037_{-10}] (1.14 + 5 \times 10^{-5} h) e^{-\frac{h}{2736}} \end{aligned} \right]_{h_0}^h \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。この結果は一見複雑に見えるけれども實際に當つて計算して見ると、 $r-r_1$ も γ も多くの場合こゝに假定した値より遙かに小さい場合が多いから上式の初めの一二項を残し他は殆んど利かない。しかも上式は單に觀測點に於ける見掛けの天頂距離 z_1 と κ_1 のみできまるから、之を表しに

て作製しておけば少しも面倒は無いと思はれる。たゞ問題は h であるが、之は (18) の初項だけをとつて屈折を求め観測角を修正し、然る後光路は直線をなすものとして計算しても差支へない。特別に屈折が大きいときは今求めた値を用ひ、第二項までとつて R の第二近似を使へばよい。 κ_1 は観測點に於ける p, T, f, β の函数であるから、任意の場所に於ける地上屈折は上記の標準大氣の場合の値を R_0 とし之に加ふべき修正量を求めても差支へないが、たゞそうした場合には餘り高い點での観測に利用出来ない憾みがある。矢張り (17) によつて求めなければならない。

z_1 が 87° を越えると級數の收斂度は著しく低下する。實際の場合にはこれが一番大事なわけではあるがこの様に地上近くの視線に對しては、密度が不規則になるから更に困難であつて光路の近傍で同様な測定が相當多數にあることを要する。

§7. 屈折異常

大氣の分布が今まで考へて來た様な標準状態に無い場合屈折にどんな異常が生ずるかを次の極めて簡単な二つの場合について考へて見る。

(a) 氣温遞減率が $\Delta\beta$ だけ變化した場合

此の場合の地上屈折の異常を ΔR とすれば

$$\Delta R = [1.336]'' \tan z_1 \Delta\beta \int \frac{p}{T^2} dh$$

[$''$] は前と同様に常用對數である。 ΔR は何れ小さい量であるから p, T は標準状態の式を代入しても差支へない。

$$\Delta R = [9.301_{-10}]'' \tan z_1 (h_2 - h_1) \Delta\beta$$

今之を例へば三島から富士山頂を觀測した場合に適用して見ると大體第4表の様になる。即ち遞減率が1杆につき 0.01°C 變化しただけで此の例の場合には $6''$ の異常がなければならない。實際に起り得る場合は γ も $h_2 - h_1$ も之よりずつと小さい場合が殆んど大部分であるから勿論もつと小さい量ではあるが然し決して觀測にあらはれて來ない程小さくはない。觀測の結果にあらはれる屈折異常は、この外に、 p, T, f の變化から生ずるものをも含むから、單に其の結果から遞減率を言々することは許されないけれども、之等の量を適當なる一次式で組合はして最小二乗法でそれらの變化を求めることは、勿論別に多少の追加觀測は必要とするが、理論的には必ずしも不可能ではない。

第 4 表

$\beta(\text{deg/m})$	$\Delta R''$
0.0065	0.0
64	0.7
63	1.3
62	2.0
61	2.6
60	3.0
59	4.1
58	4.6
57	5.3
56	6.0
55	6.6

(b) 等密度面が一様に ν だけ傾いた場合

この場合には (1) の z の代りに眞の入射角 z' を用ひればよい。光路の line element を $d\sigma$ と

すれば

$$dR = -\frac{d\mu \sin z'}{\mu dr \cos v} d\sigma$$

然るに $d\sigma = \frac{r dy}{\sin z'}$ となるから之を上式に代入すると

$$dR = -\frac{r dn}{\mu dr} dy \left(1 + \frac{v^2}{2} + \dots\right) = R_0 \left(1 + \frac{v^2}{2} + \dots\right)$$

R_0 は等密度面が傾いてゐない時の値をあらはす。之によつて $\frac{v^2}{2} R_0$ を計算して見ると第5表を得。

第 5 表

R v	100'	200'	300'	400'	500'	1000'	2000'
1°	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.20	0.40
2°	6	12	18	24	30	60	1.20
3°	14	28	42	56	70	1.40	2.80
4°	25	50	75	1.00	1.25	2.50	5.00
5°	39	78	1.04	1.60	2.00	3.90	7.80

これによつて見るに等密度面の傾斜することに起因する量は極めて小さいものであることがわかる。

§8. 結 尾

地上屈折は天頂距離が 87° を超えず、二點の距離が 64 km を越えず比高が 4 km 以下の場合には (17) を以て計算せられる。式中の a_m は (15) で與へられる。特に標準大氣 (11) に對しては f_0 を 7 mm とすれば (18) で計算せられる。これを微分して通常の大體濛氣差の如く凡ゆる他の場合は之が補正として計算することも不可能ではないがあまり役に立たない。

屈折の異常は一二の簡單な例を以てしても無視することは出来ない。従つて現在測地學的觀測の結果には相當の修正が加へらるべきである。この他にも修正すべき多くの原因はあるが氣象學的影響も決して見逃してはならない。

高空に於ては濛氣差に關する限り大氣は殆んど安定なるものと考へて差支へないであらうから低高度に於ける天體濛氣差の異常も又上式で與へられると言つても過言ではあるまい。

次の問題は上式を實際の場合に適用し現在の地球變動の結果を修正することである。水平の移動に關しては改めて水平屈折の公式を誘導しなければならない。異常なる水平屈折が常に觀測せらるゝにも拘らず大地測量に適用すべき水平屈折の理論は未だ存在しないのである。