空の様子は將來上空の観測が確立した時に可能になり、現在の所はまづ此の位の所で我慢するより外は無いであらう。

さて、此れで各高度に於ける温度遞減率が知れた故、地上の温度から各高度に於ける気温を勘定する事が出来る。此れは大體第2表の如くなる。

第 2 表

高 度	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 km
氣 計算	14	6	-2	-9	-15	-19	-23	-26	-29	-31	-33°C
溫 實測	14	8	2	-2	-9	-15	-20	-27	-32	-39	-46°C

次に此の結果をエムデン其の他の輻射平衡に依る結果と比較して見るとまだ充分とは云へないが在來のものよりはるかに良くなつた事がわかる。(第3圖)

§6. 結 尾

以上在來とは稍異なつた方法で大氣中の熱の移動を論じ、實測と比較して略満足し得る結果を得た。なほ以上の常數の決定にあたり實測と一致する様に定めた故合ふのが當然と云ふ非難があるかも知れない。しかしかくして定めた値はすべて他の方法で確かめてある故此の非難はあたらない。又實測と比較して多少の差の出る事もあるが、此れは出るのが當然である。即ち對流等の如きも全く略したが、實際には此れが随分大きい。將來は是非共入れなければならない。又現在の如き方法の應用は此ればかりでなく、まだまだ多くある。それらについても言及したいのであるが長くなる故一應此處で筆を置き稿を改めて論ずる豫定である。

流體力學の基礎方程式に就いて (第二報)*

増 山 元 三 郎

1. 緒 言

第一報 (本誌、第二輯、第十五卷、第六號二百十五頁以下) に於いて筆者は從來の流體力學の使用

* M. Masuyama: Pri ekvacioj hidrodinamikaj fundamentaj (la 2-a raporto), 中央氣象臺彙報

して居る假定の一つとして、流体内の任意體積を全くその中に含む正立方體の一邊の長さを L とするとき、“ $\lim_{L \rightarrow 0}$ が物理的に意味がある” を挙げ、この假定は實際成立しないと考へられることを指摘した。以下の數節は $\lim_{L \rightarrow 0}$ の合理化を電磁力學と流體力學との類似性から出發して考察しそれから導かれる二三の結果を述べようとするものである。

2. 質量保存則

先づ古典的に出發し、流體は完全な連續體とする。Euler 流に取扱ひ、流体内の一點 P で時刻 t に於ける流速を $\mathbf{V} = \mathbf{V}(P, t)$ とし、その點に於ける密度を $\rho = \rho(P, t)$ とすれば、質量保存則は

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (1)$$

上に用ひた假定“完全な連續體”の意味は、 $\rho, \mathbf{V}$ の時 t , 所 P に関して適當な階數迄連續微分可能性を意味するものと解する。

ベクトルの場に関する Helmholtz の定理⁽²⁾に従へば、場のベクトル(ベクトル點函數)が適當な連續微分可能性を有するならば、一般に勾配の場と轉回の場との重なりとして表しうる。即ち流體を流速 $\mathbf{V}$ のベクトルの場と見ると

$$(2.2) \quad \mathbf{V} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

$\mathbf{V}$ がその微係數を含めて一價連續有限ならば

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

の條件を加へると、 $\mathbf{V}$ から $\phi, \mathbf{A}$ は一意に定まる。但し $\mathbf{V}$ は流体内では有限であり、その外では勿論至るところ零である。

以下簡單の爲め次の如く略記する。

$$(2.3) \quad \mathbf{H} \equiv \nabla \times \mathbf{A}.$$

3. 波動方程式の導來

量子力學で確率波に関して (2.1) と全く同形の式が成立する。之を逆に利用する。⁽³⁾ 今

$$(3.1) \quad \rho = \alpha uv, \quad \phi = \frac{1}{\beta} \log \frac{v}{u}; \quad \alpha, \beta = \text{const.}$$

と置き、之等を (2.1), (2.2) に代入すれば

$$u \left(\frac{1}{\beta} \nabla^2 v + \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \nabla v \right) - v \left(\frac{1}{\beta} \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \nabla u \right) = 0$$

従つて U を或る未知函數として

(1) 擴散の如く $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{A}) = D \nabla^2 \rho$ ($\mathbf{A}$ は擴散速度, D は擴散恒數で $D \neq 0$) の場合は以下の方法は成立たない。 (2) 例へば M. Lagally: Vorlesungen über Vektor-rechnung, 1928, 160 頁以下。

(3) も少し一般的な置換法は, A. Buhl: Mém. Sci. Phys. Fasc. 34, 1937. p. 48 を参照。

$$(3.2) \quad \begin{cases} \beta \frac{\partial u}{\partial t} = \Pi u, \text{ 但し } \Pi \equiv \nabla^2 - \beta \mathbf{H} \cdot \nabla + U^{(1)} \\ -\beta \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\Pi} v, \text{ 但し } \bar{\Pi} \equiv \nabla^2 + \beta \mathbf{H} \cdot \nabla + U. \end{cases}$$

(3.2) は變數分離法で解きうる.

今 (3.21) 式で

$$(3.3) \quad \beta \equiv i \frac{4m\pi}{h}, \quad \mathbf{H} \equiv -\frac{e}{mc} \mathbf{A}^{(2)}, \quad U \equiv -\frac{8\pi^2 e \varphi m}{h^2}$$

と置けば, (3.21) は電磁場内での一電子の運動を表す Schrödinger の波動方程式⁽³⁾と全く一致する. この場合 (3.22) は (3.21) 式の複素共軛式と成る.

今後簡単の爲め (3.21), (3.22) 式を波動方程式と呼ぶ.

若しも全流體の占める空間を τ とし τ が不變ならば,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} \int_{\tau} (v \Pi u - u \bar{\Pi} v) d\tau &= \alpha \int_{\tau} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\tau = \alpha \int_{\tau} \frac{\partial uv}{\partial t} d\tau \\ &= \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

但し M は流體の全質量を表す.

(3.4) の左邊を Green の定理を用ひて書き改めると

$$(3.5) \quad \int_{\tau} (v \Pi u - u \bar{\Pi} v) d\tau = \int_{\sigma} (v \nabla u - u \nabla v - \beta uv \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

此處に $\mathbf{n}$ は τ の表面 σ の外向き單位法線ベクトルを表す. 之は流體が σ 面を流れ出ぬこと即ち $\nabla u, \nabla v, \mathbf{H}$ 共に σ 面に垂直な成分を有しないことを表すものである.

4. 波動函數, $\lim_{L \rightarrow 0}$ の合理化

(3.21), (3.22) を一般に考へる爲め, α は實數とし β は一般に複素數でよいと考へると, 波動方程式の解は一般に複素函數と成り, 夫々適當な境界條件を滿す u, v を取り乘積 uv を作る場合一般には實數とはならない. 之を避けるには, Π と $\bar{\Pi}$ とが御互ひに複素共軛演算子に成る如く取れば (3.22) の解として (3.21) の解の複素共軛函數を取ることが出來, 従つて

$$(4.1) \quad \rho = \alpha u u^*$$

を常に實數と爲すことが出来る. この爲の條件は

(1) 流體を一體問題と考へ, その代り dissipation を考へて形式的に量子化してもこの形式の式が出る. 即ち一般化座標で Hamilton 函數が $H \equiv \frac{1}{2} \sum_{hk} a_{hk} (p_h - a_h)(p_k - a_k) - a + U$ で書かれる場合である. (後出) 此のときは $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ とは限らぬ.

(2) この $\mathbf{A}$ は電磁ポテンシャルで (2.2) の $\mathbf{A}$ とは別物.

(3) 非相對論的な場合の式.

$$(4.2) \quad \beta = -\beta^*$$

即ち β が純虚数であれば十分である。(1)

かくて $\bar{H} = H^*$ と成る。(3.5) の數學的内容は H が Hermite 演算子 (自己随伴演算子) であることを示すもので, H が Hermite 演算子であることの一般條件は, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ((2.3) より) 及び (4.2) に依つて満たされて居る。

かく定めた場合 ϕ が常に實数になるか否かが問題である。 ξ, η を夫々實函数として (3.21) の解 u を次の如く置く。

$$(4.3) \quad u = \xi e^{-i\eta}, \quad (\Im \xi = 0, \Im \eta = 0).$$

之を (3.1) に代入すれば

$$(4.4) \quad \rho = \alpha \xi^2, \quad \phi = \frac{2i\eta}{\beta} = -\frac{2\eta}{\varepsilon}.$$

β は純虚数であるから $\beta = i\varepsilon$ と置けば ε は實数, 従つて ϕ は常に實数である。

次に波動函数の意味を考へよう。

(i) $\rho = \alpha \xi^2$ から

$$(4.5) \quad M = \int \rho d\tau = \alpha \int \xi^2 d\tau$$

従つて ξ を次元のない量とすれば, 物理的に M と α とは同内容である。若しも $\int \xi^2 d\tau = 1$ になる如く α を定めたとすれば, $\xi^2(t)d\tau$ は流体内の一點 P の $d\tau$ 近傍に於いて, 時刻 t にこの中に流體の全粒子中そのどれだけの部分の粒子が $d\tau$ 中に存在するかを示す分布確率であると解釋するのが尤もらしい。即ち $\xi^2 d\tau$ は流體粒子の位置の確率分布を示すものと考へる。斯く解釋するのは, 殆んど全く同一事情の下で幾回でも流體粒子の運動を繰返して調べることが抽象的には可能と考へての上である。

従來は流體に關する或る量 f の測定値は $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T f dt$ 又は $\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^3} \int f d\tau$ で與へられると考へた。ここでは領域 R 内の f の測定値は

$$(4.6) \quad \bar{f}^R = \frac{\int_R f \xi^2 d\tau}{\int_R \xi^2 d\tau} = \frac{\int_R u f u^* d\tau}{\int_R u u^* d\tau}, \quad (\tau \in R)$$

で表されると解する。(2) ξ^2 なる荷重の附く點が以前の式と異なる。

第一節で提起した問題は次のように解釋出来る。“流體の粒子分布の確率函数は流体内で一價有

(1) α, β は一般に複素数でよいとすれば, この條件は必ずしも成立しなくてもよい。

(2) このような平均値を取ると, (2.1) は R の如何に係らず成立する。この荷重平均の意味は, 一個の粒子についての平均の意味である。

限連続微分可能であり、従つて $\lim_{L \rightarrow 0}$ の操作も許容出来る。”

(ii) $\phi = \frac{2\eta}{\varepsilon}$. この式は常數係数を除いて $\phi = \text{一定の曲面群}$ と, $\eta = \text{一定の曲面群}$ とは一致すること即ち等ポテンシャル面は波動函数の等位相面と一致することを表す. 従つて $\mathbf{H} \neq 0$ なるは, 流體の流れは等位相面に垂直ではない.

5. 運動方程式

(2.1), (2.2) の二つから一般流體の運動方程式を導くことは出来ぬが前節の初めに爲した一般化及び Π の Hermite 性の要求から運動方程式に相當する式を導くことが出来る.

(3.21) に (4.3) を代入し實數部と虚數部とを分離すると⁽¹⁾

$$(5.1) \quad \varepsilon \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nabla^2 \xi - \xi (\nabla \eta)^2 - \varepsilon \xi \mathbf{H} \cdot \nabla \eta + \Re U \xi$$

$$(5.2) \quad \varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2 \nabla \xi \cdot \nabla \eta - \xi \nabla^2 \eta - \varepsilon \mathbf{H} \cdot \nabla \xi + \Im U \xi$$

但し $\Re$, $\Im$ は夫々實數部分, 虚數部分を示す記號.

$$(5.2) \text{ から } \quad \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \rho \left(\nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{H} \right) \right\} + \rho \Im U \\ = -\nabla \cdot \left(\rho \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{V} \right) + \rho \Im U.$$

$$(2.1) \text{ と比較すれば } \quad \Im U = 0$$

即ち U は實函数でなければならぬ. (5.1) から兩邊の勾配を取れば

$$(5.3) \quad \varepsilon \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \varepsilon \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \nabla U + \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right).$$

この式は ε , U , $\mathbf{H}$ を豫め與へねば實際に解くことは出来ない.⁽²⁾ (5.3) の最後の項は從來の流體力學の取扱ふ範圍内では甚だ小さい量である.

6. 渦 動

前節の結果では $\mathbf{V}$ の轉回部分 $\mathbf{H}$ は何か外から與へられた或る物であつて, u , v の與り知らぬものの如く見える. $\mathbf{H}$ の項の物理的意味は次の三つのいずれかの假定から説明出来る.

- (i) 流體の一粒子に磁場が働らく.
- (ii) 一粒子が dissipative 系で運動する.
- (iii) 粒子系の各粒子の存在確率が夫々の粒子について異なる.

(i), (ii) については既に前に述べた. (iii) の説明をしよう. N 個の粒子の流速がすべて非轉回的

(1) この方針は E. Madelung: Zeitsch. f. Phys. 40, 322 (1927) に始まる. A. Carrelli は之を一般化座標で取扱つた. Rendiconti (Lincei) [6], V, 990 (1927). いづれも (2.2) 式で $\nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ の場合である.

(2) この事情は從來の流體力學でも全く同様であつた. 第一報参照.

$$(6.1) \quad \mathbf{v}_i = \frac{2}{\varepsilon_i} \nabla \eta_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

で表されたとする。観測の際には (4.6) に依る平均値が測定出来ると解釋したから、測定された流速は、眼をつけた領域が平均として N 個の粒子を含むならば

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^R &= \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^N \xi_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \rho_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \rho_i} \left(\sum_{i=1}^N 2\rho_i \nabla \frac{\eta_i}{\varepsilon_i} \right) \end{aligned}$$

ρ_i が一定であるか又は各粒子に共通であるならば、 $\bar{\mathbf{v}}^R$ の場合は全く勾配の場のみからなりたつが、若し、 ρ_i が各粒子に共通でなく又一定でもないならば、 $\bar{\mathbf{v}}^R$ は轉回部分を有することに成る。

$N=2$ の場合に之を示さう。

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \equiv \sigma_1, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \equiv \sigma_2, \quad \frac{2\eta_1}{\varepsilon_1} \equiv \phi_1, \quad \frac{2\eta_2}{\varepsilon_2} \equiv \phi_2$$

$$\text{とおけば} \quad \mathbf{v}^R = \sigma_1 \nabla \phi_1 + \sigma_2 \nabla \phi_2, \quad \nabla \times \bar{\mathbf{v}}^R = \nabla \sigma_1 \times \nabla \phi_1 + \nabla \sigma_2 \times \nabla \phi_2.$$

この式は σ_i が ϕ_i のみの函数、又は ϕ_i が σ_i のみの函数でない限り

$$\nabla \times \bar{\mathbf{v}}^R \neq 0$$

なることを示す。物理的に考へると、 ϕ = 一定の曲面は等位相面（等ポテンシャル面）であり、 ρ = 一定の曲面は、等密度面である。 $\sigma_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$ であるから若し $\rho_1 + \rho_2$ = 一定ならば等密度面と σ = 一定の面とは一致する。この場合は丁度 Helmholtz 流の取扱ひ方で、等圧面と等密度面が一致しない場合に渦動の發生することに對應する。

7. 吟 味

この報告は質量保存則から出發し $\lim_{L \rightarrow 0}$ の解釋の仕方及び流體の運動を記述する方程式の有すべき外型を調べたものである。従つて擴散の如き現象に對しては、この儘の形式は適用出来ない。⁽¹⁾ 又波動方程式や確率波の概念を導入したが、流體では de Broglie の關係式に相當するものは未だ知られて居ないからこの儘では不確定性原理に相當する觀測値についての法則を導き出すことは出来ない。⁽²⁾ 次にこの取扱ひでは Hermite 性を導入するために必要以上の假定を加へて居るように思へる。Schrödinger の式を導くために (3.1) を假定したが、一般の波動方程式を導くには他の函数變換を行ひもつと一般に取扱ふことが出来る。更に上述の $\varepsilon, U, \mathbf{H}$ を決めるには、質量保存則以

(1) いかにも擴散式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = D \nabla^2 \rho$ から出發して (3.1) の變換を行つたのでは、(3.2) の如く二つの式に分離することは一般に出来ない。

(2) この點に關して近く高橋浩一郎氏の研究が發表されよう。Brown 運動の存在が或る場合の R (4.6 式) を規定することに成らう。

外の物理法則が必要で、この點量子論では光子に關する法則、Coulomb 法則や相對論の要請等を利用して居るが、流體力學では對應する法則は知れて居ない。この點は渦動と攪亂流に關する研究に依つて解決出来るかも知れない。⁽¹⁾ 最後にこの記述が、どの程度の微視的現象又は巨視的現象に適用出来るのか全く不明である。

藤原博士の常々主張される如く ε , U , H は眼をつける領域の廣さ (4.6) 式の R の廣りの程度で異なるものであらう。その意味で、 f の實測値を $\bar{f}^R$ と書いた。

8. 結 論

流體力學と電磁力學との記述法の類似は全く (2.1), (2.2) の支配する部分にのみ關係して居る。確率波も亦 (2.1) を満足するから、流體力學でそれぞれ對應する量を確率の概念で解釋することが出来る。この二つの事實を基にして流體力學も亦 Schrödinger の波動方程式 (但し係數は一般に異なる) で記述出来ることが導かれた。残された問題は前節での吟味に對する解釋であらう。

最後に本文を草するに當り藤原博士及び高橋浩一郎理學士から賜つた御注意に對して深謝したい。

(30・9・1937)

大 阪 灣 の 津 浪 に 就 いて(第二報)*

廣 野 卓 藏, 坂 田 勝 茂

第 2 章 大阪灣津浪傳播に關する模型實驗結果と理論との比較

(1) 大阪灣内を津浪波が如何に傳播するかその大體の模様は内務省土木試験所の松尾技師が爲された大型模型實驗によつて知る事が出来る。⁽²⁾ その模型は第 1 圖に示した様に大體長さ 16 米、幅 8 米の大型のもので由良海峡に於て底面に蝶番を以て取付けた板を灣外より灣内に向つて只 1 回動かして生じた押波を第 1 圖の (17), (18) 等の點にて記録せしめたのである。それより第 1 波の走時及最高波高をグラフに書けば第 2, 3 圖の破線⁽³⁾ の如くなる。松尾技師に依れば走時の觀測誤差は 0.2 秒を越えないとの事である。第 2 圖を見るに實測の走時が速度を $\sqrt{gk}$ として計算したものよりも遅れて居り、又 (18), (19), (20) 點附近に速度の異常が見られる。此の原因に言及し松尾

(1) 藤原咲平博士に依る。從來の $\nabla \times \mathbf{V}$ に眼をつける代りに渦素(vortex element)の境界面をなす曲面叢に眼をつけ、この運動を調べる方が便利かも知れぬ。

* T. Hirono and K. Sakata: Tunami Wave in Ōsaka Bay (II).

(2) 「大阪港附近の津浪災害軽減に關する模型試験」土木試験所報告。第 36 號。

(3) 第 1 圖及第 2, 3 圖の實測は總て松尾技師論文に據る。