氣 象 集 誌

第 二 輯 第 十 六 卷 第 五 號

論 文

音の傳播に對する一樣でない流れの影響*

坂 井 卓 三

1. 音の異常傳播，特に短距離の異常傳播の研究を行つた前の論文⁽¹⁾では，夫々が一定の流れを持つ二つの空氣の層を假定したけれども，實際には，特に下の層では空氣の流れは，高さと共に，比例的に變化してゐる⁽²⁾．この影響を考察する爲には，一樣で無い流れの中に於ける音の傳播の基礎式を求めなければならない．本研究では，溫度は一樣とし，重力の作用も無視し，且つ音の速度に較べて流れの速度は小と假定し，その自乗以上の程度の量は無視することとした．これらの假定は，短距離に於ける音の異常傳播の問題に對して，許されることと思はれる．更に基礎方程式の解としては，一樣な流れの場合の平面波に相當するもののみを求めた．實際には更に進んで，例へば點狀の波源がある場合を求めたいのであるけれど，この場合は數學的表現が複雑になつて來て，未だ解決が出来ない．

上述の様な制限の下に於ては，得られる結果は性質的には豫想されることであつて，音の射線(ray)は波の傳播と共に彎曲し，結局，前の論文で行つた様に，前の理論の補足をするに過ぎないこととなる．併し一樣で無い流れの中の音の波動方程式を立てて置くことも，無益なことでは無いと思はれる．その譯は，點狀波源の問題に進む第一歩と云ふ點を除いても，波動方程式は普通の形とはやや異なるものであり，例へば射線の彎曲を，單に普通の波動方程式の中の速度に相當する因數が常數で無いとして，理解することは一般には許されなくなるからである．

2. 基礎方程式．壓力 p は密度 ρ だけの函數とし，Euler の流體運動方程式をベクトルの形で書けば，次の如くである．

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \text{grad } v) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \text{grad } \rho. \quad (1)$$

又連續の方程式は，

* T. Sakai: On the Effect of the Current of Air on the Propagation of Sound Waves.

(1) T. Sakai and S. Syôno: Geophys. Mag. Tôkyô, VIII (1934) 205. T. Sakai: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 3rd. Ser., 17 (1935) 340. S. Syôno: Geophys. Mag. Tôkyô, IX (1935) 175.

(2) J. Köhler: Veröffentl. Preuss. Meteor. Inst. Abb. Bd. X, Nr. 1 (1932), 3.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v, \text{grad } \rho) + \rho \text{div } v = 0. \quad (2)$$

茲に $v \equiv (u, v, w)$ は、時刻 t 及び空間點 (x, y, z) に於ける流體の速度とする。 x - 方向に速度 $U(z)$ なる流れがあるとし、

$$u = U(z) + u', \quad v = v, \quad w = w, \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (3)$$

と置く。茲に $U(z)$ は z だけの函数、又 ρ' は密度の中の變化する部分とする。この値を (1), (2) へ代入すれば、 $v' = (u', v, w)$ として、

$$\left. \begin{aligned} \left(Du' + \frac{dU}{dz} w \right) + (v', \text{grad } u') &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right), \\ Dv + (v', \text{grad } v) &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right), \\ Dw + (v', \text{grad } w) &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

及び、

$$D\rho_0 + \{D\rho' + (v', \text{grad } \rho_0) + \rho_0 \text{div } v'\} + (v' \text{grad } \rho' + \rho' \text{div } v') = 0 \quad (5)$$

を得る。茲に D は $\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \equiv D$ なる演算子 (operator) であつて、流れつつある部分の時間的變化を與へるものである。

ρ_0 は、 x, y, z 及び t に無關係な常數と假定するから、振動が無い場合には、 $u' = 0, v = 0, w = 0, \rho' = 0$ として、流體の運動は、 $u = U(z), v = 0, w = 0$ となる。又 $w_x = 0, w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{dU}{dz}, w_z = 0$ で與へられる渦運動が在ることとなる。

一般に壓力は、

$$p(\rho) = p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho' + \dots \quad (6)$$

である。茲に $p_0 = p(\rho_0)$ 、又 $\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0$ は $\rho = \rho_0$ に於ける $\frac{dp}{d\rho}$ の値を意味する。以下

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = c^2 \quad (7)$$

と置く。

扱て流れがある場合の小振動に對する第一近似として、小さい項をすてて (4), (5) から

$$Du' + \frac{dU}{dz} w = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad (8)$$

$$Dv = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \quad (9)$$

$$Dw = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z}, \quad (10)$$

$$D\rho' + \rho_0 \operatorname{div} v' = 0 \quad (11)$$

を得る。茲に普通の場合の如く、 $\frac{\partial u'}{\partial t}$ に較べて $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$ の程度の量、 ρ_0 に較べて ρ' の程度の量、 $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$ に較べて $\left(\frac{d^2 p}{d\rho^2}\right)_0 \rho'$ の程度の量を省略したのである。併し $\frac{\partial u'}{\partial t}$ に較べて $U \frac{\partial u'}{\partial x}$ 、 $\frac{dU}{dz} w$ の程度の量は、流れがある爲めの補正の項として残してある。これらの近似計算は、普通の状況では許されることと思はれる。上記の基礎式を解く爲めに、(11) 式へ D の演算を行へば、

$$D \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (Dw) - \frac{dU}{dz} \frac{\partial w}{\partial x}$$

の関係によつて、

$$D^2 \rho' + \rho_0 \operatorname{div} Dv' - \rho_0 \frac{dU}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

を得るから、(8), (9), (10) をこれに代入すれば、

$$D^2 \rho' - c^2 \Delta \rho' - 2\rho_0 \frac{dU}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

となる。そこで更に D を行ひ、(10) を再び考慮して、

$$D(D^2 \rho' - c^2 \Delta \rho') = -2c^2 \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial z} \quad (12)$$

を得る。この式で右邊の項は省略出来ないのみならず、これが大切な項なのである。更に別の形に變形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} D &= D \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} D &= D \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

の關係を用ひ、又

$$\rho' = DP \quad (13)$$

と置けば、(12) は

$$D^2(D^2 - c^2 \Delta)P = c^2 \frac{d^2 U}{dz^2} D \frac{\partial P}{\partial x} - 2c^2 \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}$$

となる。故に 1 に較べて U^2/c^2 の項を省略し、又 U は z と共に極めて緩かに變化するとせば（以下では $U = Kz$ と假定する。 K は常數）上式の右邊の項は省略してよろしい。従つて

$$D^2(D^2 - c^2 \Delta)P = 0 \quad (14)$$

を得る。扱て

$$D^2 \Phi = 0 \quad \text{又は} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi = 0$$

の一般解は $\Phi = tf(x-Ut, y, z) + F(x-Ut, y, z)$ の形である⁽¹⁾. 茲に f, F は任意の函数とする. 従つて一般には, (14) は

$$(D^2 - c^2 \Delta)P = tf(x-Ut, y, z) + F(x-Ut, y, z) \quad (15)$$

となる. この式の右邊は流れの中に配布された波動の源を意味すると考へられる. 今 U が一定な場合の平面波に相當する場合を考へるならば, $f = F = 0$ と假定することが出来るから, (15) は次の如くなる:

$$(D^2 - c^2 \Delta)P = 0. \quad (16)$$

更に

$$P = e^{i\omega(t - \frac{lx+my}{c})} f(z) / i\omega \quad (17)$$

の形を假定する. 茲に $\omega > 0$ と約束する. $f(z)$ については, (16) から

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \left(1 - \frac{lU}{c} \right)^2 - l^2 - m^2 \right\} f = 0$$

が成立するから, U^2/c^2 の程度の量を省略し,

$$U = Kz, \quad (K > 0), \quad (18)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

と置いて, 結局

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(n^2 - \frac{2lK}{c} z \right) f = 0 \quad (19)$$

を得る. この式の解は,

$$f(z) = \begin{cases} \left(n^2 - \frac{2lK}{c} z \right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\pm \frac{\omega}{3Kl} \left[n^2 - \frac{2lKz}{c} \right]^{\frac{3}{2}} \right), & \left(n^2 > \frac{2lK}{c} z \right) \\ \left(\frac{2lK}{c} z - n^2 \right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\pm i \frac{\omega}{3Kl} \left[\frac{2lK}{c} z - n^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right), & \left(n^2 < \frac{2lK}{c} z \right) \end{cases} \quad (20)$$

である. 茲に $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\xi)$ は第三種のベッセル函数の一つである⁽²⁾. (13) 及び (17) から

$$\rho' = \left(1 - \frac{l}{c} U \right) f(z) e^{i\omega(t - \frac{lx+my}{c})}. \quad (21)$$

物理的には, $n^2 = 2lKz/c$ に於て, p 従つて ρ' ((6) 式参照) 及び速度が連続である様な解を求め

(1) $x-Ut=\xi, y=y, z=z, t=t_i$ と置けば, D は $\frac{\partial}{\partial t}$ となり, $D^2\Phi=0$ は $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$ となる. 故に $\Phi = tf(\xi, y, z) + F(\xi, y, z)$.

(2) 寺澤: 數學概論 543 頁.

Watson: Theory of Bessel Functions (1922).

$$H_\nu^{(1)}(\xi) = J_\nu(\xi) + iY_\nu(\xi), \quad Y_\nu(\xi) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(\xi) - J_\nu(\xi)}{\sin \nu \pi}, \quad (\nu \neq \text{整数}),$$

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}.$$

なければならない。更に實際の見地から興味があるのは、到る處で有限な値を持つ様なものでなければならない。この爲に、(20) の解を少しく吟味してみる。

3. 解式の性質. λ を波長とするならば、

$$\frac{\omega}{3K} = \frac{2\pi}{3} \frac{c}{\lambda K}$$

であるから、 λ を 1m の程度、 $K=0.1\text{sec}^{-1}$ とすれば、上記の量は普通に非常に大きな値を持つてゐる。従つて今

$$\Phi = \left(n^2 - \frac{2lU}{c} \right)^{\frac{3}{2}} / l, \quad \Phi_0 = 30 \frac{K}{\omega} \quad (22)$$

と置けば、 $|\Phi| \geq \Phi_0$ の條件に従ふ様な $n, l, U (=Kz)$ の値に對しては、(20) で $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\xi)$ の漸近展開式を使用することが出来る。 l, m, n は、實數の場合には、平面波の波面法線の方角餘弦と考へることが出来るから (n については以下の考察によつて明かになる)、一定の U 又は z を與へた場合に l, n に對する Φ の變化を見るには、 l, n, m を直角座標にとり、半径 1 の球面を取るのが都合がよい。更に Φ は m には無關係であるから、球面の點を (l, n) 平面に正射影したとすれば、この平面内の半径 1 の圓の内部だけに、觀察を限ることが出来る。この様な見易い仕方で漸近展開式の可能な範圍を圖で示せば、第 1 圖の影を附けない部分と

なる。圖で $|\Phi| \geq \Phi_0$ なる場合の中、 Φ が正の實數をとる部分は +、負の實數をとる部分は -、純虛數をとる場合は i の記號で示してある。又 $|\Phi| = \Phi_0$ なる限界は、拋物線に似た曲線 AOA', COC' 及び原點の左方の小さい D に達する閉曲線で示してある。更に $\Phi=0$ になる場合は、拋物線 BOB' の上で與へられる。従つてこの拋物線の外側即ち i の範圍を含まない部分では、(20) 式の中の初めの解が用ゐられ、内側即ち i の範圍を含む部分では (20) 式の中の第二の解

が用ゐられることとなる。尙 $AM \approx \sqrt{\Phi_0^{\frac{2}{3}} + \frac{2U}{c}} \approx \sqrt{\frac{2U}{c}}$, $BM \approx \sqrt{\frac{2U}{c}}$, $CM \approx \sqrt{\frac{2U}{c} - \Phi_0^{\frac{2}{3}}} \approx \sqrt{\frac{2U}{c}}$, $OD = \left(\frac{c}{2U} \right)^{\frac{3}{2}} \Phi_0^2$ であるから、漸近展開の行はれない影を附けた部分は、非常に狭い範圍に限られてゐることが分る。尙上の觀察では、 $K>0$, $z>0$ 従つて $U>0$ の場合に限つてあるけれども、その他の場合は上記の場合から物理的に簡単に解釋される。

以下に ρ' の近似的の式を書いてみる。但し z が増すと共に ρ' が無限に大きくなる場合は、今は興味が無いので、この場合は除外する。

(i) 先づ $n^2 > 2lU/c$ の場合をとる。(20) の式の第一式で、 $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ の變數が正號を持つものをとれば、

$$\rho' = \left(1 - \frac{l}{c}U\right) \left(n^2 - \frac{2lU}{c}\right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\frac{\omega}{3Kl} \left[n^2 - \frac{2lU}{c}\right]^{\frac{3}{2}}\right) e^{i\omega \left(t - \frac{lx+my}{c}\right)}. \quad (23)$$

a) $\Phi \cong \Phi_0$ 又は $\Phi \cong -\Phi_0$ ならば, $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ の漸近展開式により⁽¹⁾,

$$\rho' = N' \frac{1-lU/c}{(1-2lU/cn^2)^{\frac{1}{4}}} e^{i\omega \left(t - \frac{lx+my}{c}\right) + \frac{i\omega}{3Kl} \left(n^2 - \frac{2lU}{c}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{i\omega n^3}{3Kl}}, \quad (24)$$

茲に

$$N' = \sqrt{\frac{6Kl}{\pi\omega n}} e^{-i\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\omega n^3}{3Kl}\right)}$$

であつて, (24) に $e^{-\frac{i\omega n^3}{3Kl}}$ をつけた理由は, $n^2 \gg 2lU/c$ の場合の式を 簡単にする爲に過ぎない. この場合には, 實際

$$\rho' = N' \left[1 - \frac{l}{c} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)U\right] e^{i\omega \left[t - \frac{1}{c} \left(lx+my + n^2 \frac{Kl}{2cn}\right)\right]} \quad (25)$$

となる.

b) $\Phi \approx 0$ なる時は, $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\zeta)$ の原点の近傍に於ける展開式により⁽²⁾

$$\begin{aligned} \rho' = & -N' \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{3Kl}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{2^{\frac{4}{3}} n^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-1/3)} e^{-i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^3}{3Kl}\right) + i\omega \left(t - \frac{lx+my}{2}\right)} \\ & \times \left(1 - \frac{lU}{c}\right) \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})}{2^{\frac{5}{3}} \Gamma(1/3)} \left(\frac{\omega}{3Kl}\right)^{\frac{2}{3}} \left(n^2 - \frac{2lU}{c}\right) - \dots\right). \end{aligned} \quad (26)$$

若し (20) 式の第一式で, $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ の變數に負號をとるならば,

$$\rho' = \left(1 - \frac{l}{c}U\right) \left(n^2 - \frac{2lU}{c}\right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(-\frac{\omega}{3Kl} \left[n^2 - \frac{2lU}{c}\right]^{\frac{3}{2}}\right) e^{i\omega \left(t - \frac{lx+my}{c}\right)}. \quad (27)$$

a') $\Phi \cong \Phi_0$ 又は $\Phi \cong -\Phi_0$ ならば,

$$\rho'' = N'' \frac{(1-lU/c)}{(1-2lU/cn^2)^{\frac{1}{4}}} e^{i\omega \left(t - \frac{lx+my}{c}\right) - i\frac{\omega}{3Kl} \left(n^2 - \frac{2lU}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{i\omega n^3}{3Kl}} \quad (28)$$

$$(1) \quad H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{i\left(\zeta - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + i\frac{4\nu^2-1}{8\zeta} + \dots\right), \quad (-\pi < \arg \zeta < 2\pi).$$

$$(2) \quad H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\zeta) = \frac{i2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}}{\Gamma(-1/3)\zeta^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})\Gamma(-1/3)}{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(1/3)} \zeta^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8} \zeta^2 + \dots\right),$$

$$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(-\zeta) = \frac{i2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}}{\Gamma(-1/3)\zeta^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{i\pi}{3}} \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})\Gamma(-1/3)e^{\frac{i2\pi}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(1/3)} \zeta^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8} \zeta^2 + \dots\right),$$

$$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(i\zeta) = \frac{i2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}}{\Gamma(-1/3)\zeta^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{i\pi}{6}} \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})\Gamma(-1/3)e^{\frac{i\pi}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(1/3)} \zeta^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{8} \zeta^2 + \dots\right).$$

茲に,

$$N'' = \sqrt{\frac{6Kl}{\pi\omega n}} e^{-i(\frac{11}{12}\pi + \frac{\omega n}{3Kl})}.$$

特に $n^2 \gg 2lU/c$ ならば,

$$\rho'' = N'' \left[1 - \frac{l}{c} \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) U \right] e^{i\omega \left[t - \frac{1}{c} \left(lx + my - nz + \frac{Kl}{2cn} z^2 \right) \right]}. \quad (29)$$

b') $\Phi \approx 0$ ならば,

$$\begin{aligned} \rho'' = & -N'' \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{3Kl} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{2^{\frac{4}{3}} n^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-1/3)} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n}{3Kl}) + i\omega \left(t - \frac{lx + my}{c} \right)} \\ & \times \left(1 - \frac{lU}{c} \right) \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})\Gamma(-1/3)e^{\frac{i2\pi}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\omega}{3Kl} \right)^{\frac{2}{3}} \left(n^2 - \frac{2lKz}{c} \right) - \dots \right). \end{aligned} \quad (30)$$

(ii) $n^2 < 2lU/c$ なる時は, (20) の第二式をとり, 特に $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ の變數の + 符號を持つ場合を觀察する. 一符號を持つ場合は, z が増すと共に ρ の値が増す場合となるからである. Φ は今は純虛數の値をとる.

$$\rho''' = \left(1 - \frac{lU}{c} \right) \left(\frac{2lU}{c} - n^2 \right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(i \frac{\omega}{3Kl} \left(\frac{2lU}{c} - n^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right). \quad (31)$$

茲に $l > 0$ の場合だけが問題となる.

a'') $|\Phi| \geq \Phi_0$ ならば,

$$\rho''' = N''' \frac{(1-lU/c)^{\frac{1}{2}}}{(2lU/cn^2-1)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\omega}{3Kl} \left(\frac{2lU}{c} - n^2 \right)^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega \left(t - \frac{lx + my}{c} \right)}. \quad (32)$$

茲に

$$N''' = \sqrt{\frac{6Kl}{\pi\omega n}} e^{-\frac{i2\pi}{3}}.$$

b'') $|\Phi| \approx 0$ ならば,

$$\begin{aligned} \rho''' = & -N''' \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{3Kl} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{2^{\frac{4}{3}} n^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-1/3)} e^{i\omega \left(t - \frac{lx + my}{c} \right)} \\ & \times \left(1 - \frac{lU}{c} \right) \left(1 + \frac{(1-i\sqrt{3})\Gamma(-1/3)e^{\frac{i\pi}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\omega}{3Kl} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2lKz}{c} - n^2 \right) + \dots \right) \end{aligned} \quad (33)$$

4. 平面波に相當する解. 扱て $n^2 = 2lU/c$ 即ち $z = cn^2/2lK$ を除く以外の點では, 上に得た解は連續であるから, この點に於て密度及び z 方向の速度が連續になる様な解を求める. 上に得た解は任意の常數因數を掛けても差支無いから, 改めて N', N'' 及び N''' は上述の條件から決定すべき常數と考へ, この中特に N' は, 簡單の爲 1 に等しく取る. 密度が連續の條件は

$$\rho' + \rho'' = \rho''' \quad (34)$$

又は (26), (30) 及び (33) により,

$$e^{-i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl})} + N'' e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl})} = N''' \quad (35)$$

次に $\rho' = i\omega(1 - Ul/c)P$ とせば、速度の z -方向の成分は、後で示す様に、

$$w = -\frac{c^2}{\rho_0} \left(\frac{dU}{dz} \frac{\partial P}{\partial x} \right) / i\omega \left(1 - \frac{Ul}{c} \right) + \frac{\partial P}{\partial z}$$

となる。 $\frac{\partial P}{\partial x}$ は (35) によつて連続となるから、 w の連続の條件は、

$$\frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\partial P''}{\partial z} = \frac{\partial P'''}{\partial z} \quad (36)$$

又は (26), (30) 及び (33) によつて、

$$e^{-i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl})} + N'' e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl}) + i\frac{2\pi}{3}} = -N''' e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (37)$$

となる。(35), (37) から N'', N''' は次の如く決まる：

$$\left. \begin{aligned} N'' &= -\frac{(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})^2}{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)} e^{-i2(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl})}, \\ N''' &= \frac{i\sin\frac{\pi}{3}(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})}{1 + \cos\frac{\pi}{3}} e^{-i(\frac{\pi}{12} + \frac{\omega n^2}{3Kl})}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(24) 以下 (33) までの N', N'', N''' を含む式で、 $N' = 1$ 、及び上記の値を取れば、求める解が得られる。但し纏まつた形の式 (23), (27) 及び (31) は、夫々

$$\sqrt{\frac{6Kl}{\pi\omega n}} e^{-i(\frac{5}{12}\pi - \frac{\omega n^2}{3Kl})}, \quad \sqrt{\frac{6Kl}{\omega n}} e^{-i(\frac{11}{12}\pi + \frac{\omega n^2}{3Kl})} \frac{1}{N''}, \quad \sqrt{\frac{6Kl}{\omega n}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{N'''}$$

で割つて置かねばならない。茲に N'', N''' は (38) の値とする。

波面法線方向餘弦は、a) 又は a') の場合は、夫々

$$l : m : \left(n^2 - \frac{2Klz}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{又は} \quad l : m : -\left(n^2 - \frac{2Klz}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

に比例し、波面法線方向の位相の速度は、容易に

$$c + Ul \quad (40)$$

であることが判る。a') の場合には、波は x, y 平面に平行に傳はり、その速度は

$$c/\sqrt{l^2 + m^2} = c/\sqrt{1 - n^2} \quad (50)$$

である。

(l, m, n) の一定の値を取るならば、 $n^2 \gg 2Ul/c$ の條件の成立する範圍、即ち n が比較的大きな値の時は z の相當の大きさの範圍まで、又 n が餘り大きくない時は z の小さい値の範圍で、波面は

$$lx + my \pm nz \mp \frac{Kl}{2cn} z^2 = \text{常數} \quad (51)$$

なる廻轉拋物線面で與へられることとなる。(25), (29) 参照). 勿論, 解は $1 \gg U^2/c^2 = K^2 z^2/c^2$ の條件に従ふ z の値だけに就いて正しい. 特に n が比較的小さい値を取るならば, (51) が成立する小さい z の値以外の範圍も問題とすることが出来, この場合には, 音の射線の彎曲が充分の程度で現れることになる. そして $z = cn^2/2lK$ 以上になると, (32) を用ゐなければならなくなる. この場合の波面と射線とを x, z 平面で示せば, 第 2 圖

第 2 圖

の如くである. この圖の右半で, 實線は ρ' の波面を, 點線は ρ'' の波面を, 太い z 軸に平行な線は ρ''' の波面を示し, 矢印のある彎曲線が射線を示す. 又左半に $l < 0$ の場合が示してある. $z < 0$ の場合は, この圖を原點 O に對し

て鏡映 (spiegeln) すれば宜い. $z = cn^2/2lK$ より高い所では, 振幅は極めて早く減衰し ((32) 参照) 事實上波は存在しないと考へて宜い.

以上では l, m, n が實數をとる場合だけを考へたが, これらが一般に複素數を取ることも問題の性質によつては可能である.

エネルギーの傳播については, 分散性媒質の中の問題で無いから, 特に注意すべきことは無いが, 高さと共に振幅が變る點に注意すべきである.

最後に速度の成分の計算を行つて置く. この爲には基礎の式 (8), (9) 及びに (10) 歸らねばならない. (13), (17) に依つて,

$$\rho' = DP, \quad P = e^{i\omega\left(t - \frac{lx + my}{c}\right)} f(z)/i\omega$$

であるから,

$$D = i\omega(1 - Ul/c)$$

なる數と考へて計算してよろしい. 先づ (10) から,

$$w = -\frac{c^2}{\rho_0} D^{-1} \frac{\partial}{\partial z} DP = -\frac{c^2}{\rho_0} D^{-1} \left(\frac{dU}{dz} \frac{\partial P}{\partial x} + D \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

を得るから, w は

$$w = -\frac{c^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{dU}{dz} \frac{\partial P}{\partial x} / i\omega \left(1 - \frac{Ul}{c} \right) \right) \quad (52)$$

となる. 同様にして (9) から

$$v = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (53)$$

又 (8) から

$$u' = -\frac{c^2}{\rho_0} \left\{ D^{-1} \frac{\partial}{\partial x} DP - D^{-1} \frac{dU}{dz} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{dU}{dz} \frac{\partial P}{\partial x} / i\omega \left(1 - \frac{Ul}{c} \right) \right) \right\}.$$

故に $\left(\frac{dU}{dz}\right)^2$ の程度の量を省略して、

$$u' = -\frac{c^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{dU}{dz} \frac{\partial P}{\partial z} \right) / i\omega \left(1 - \frac{U}{c} \right). \quad (54)$$

以上の式から v, u' も亦 w と共に到る處で連続である。

文 獻

一般に媒質が等質で無い場合の波動傳播を取扱つた數理的研究の中、著者の目に觸れたものを次に掲げて置く。

先づ音波について、空氣の流れが無く、溫度、密度が變つてゐる場合については、

Lamb: Hydrodynamics (1931) 541 頁. Atmospheric Waves. これに掲げて無いものとして、

S. Sano: Bull. Central Meteorological Observ. Japan 2 (1913) 13 頁. 又は Scientific Papers (1926) 140 頁. 彈性體については、

E. Meissner: Viertel jahr. Natur. forsch. Gesells. Zürich.

K. Aichi: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan [3] 4 (1922) 137 頁.

K. Sezawa: 地震研究所彙報, 第 9 號 (昭和 6 年) 310 頁.

R. Yosiyama: 地震研究所彙報, 第 11 號 (昭和 8 年) 1 頁.

光又は電磁波については、

R. Gans: Ann. d. Phys. 47 (1915) 709 頁.

K. Försterling: Hochf. technik u. Elektroakustik. 45 (1935) 144 頁.

深さ又は幅が變る境界内の Tidal Wave については、

Lamb: Hydrodynamics (1931) 250 頁. Tidal Waves. これに掲げて無いものとして、

H. Nagaoka: Proc. Phys.-Math. Soc. 1 (1901-1903) 126 頁.

1937 年 12 月, 東京帝國大學理學部.

空 電 自 記 器 の 製 作*

和 達 清 夫, 桑 野 眞 弓

1. 序 言

毎夏季中央氣象臺及び支臺に於いて行はれる雷雨豫報事務に役立つ觀測材料を得る目的を以つて製作されたのがこの空電自記器である。本器は大阪支臺に於いて昭和十二年度雷雨事務に使用され、非常に効果的であることが分り且又進んで本器は雷雨現象とのみに限定せず廣く氣象狀態の推移を知るにも有用なる根據を支へる事實を確めたので、目下大阪支臺に於いては雷雨期間を過ぎた

* K. Wadati and M. Kuwano: Mechanically Self-recording Apparatus of Atmospherics.