大気振動の理論(第一報)*

櫻庭 信 一

§1. 緒 言

大気の気圧振動を論じた文献は尠しとしないが、大気の固有振動を求むる事を目的とした研究で著名なのは M. Margules の論文である。以降此の種の研究は決して看却されて來た譯でないが、用ひられた假定は重力方向に静力學的釣合ひの式であり、最近の振動論の傾向から見て充分批判の餘地の存在する所である。即ち H. Solberg⁽¹⁾ は彼の潮汐論に於て垂直加速度の項の無視出来ない事を強調してゐるが、大気の問題に於ても同様或は夫れ以上に此の項の重要性を帯びる事は論を俟たない。唯 H. Solberg の取扱つた非壓縮流體に對して大気は壓縮性であり、地球の形狀を球形として取扱ふとしても (Solberg は廻轉橢圓體として論じてゐる)、著しく Solberg の解に比して難解となる事は容易に豫想される。第一報では先づ此の試みとして數理の解式だけを與へ、數量的解は第二報に譲る。⁽²⁾

§2. 基本方程式

今摩擦の伴はない流體の運動を論ずる事とする。球面座標 r, θ, λ , 速度分力 v_r, v_θ, v_λ の記號で小さい運動の方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g &= \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\omega v_\lambda \sin \theta, & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - 2\omega v_\lambda \cos \theta, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} &= \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + 2\omega v_r \sin \theta + 2\omega v_\theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で、連續の方程式は

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \sin \theta \cdot v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r). \quad (2)$$

茲に ρ は密度, p は壓力, g は重力加速度, ω は地球廻轉の角速度である。

$$p = p_0(1 + \epsilon), \quad \rho = \rho_0(1 + \delta) \quad (3)$$

と置いて p, ρ_0 は振動の無い時の量, ϵ, δ は振動に與る量とすれば, ϵ, δ は第一次微少量となる。變化が斷熱的に行はれるとして (等温大気)

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{v_r g}{\kappa R T_0} + \frac{v_r g}{R T_0}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (4)$$

* S. Sakuraba: The Barometric Oscillation of an Atmosphere (I). 中央氣象臺彙報.

(1) H. Solberg: Über die freien Schwingungen einer homogenen Flüssigkeitsschicht auf der rotierenden Erde I, Astrophys. Norveg., 1, Nr. 7 (1936).

(2) 本論文は數量的解を得て後印刷する筈であつたが、都合により數理の部だけを先きにした。

の関係がある。等温変化の時は $\kappa=1$ である。

平衡状態に於ては

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} - g = 0$$

から、等温大気を假定して (温度を T_0 とす)

$$p_0 = \bar{p}_0 e^{-\frac{g}{\kappa T_0}(r-a)}, \quad \bar{p}_0 = [p_0]_{r=a} \quad (5)$$

なる気圧の測高公式を得る。 a は地球の半径である。

(3), (4), (5) 式を (1), (2) 式に代入して、高次の微少量を省略すれば

$$-RT_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\omega v_\lambda \sin \theta, \quad (6a)$$

$$-RT_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - 2\omega v_\lambda \cos \theta, \quad (6b)$$

$$-RT_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + 2\omega v_r \sin \theta + 2\omega v_\theta \cos \theta, \quad (6c)$$

$$0 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) - \frac{v_r g}{\kappa R T_0}. \quad (6d)$$

(6a), (6b), (6c) 式より

$$\left(-\frac{RT_0}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} + 2\omega \sin \theta \cdot RT_0 \frac{\partial}{\partial r} + 2\omega \cos \theta \cdot RT_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varepsilon = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\omega^2 \right) v_\lambda. \quad (7)$$

(6a), (6b), (6d) より

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{RT_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{RT_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - g \frac{\partial}{\partial r} \right\} \varepsilon \\ &= \left\{ \frac{2\omega}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} + \frac{2\omega}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) - \frac{g}{\kappa R T_0} 2\omega \sin \theta \right\} v_\lambda. \quad (8) \end{aligned}$$

(7), (8) より v_r を消去し、多少變形して

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2\omega}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2\omega \cos 2\theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} + 2\omega \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4\omega \sin \theta}{r} - \frac{g}{c_L^2} 2\omega \sin \theta \right] \\ & \quad \times \left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} + 2\omega \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + 2\omega \cos \theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \varepsilon \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\omega^2 \right] \left[-\frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{g}{c_L^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] \varepsilon \quad (9) \end{aligned}$$

茲に

$$c^2 = RT_0, \quad c_L^2 = \kappa RT_0.$$

(9) 式の左邊を展開して整頓すれば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{4\omega^2}{r} (2 - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4\omega^2}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{4\omega^2 \cos 2\theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^4}{\partial \lambda^2 \partial t^2} + 4\omega^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{8\omega^2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{g}{c_L^2} \frac{2\omega}{r} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} - \frac{g}{c_L^2} 4\omega^2 \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{g}{c_L^2} \frac{4\omega^2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \varepsilon \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\omega^2 \right] \left[-\frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{g}{c_L^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] \varepsilon \quad (10)$$

今

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} \cdot e^{i(h\lambda + h t)} \quad (11)$$

とおき、且つ

$$r = a + z \quad (12)$$

とにおいて ($a \gg z$)

$$\frac{1}{r} \propto \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \propto \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

なる近似計算を行へば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a} (2 - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{a^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\cos 2\theta \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{h^2 k^2}{4\omega^2} \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} - \frac{g}{c_L^2} \frac{1}{2\omega} \frac{h k}{a} - \frac{g}{c_L^2} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{g \sin \theta \cos \theta}{c_L^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \bar{\varepsilon} \\ & = \left[1 - \frac{k^2}{4\omega^2} \right] \left[\frac{k^2}{c_L^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{g}{c_L^2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (13)$$

§ 3. 解 式

諸

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 \cdot e^{a r}, \quad \cos \theta = x, \quad \frac{k}{2\omega} = f \quad (14)$$

とにおいて

$$\left[(1-x^2)(x^2+f^2-1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \{2f^2 + A(x^2-1)\} x \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ Ff^2 - F + D + Cx^2 - \frac{h^2 f^2}{1-x^2} \right\} \right] \bar{\varepsilon}_0 = 0. \quad (15)$$

(15) 式に於て $x = \infty$, $x = \pm \sqrt{1-f^2}$, $x = \pm 1$ は微分方程式論に於ける特異点である。

$$v = \frac{f x}{\sqrt{f^2 - 1 + x^2}} \quad (16)$$

なる変数の変換を行へば、前 2 つの特異点は ∞ の所にある。

(16) 式によつて (15) 式は

$$(1-v^2) \frac{d^2 \bar{\varepsilon}_0}{dv^2} - 2v \left\{ 1 + (3-A) \frac{1-v^2}{f^2-v^2} \right\} \frac{d \bar{\varepsilon}_0}{dv} + \left\{ \frac{1}{f^2-v^2} (Ff^2 + D - F + C - C f^2 \frac{1-v^2}{f^2-v^2}) - \frac{h^2}{1-v^2} \right\} \bar{\varepsilon}_0 = 0. \quad (17)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} A &= 3 - 2\alpha a + \frac{g a}{c_L^2}, & C &= a\alpha - a^2 \alpha^2 + \frac{\alpha g}{c_L^2} a^2, \\ D &= a\alpha + a^2 \alpha^2 - \frac{g}{c_L^2} a h f - \frac{\alpha g}{c_L^2} a^2, & F &= a\alpha + a^2 \alpha^2 - \frac{g}{c_L^2} \alpha a^2 + \frac{k^2 a^2}{c_L^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$3-A=\beta, \quad F/\beta=\gamma, \quad (D-F+C)/\beta=\delta, \quad C/\beta=\sigma \quad (19)$$

とおけば (17) 式は

$$(1-v^2) \frac{d^2 \bar{\varepsilon}_0}{dv^2} - 2v \left(1 + \beta \frac{1-v^2}{f^2-v^2} \right) \frac{d \bar{\varepsilon}_0}{dv} + \left\{ \frac{\beta}{f^2-v^2} (\gamma \lambda^2 + \delta - \sigma f^2 \frac{1-v^2}{f^2-v^2}) - \frac{h^2}{1-v^2} \right\} \bar{\varepsilon}_0 = 0 \quad (20)$$

となり, $\gamma=(\beta+1)$, $\delta=1-\beta$, $\sigma=2-\beta$ の關係で H. Solberg の方程式と一致する. 然し一般に上の關係は成り立たないから別の解を求めなければならない.

即ち
$$\bar{e}_0 = (f^2 - v^2)^{-\frac{\beta}{2}} F(v) \quad (21)$$

とおいて

$$(1-v^2) \frac{d^2 F}{dv^2} - 2v \frac{dF}{dv} + \left\{ \frac{p+qv^2+sv^4}{(f^2-v^2)^2} - \frac{h^2}{1-v} \right\} F = 0. \quad (22)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} p &= f^2 \beta (1 + \gamma f^2 + \delta - \sigma), \\ q &= \beta (-3f^2 + 1 - \beta - \gamma f^2 - \delta + \sigma f^2), \\ s &= \beta (\beta + 1). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(22) 式の解として
$$F = \sum_m d_m P_m^h(v), \quad m \geq h \quad (24)$$

とおき,

$$\begin{aligned} x^2 P_v^n(x) &= \frac{(\nu+1-n)(\nu+2-n)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} P_{\nu+2}^n(x) + \frac{(\nu+1-n)(\nu+1+n)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} P_v^n(x), \\ x^4 P_v^n(x) &= \frac{(\nu+1-n)(\nu+2-n)(\nu+3-n)(\nu+4-n)}{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)} P_{\nu+4}^n(x) + \frac{(\nu+1-n)(\nu+2-n)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(\nu+1+n)(\nu+1-n)}{(2\nu+1)(2\nu+3)} + \frac{(\nu+3+n)(\nu+3-n)}{(2\nu+5)(2\nu+7)} \right\} P_{\nu+2}^n(x) + \frac{(\nu+1+n)^2(\nu+1-n)^2}{(2\nu+1)^2(2\nu+3)^2} P_v^n(x) \end{aligned}$$

なる關係式によつて, (24) 式を (22) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} &\sum d_m [m(m+1)-p] P_m^h(v) - \sum d_m [2f^2 m(m+1)+q] \frac{(m+1-h)(m+2-h)}{(2m+1)(2m+3)} P_{m+2}^h(v) \\ &- \sum d_m [2f^2 m(m+1)+q] \frac{(m+1-h)(m+1+h)}{(2m+1)(2m+3)} P_m^h(v) + \sum d_m [m(m+1)-\beta(\beta+1)] \\ &\times \frac{(m+1-h)(m+2-h)(m+3-h)(m+4-h)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)} P_{m+4}^h(v) + \sum d_m [m(m+1)-\beta(\beta+1)] \\ &\times \frac{(m+1-h)(m+2-h)}{(2m+1)(2m+3)} \left\{ \frac{(m+1+h)(m+1-h)}{(2m+1)(2m+3)} + \frac{(m+3+h)(m+3-h)}{(2m+5)(2m+7)} \right\} P_{m+2}^h(v) \\ &+ \sum d_m [m(m+1)-\beta(\beta+1)] \frac{(m+1+h)^2(m+1-h)^2}{(2m+1)(2m+3)^2} P_m^h(v) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

(25) 式より d_m を決定する式として

$$\begin{aligned} &d_{m+4} \left[(m+4)(m+5) - p - \{2f^2(m+4)(m+5)+q\} \frac{(m+5-h)(m+5+h)}{(2m+9)(2m+11)} \right. \\ &\quad \left. + \{(m+4)(m+5)-\beta(\beta+1)\} \frac{(m+5-h)^2(m+5+h)^2}{(2m+9)^2(2m+11)^2} \right] \\ &+ d_{m+2} \left[-\{2f^2(m+2)(m+3)+q\} \frac{(m+3-h)(m+3+h)}{(2m+5)(2m+7)} + \{(m+2)(m+3)-\beta(\beta+1)\} \right] \end{aligned}$$

$$\times \frac{(m+3-h)(m+4-h)}{(2m+5)(2m+7)} \left\{ \frac{(m+3-h)(m+3+h)}{(2m+5)(2m+3)} + \frac{(m+5-h)(m+5+h)}{(2m+9)(2m+11)} \right\} \Bigg] \\ + d_m \{m(m+1) - \beta(\beta+1)\} \frac{(m+1-h)(m+2-h)(m+3-h)(m+4-h)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)} = 0. \quad (26)$$

明らかに (26) 式の解は連分數で與へられるが、吟味は第二報に譲る。

$$\text{偕} \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{a} (\beta + \xi), \quad \xi = \frac{a}{H}, \quad \frac{1}{H} = \frac{g}{c_L^2} \quad (27)$$

の關係によつて

$$\left. \begin{aligned} p &= f^2 \left[\frac{1}{4} f^2 \beta^2 + \left(\frac{1}{2} f^2 + 1 \right) \beta + \frac{1}{2} \xi f^2 - \frac{1}{4} \xi^2 f^2 - \xi h f + \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right], \\ q &= \left[- \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} f^2 \right) \beta^2 + \left(-3f^2 + \frac{1}{2} \right) \beta + \frac{1}{2} \xi^2 f^2 - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{4} \xi^2 + \xi h f - \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を得る。

$$\text{従つて} \quad \bar{\varepsilon} = \sum_{\beta} \sum_m e^{\frac{1}{2} \frac{1}{a} (\beta + \xi) z} (\lambda^2 - v^2)^{-\frac{\beta}{2}} d_{m,\beta} P_m^h(v). \quad (29)$$

此の式は β が負の場合も成り立つ。且つ d_m は β の函数である事を考慮して $d_{m,\beta}$ と書けば一般解は

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{\beta} \sum_m \left[d_{m,\beta} e^{\frac{1}{2} \frac{\beta}{a} z} (\lambda^2 - v^2)^{-\frac{\beta}{2}} + \bar{d}_{m,\beta} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta+1)}{a} z} (\lambda^2 - v^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \right] e^{\frac{1}{2} \frac{\xi}{a} z} P_m^h(v). \quad (30)$$

茲に $\bar{d}_{m,\beta}$ は (26) 式に於て $\beta = -(\beta+1)$ とおいた時の連分數の解である。

§4. 軸對稱振動

$h=0$, 即ち軸對稱の時には (30) 式は

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{\beta} \sum_m \left[d_{m,\beta} e^{\frac{1}{2} \frac{\beta}{a} z} (\lambda^2 - v^2)^{-\frac{\beta}{2}} + \bar{d}_{m,\beta} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta+1)}{a} z} (\lambda^2 - v^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \right] e^{\frac{1}{2} \frac{\xi}{a} z} P_m(v). \quad (31)$$

で $d_{m,\beta}, \bar{d}_{m,\beta}$ は

$$\begin{aligned} & d_{m+4} \left[(m+4)(m+5) - p - \{2f^2(m+4)(m+5) + q\} \frac{(m+5)^2}{(2m+9)(2m+11)} \right. \\ & \quad \left. + \{(m+4)(m+5) - \beta(\beta+1)\} \frac{(m+5)^4}{(2m+9)^2(2m+11)^2} \right] \\ & + d_{m+2} \left[-\{2f^2(m+2)(m+3) + q\} \frac{(m+3)(m+4)}{(2m+5)(2m+7)} + \{(m+2)(m+3) - \beta(\beta+1)\} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{(m+3)(m+4)}{(2m+5)(2m+7)} \left\{ \frac{(m+5)^2}{(2m+9)(2m+11)} + \frac{(m+3)^2}{(2m+5)(2m+7)} \right\} \right] \\ & + d_m \{m(m+1) - \beta(\beta+1)\} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

(1) 此の解が成立するのは $f \geq 1$, 即ち 12 時間週期より短い振動に就いてある。之より長週期の振動に就いて別の解を考慮せねばならぬ。

$$\left. \begin{aligned} p &= f^2 \left[\frac{1}{4} f^2 \beta^2 + \left(\frac{1}{2} f^2 + 1 \right) \beta + \frac{1}{2} \xi f^2 - \frac{1}{4} \xi^2 f^2 + \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right], \\ q &= \left[\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} f^2 \right) \beta^2 + \left(-3f^2 + \frac{1}{2} \right) \beta + \frac{1}{2} \xi^2 f^2 - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right], \\ \bar{a}_{m+4} &= \left[(m+4)(m+5) - \bar{p} - \{2f^2(m+4)(m+5) + q\} \frac{(m+5)^2}{(2m+9)(2m+11)} \right. \\ &\quad \left. + \{(m+4)(m+5) - \beta(\beta+1)\} \frac{(m+5)^4}{(2m+9)^2(2m+11)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &+ \bar{a}_{m+2} \left[-\{2f^2(m+2)(m+3) + q\} \frac{(m+3)(m+4)}{(2m+5)(2m+7)} + \{(m+2)(m+3) - \beta(\beta+1)\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(m+3)(m+4)}{(2m+5)(2m+7)} \left\{ \frac{(m+5)^2}{(2m+9)(2m+11)} + \frac{(m+3)^2}{(2m+5)(2m+7)} \right\} \right] \\ &+ \bar{a}_m \{m(m+1) - \beta(\beta+1)\} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= f^2 \left[\frac{1}{4} f^2 (\beta+1)^2 - \left(\frac{1}{2} f^2 + 1 \right) (\beta+1) + \frac{1}{2} \xi f^2 - \frac{1}{4} \xi^2 f^2 + \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right], \\ \bar{q} &= \left[\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} f^2 \right) (\beta+1)^2 + \left(3f^2 - \frac{1}{2} \right) (\beta+1) + \frac{1}{2} \xi^2 f^2 - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{k^2 a^2}{c_L^2} (f^2 - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

を満足する。

今後此の軸對稱の場合に就いての議論をし、簡単な境界条件を用ひて β に関する和を除いて考へる事にする。

補 遺

$\omega=0$, 即非迴轉地球上の振動は Lord Rayleigh の議論せる所で、之に關しては筆者が「海と空」誌上で批判する筈である。此の場合には大氣の弾性の影響が卓越する、弾性振動とでも稱すべき長週期振動と、重力の影響が卓越する、重力振動とでも稱すべき短週期振動がはつきり別々に檢出されるのが特長である。

その場合得た重力振動の週期として (等温大氣の假定)

$$T = \frac{4\pi H}{c_L}, \quad H = \frac{c_L^2}{g}.$$

之は普通一次元運動方程式より導かれる重力振動の週期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H_A}{g}}, \quad H_A = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{c}{g}$$

と異なるので、疑問を有さるゝ向きもあるかも知れぬが、最近 H. Solberg⁽¹⁾の研究によると水平次元

(1) H. Solberg: Schwingungen und Wellenbewegungen in einer Atmosphäre mit nach oben abnehmender Temperatur. Astrophys. Norveg., 2, 123-172 (1936).

が垂直次元に比して無限に大きい境界面内に起る重力振動の週期は前者で與へられ、垂直次元が水平次元に比して無限に大きい境界面内の重力振動の週期は後者によつて與へられる事を證明してゐる。此の事で了解出来るだらう。

要 報

凝 結 高 度 の 分 布 と 雷 の 發 生*

荒 川 秀 俊

我々は氣象學の教科書又は論文を繙くと、屢々「大氣が條件付不安定又は潜在不安定の状態にある場合には、雷雨や地形性降雨が起り易い。そして大氣下層の濕度が高く、凝結高度が低いときには雷雨等が起つて不安定を解消し易いが、下層の濕度が低くて、凝結高度が高いときは例へ大氣が不安定の状態にあつても雷雨等は仲々おこらない」といふ定説が書いてあるのを見る。凝結高度の高低が大氣不安定の解消の機縁として重要なものであるならば、一定時における地上の同時觀測結果から求められる凝結高度を白地圖上に記入し、その高低を指示する等高度線圖を畫けば、雷雨豫報、警報に役立つのではあるまいかと思はれる。筆者は昭和 13 年夏、九州地方の雷雨豫報、警報發布のため福岡支臺に宛められた觀測により毎日午前 9 時と正午との等凝結高度線圖を畫き、天氣現象特に雷雨と關係があるか、どうかを調べて見た。

九州と山口縣の一部とにまたがる約 70 箇所の觀測を整理したのである。毎日午前 9 時と正午との二回に前記觀測地點で乾球溫度と濕球溫度とを觀測し、主なる觀測所約 20 箇所では乾球溫度、濕球溫度は勿論のこと氣壓をも觀測する。氣壓を觀測しない觀測地點の分は、近くにある氣壓觀測をも行ふ觀測所の報告を參考にし氣壓を推定して、夫々の觀測地點における氣壓とした。そして斷熱圖を用ひて、觀測された氣壓と乾球溫度、濕球溫度とから凝結層の氣壓を求めた。凝結高度を一々求めるのは厄介なので、凝結層の氣壓を以て凝結高度の目安とした。こうして各觀測地點における凝結層の氣壓を白地圖上に書き込んで、其等壓線

を畫いて見た。凝結層の氣壓の高い中心は、大體凝結高度の低いことを意味し、氣壓の低い中心は、凝結高度の高いことを意味する。(尤もこの敘述は正確に言へば正しくはない、後段參照) 以上簡單のために凝結層の氣壓をかき込んで、等壓線を畫いたものを等凝結高度線と呼ぶことにしよう。

8 月 1 日から 23 日までの等凝結高度線圖によると、地雨式の降雨のない日に凝結高度が九州全般に互り低くなると雷雨が頻發した。例へば第 1 及び第 2 圖には 8 月 20 日午前 9 時と正午の等凝結高度線圖を示す。第 1 及び第 2 圖に依れば阿蘇山、雲仙等の山間部にある地點における觀測を除けば九州の殆んど全部が氣壓 700 耗 (地上約 600 乃至 700 米) 以下に凝結層のあることを示す。福岡支臺發行の雷雨概況旬報によれば、

「(8 月 20 日) 不連續線が朝鮮海峽にあり、北部地方に早手雷の發生を思はせたが 12 時 40 分日田盆地に、13 時には大山川上流に、14 時に阿蘇山西部に相次いで發生し、共に北乃至北西に進み 18 時過ぎ玄海灘に去つた。又長崎縣大村灣北部や北九州の洞海湾、博多灣等にも 15 時乃至 16 時頃局部的に起り北に進行した。此等は何れも強雷雨で……」

同日の雷雨の發生地、同鳴線及進行方向を第 3 圖に示す。

又第 4 圖には 8 月 12 日正午における等凝結高度線圖を示す。第 4 圖によると九州の殆んど全部が、氣壓 700 耗 (地上約 600 乃至 700 米) 以上に凝結高度のあることを示す。同日九州一帯に雷雨はなかつた。

* H. Arakawa: Thunderstorm Forecasting with the Aid of Charts representing the Topography of the Condensation Level.