要 報

Helmholtz 波の安定度に及ぼす中間層の影響*

櫻 庭 信 一

H. Solberg, C. L. Godske¹⁾に依ると Helmholtz 波 (一般的に不連続面に沿ふて起る波でよい) の安定度に作用する主なる因子は重力, 速度の切線歪力 (速度差に起因する影響で Scherungswirkung と呼ばれる) 及び地球廻轉による慣性力の三つである. 此の中で波の不安定化に作用する要素は Scherungswirkung だけであると云はれ, 低気圧の波動説に於ては最も重要な役割りを演ずる.

但し以上の結論は數學的に厚さの無い不連続面に就いて導かれたものであり, 實際大氣中に観測される不連続面は一般に轉移層と呼ばれる中間層を伴ふを普通とする.

従來の理論に依れば Scherungswirkung はあらゆる波長の波を不安定化する作用を示すが, 此の結果が中間層の存在に依つて如何に修飾されるかを調べたのが本文である.

本文の目的は Scherungswirkung を調べるのが目的であるから密度はすべて一様とする. 従つて重力の影響は全く利いて来ない.

一般流 $U(y)$ が y 丈の函数である様な流れの場を考へる. 然らば基本方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) 式は中間層である轉移層の微分方程式で茲では一般流速度が y の函数である. 今 $y=0, y=2b+b'$ なる剛體壁に囲まれた境界面を考へ, $y=b$ 及び $y=b+b'$ は夫々不連続面とする. 但し一般流は茲で連続である. 圖で示せば次の様である.

$y=0 \sim b$ 及び $y=b+b' \sim 2b+b'$ 間は一様流 U_1, U_2

で $y=b \sim b+b'$ が y と共に變化する一般流が存在する. 簡單の爲に中間層の一般流は y の直線函数である場合を取り扱ふ.

$$u = \bar{u} e^{i(ax + \beta t)}, v = \bar{v} e^{i(ax + \beta t)}, p = \bar{p} e^{i(ax + \beta t)} \quad (2)$$

とにおいて (1) 式に代入し $\bar{v}$ に對する方程式を作れば

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + U \right) \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{v} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \bar{v} = 0. \quad (3)$$

假定に依り三層共 $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$ を満足するから (3) の解は

$$\bar{v} = A \sinh \alpha y + B \cosh \alpha y \quad (4)$$

なる形で與へられる. 但し $\frac{\beta}{\alpha} + U \neq 0$ としてある.

境界條件として剛體壁で $\bar{v} = 0$, 不連続面で $\bar{v}$ 及び $\bar{p}$ の連續を要求する. $y=0 \sim b$ を第一層, $y=b \sim b+b'$ を第二層, $y=b+b' \sim 2b+b'$ を第三層として夫々脚符 1, 2, 3 を附すれば不連続面に於ける壓力の連續條件は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\beta}{\alpha} + U_1 \right) \left(\frac{d\bar{v}_2}{dy} - \frac{d\bar{v}_1}{dy} \right) - \bar{v}_2 \frac{dU}{dy} &= 0, \\ \left(\frac{\beta}{\alpha} + U_2 \right) \left(\frac{d\bar{v}_3}{dy} - \frac{d\bar{v}_2}{dy} \right) + \bar{v}_2 \frac{dU}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(y=b に於て)

(y=b+b' に於て)

(5) 式で $\frac{dU}{dy}$ は勿論第二層でだけ存在する速度傾度であり今後之を Δ で示す.

$\bar{v}$ に對する解として

* S. Sakuraba: The Effect of Intermediate Layer on the Stability of Helmholtzian Wave.

(1) C. L. Godske: Zur Theorie der Bildung aussertropischer Zyklonen, Met. ZS., 53, 445-449 (1936).

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= A_1 \sinh \alpha y, \\ \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + A_2 \sinh \alpha(y-b), \\ \bar{v}_3 &= \bar{v}_2 + A_3 \sinh \alpha(y-b'-b). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$[v_3]_{y=2b+b'}=0$ の条件より

$$A_1 \sinh \alpha(2b+b') + A_2 \sinh \alpha(b+b') + A_3 \sinh \alpha b = 0 \quad (7)$$

(5) 式より

$$A_1 \sinh \alpha b \Delta - A_2(\beta + \alpha U_1) = 0. \quad (8)$$

$$A_1 \sinh \alpha(b+b') \Delta + A_2 \sinh \alpha b' \Delta + A_3(\beta + \alpha U_2) = 0. \quad (9)$$

(7), (8), (9) より β に対する式を作つて

$$\begin{aligned} \beta^2 + \alpha(U_2 + U_1)\beta + \left[\alpha^2 U_2 U_1 - \frac{\Delta^2 \sinh^2 \alpha b \sinh \alpha b'}{\sinh \alpha(2b+b')} \right. \\ \left. + \frac{\alpha(U_2 - U_1)\Delta \sinh \alpha b \sinh \alpha(b+b')}{\sinh \alpha(2b+b')} \right] = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

$b \rightarrow \infty$ とおけば

$$\begin{aligned} \beta^2 + \alpha(U_2 + U_1)\beta + \left[\alpha^2 U_2 U_1 - \frac{1}{2} \Delta^2 e^{-\alpha b'} \sinh \alpha b' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \alpha(U_2 - U_1)\Delta \right] = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

$\Delta = \frac{U_2 - U_1}{b'}$ なる事は圖から明らかであるから、此の關係を代入して (11) 式の判別式を作れば

$$D = (U_2 - U_1)^2 \left[\alpha^2 + \frac{2e^{-\alpha b'} \sinh \alpha b'}{b'^2} - \frac{2\alpha}{b'} \right]. \quad (12)$$

$b' \rightarrow 0$ の時は $D = -\alpha^2(U_2 - U_1)^2$ なる普通の Helm-

holtz 波の式と一致してあらゆる波長の波は不安定であるが、中間層の存在する (12) 式は一般にそうはならない。

$$\alpha \text{ は波長 } L \text{ との間に } \alpha = \frac{2\pi}{L} \quad (13)$$

$$\text{なる関係があるから } L = \frac{2\pi}{n} b'^{(1)} \quad (14)$$

とおけば (12) 式の正負は結局

$$D'(n) = n^2 - 2n + 2e^{-n} \sinh n \quad (15)$$

の正負を検する事と等しい。

(15) 式は n が相當大きいと負、又相當小さい時は正になる事は容易に解る。簡単な數値計算によつて

$$D'(1.279) = +0.0004, \quad D'(1.278) = -0.0004$$

を知る。従つて零點として

$$n_0 = 1.2785$$

を選ぶ事にする。之は波長にして

$$L_0 = 4.91 b'$$

となる。

$$\text{即ち波長が } 4.91 b' < L^{(2)}$$

の範圍で不安定波、 $4.91 b' > L$

の範圍で安定波なるを知る。

従つて轉移層の厚さの 5 倍以上の波に就いては、安定度に關する限り、普通の Helmholtz 波と同様に取扱つてよい。

中緯度西風帶の安定度*

櫻庭 信一

最近矢島氏⁽³⁾は中緯度西風帶内の振動的運動と題した論文に於て示唆に富む論説を發表された。氏は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} - l v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + l u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

を基本式として採用してゐる。茲に x, y 軸は夫々東、北に向けて正にとる。従つて u, v は速度の東分、北分を示し、一般流 U (西風) は到る所一定とされてゐる。

但し氣象學上興味深いのは寧ろ一般流 U が y 方向に変化せる場に於て、何か擾亂が起つた場合に此の擾亂は發達するか減衰するかの研究であつて、之は申す迄も無く低高氣壓の發生條件と關係付けられる重要

(1) 斯くして得られた結果に、 $b' \rightarrow 0$ を施す事の許されない事は明らかである。

(2) 重力及び地球廻轉の影響は此の領域を狭くする様に働く丈である。従つて之は不安定波たり得る極大領域で、實際大氣に於ては更に小さい域内に制限されるは論を俟たない。

* S. Sakuraba: On the Stability of West Wind Zone in Temperate Latitudes.

(3) S. Yazima: Die oszillierende Bewegung des Atmosphärentürtels, Naturwiss. 26, 843-844 (1938).