$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= A_1 \sinh \alpha y, \\ \bar{v}_2 &= \bar{v}_1 + A_2 \sinh \alpha(y-b), \\ \bar{v}_3 &= \bar{v}_2 + A_3 \sinh \alpha(y-b'-b). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$[v_3]_{y=2b+b'}=0$ の条件より

$$A_1 \sinh \alpha(2b+b') + A_2 \sinh \alpha(b+b') + A_3 \sinh \alpha b = 0. \quad (7)$$

(5) 式より

$$A_1 \sinh \alpha b \Delta - A_2(\beta + \alpha U_1) = 0. \quad (8)$$

$$A_1 \sinh \alpha(b+b') \Delta + A_2 \sinh \alpha b' \Delta + A_3(\beta + \alpha U_2) = 0. \quad (9)$$

(7), (8), (9) より β に対する式を作つて

$$\beta^2 + \alpha(U_2 + U_1)\beta + \left[\alpha^2 U_2 U_1 - \frac{\Delta^2 \sinh^2 \alpha b \sinh \alpha b'}{\sinh \alpha(2b+b')} \right. \\ \left. + \frac{\alpha(U_2 - U_1)\Delta \sinh \alpha b \sinh \alpha(b+b')}{\sinh \alpha(2b+b')} \right] = 0. \quad (10)$$

$b \rightarrow \infty$ とおけば

$$\beta^2 + \alpha(U_2 + U_1)\beta + \left[\alpha^2 U_2 U_1 - \frac{1}{2} \Delta^2 e^{-\alpha b'} \sinh \alpha b' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \alpha(U_2 - U_1)\Delta \right] = 0. \quad (11)$$

$\Delta = \frac{U_2 - U_1}{b'}$ なる事は圖から明らかであるから、此の關係を代入して (11) 式の判別式を作れば

$$D = (U_2 - U_1)^2 \left[\alpha^2 + \frac{2e^{-\alpha b'} \sinh \alpha b'}{b'^2} - \frac{2\alpha}{b'} \right]. \quad (12)$$

$b' \rightarrow 0$ の時は $D = -\alpha^2(U_2 - U_1)^2$ なる普通の Helm-

holtz 波の式と一致してあらゆる波長の波は不安定であるが、中間層の存在する (12) 式は一般にそうはならない。

$$\alpha \text{ は波長 } L \text{ との間に } \alpha = \frac{2\pi}{L} \quad (13)$$

$$\text{なる関係があるから } L = \frac{2\pi}{n} b'^{(1)} \quad (14)$$

とおけば (12) 式の正負は結局

$$D'(n) = n^2 - 2n + 2e^{-n} \sinh n \quad (15)$$

の正負を検する事と等しい。

(15) 式は n が相當大きいと負、又相當小さい時は正になる事は容易に解る。簡単な數値計算によつて

$$D'(1.279) = +0.0004, \quad D'(1.278) = -0.0004$$

を知る。従つて零點として

$$n_0 = 1.2785$$

を選ぶ事にする。之は波長にして

$$L_0 = 4.91 b'$$

となる。

$$\text{即ち波長が } 4.91 b' < L^{(2)}$$

の範圍で不安定波、 $4.91 b' > L$

の範圍で安定波なるを知る。

従つて轉移層の厚さの 5 倍以上の波に就いては、安定度に關する限り、普通の Helmholtz 波と同様に取扱つてよい。

中緯度西風帶の安定度*

櫻庭 信一

最近矢島氏⁽³⁾は中緯度西風帶内の振動的運動と題した論文に於て示唆に富む論説を發表された。氏は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} - lv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + lu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

を基本式として採用してゐる。茲に x, y 軸は夫々東、北に向けて正にとる。従つて u, v は速度の東分、北分を示し、一般流 U (西風) は到る所一定とされてゐる。

但し氣象學上興味深いのは寧ろ一般流 U が y 方向に變化せる場に於て、何か擾亂が起つた場合に此の擾亂は發達するか減衰するかの研究であつて、之は申す迄も無く低高氣壓の發生條件と關係付けられる重要

(1) 斯くして得られた結果に、 $b' \rightarrow 0$ を施す事の許されない事は明らかである。

(2) 重力及び地球迴轉の影響は此の領域を狭くする様に働く丈である。従つて之は不安定波たり得る極大領域で、實際大氣に於ては更に小さい域内に制限されるは論を俟たない。

* S. Sakuraba: On the Stability of West Wind Zone in Temperate Latitudes.

(3) S. Yazima: Die oszillierende Bewegung des Atmosphärentgürtels, Naturwiss. 26, 843-844 (1938).

な問題である。即ち U が緯度変化をしない (y 方向に變化しない) 場合に於ては如何なる波長の波も安定であり、元來低氣壓の波動説が不安定波の理論である事と照らし合せて、あまり意味の無い事が解らう。座標を矢島氏の場合と同じく選び、地球廻轉の影響を無視した非壓縮性完全流體の方程式は、 U を y だけの函數とおいて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$u = \bar{u} e^{i(ax + \beta t)}, v = \bar{v} e^{i(ax + \beta t)}, p = \bar{p} e^{i(ax + \beta t)} \quad (2)$$

とおけば連續の方程式から

$$\bar{u} = -\frac{1}{i\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy} \quad (3)$$

(3) を運動方程式に代入して壓力の項を消去すれば $\bar{v}$ に対する方程式として

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + U \right) \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{v} \right) - \bar{v} \frac{d^2 U}{dy^2} = 0. \quad (4)$$

今 $\frac{d^3 U}{dy^2} = 0$ を満足する場合を考へる事にすれば、 $\beta + \alpha U \neq 0$ として

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{v} = 0. \quad (5)$$

解は $\bar{v} = A \sinh \alpha y + B \cosh \alpha y$. (6)

今次圖で示される様な速度分布を考へる。

上圖は $y=0 \sim b$, $y=b \sim b+b'$, $y=b+b' \sim 2b+b'$ の三つの異なる速度分布から成る層を示す。茲に $b'=2b$ の關係があり、 $y=b$ に於る一般流速度は $-V$, $y=b+b'$ に於る一般流速度を $+V$ とすれば、 $y=0 \sim b + \frac{1}{2}b'$ は

大體赤道東風帯の風速分布に對應し、 $y=b + \frac{1}{2}b' \sim 2b+b'$ は中緯度西風帯の速度分布に對應する。速度の増加は圖に示す如く、 y に就いて直線的に行はれるとする。然らば各風帯に就いて (6) 式が適用される。

境界條件は各不連續面に於て v は連續、 p は連續なる事を要求する。後者は

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + U \right) \Delta \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right) - \bar{v} \Delta \left(\frac{dU}{dy} \right) = 0. \quad (7)$$

茲に $\Delta \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right)$ 及び $\Delta \left(\frac{dU}{dy} \right)$ は $\frac{d\bar{v}}{dy}$, $\frac{dU}{dy}$ の不連續面に沿ふ飛躍を示す。此の後者の値は圖から解る様に

$$\left. \begin{aligned} y=b \text{ に於て, } \Delta \left(\frac{dU}{dy} \right) &= V \left(\frac{2}{b'} + \frac{1}{b} \right) = \delta \text{ (put),} \\ y=b+b' \text{ に於て, } \Delta \left(\frac{dU}{dy} \right) &= -\delta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。然らば週期方程式は前の筆者の Helmholtz 波⁽¹⁾の議論の (10) 式に於て

$$U_1 = -V, U_2 = V, \Delta = \delta \quad (9)$$

としたものに等しく、結局

$$\beta^2 = \left[\alpha^2 V^2 + \frac{\delta^2 \sinh^2 \alpha b \cdot \sinh \alpha b'}{\sinh \alpha (2b+b')} - \frac{2\alpha V \delta \sinh \alpha b \cdot \sinh \alpha (b+b')}{\sinh \alpha (2b+b')} \right]. \quad (10)$$

$$\text{上式を } b'=2b, \alpha = \frac{2\pi}{L} = \frac{n}{b} \left(\therefore L = \frac{2\pi}{n} b \right) \quad (11)$$

とおいて整頓すれば

$$\frac{b^2 \beta^2 \sinh 4n}{V^2} = n^2 \sinh 4n + 4 \sinh^2 n \cdot \sinh 2n - 4n \sinh n \cdot \sinh 3n = F(n) \text{ (put).} \quad (12)$$

(12) 式は n が大きいと正になつて β は實數となるが、 n が小さくなると (即ち波長が b に比して大きくなると) β は虚數となり、波は不安定化する。此の臨界點は大體

$$F(n=0.9) = -0.1357, F(n=1.0) = +0.2261 \quad (13)$$

から推定される。もつと精確な値も求められるが、大して意味はないから省略して大略 $n=1.0$ を臨界値としよう。

然らば不安定化波長の臨界値として (11) 式より

$$L_c = 2\pi b. \quad (14)$$

b は緯度にして $15^\circ, 30^\circ$ 間の長さで約 3200 km 程度に相當するから

(1) 櫻庭信一：Helmholtz 波の安定度に及ぼす中間層の影響，氣象集誌（本誌）。

$$L_c \approx 10,000 \text{ km}$$

が大體の値である。實際問題としては 1000 km 程度の波長が不安定化するとして満足すべきであるに對し、10,000 km は大き過ぎる嫌ひがある。然し、二次元運動として取り扱つてゐる爲、大氣の高さは無限に大きいと假定せる事となり、之は實狀と離れる事大なるものがある。且つ地球廻轉の影響を無視せる事及び地球の球體を平面として取り扱つた事は、此の様な長波に對して許すべからざる假定である事を思へば、 $L_c = 10,000 \text{ km}$ は寧ろ合ひ過ぎると云つても過言でないだらう。要するに斯様な西風帶と東風帶の連系に於て發生する擾亂波の波長が或る臨界値を越へると不安定化して渦卷化する傾向のある事は注目に値しよう。

低氣壓波動説に就いて 以上の計算は諸威流の低氣壓波動説と對比して興味深い。即ち波動説に於て要求される不連続面は Hadamard の零次の不連続面（普通の不連続面）であり、茲で提出されたものは Hadamard の第一次不連続面に外ならない。從來は此の第一次不連続面は波が發生するに甚だ都合の悪い存在とされて來たが、本文の計算は必ずしもさうでない事を強調する。即ち本文で與へた數式を點檢すれば直ちに

了解される様に、變位は此の第一次不連続面に沿ふて最大であり、波の勢力が不連続面に沿ふて集つてゐる點で零次の不連続面と何等變りはない。

一時問題となつた事であるが、圈界面は零次の不連続面と云ふよりは寧ろ第一次の不連続面と見做される爲（之は理論的に考へ難いと云ふ事を Ertel⁽¹⁾ が證明してゐるが）、獨逸學派の低氣壓發生説が非難された事があつたが、1000 km 程度の長波長の波を議論する限り、波の勢力が此の面に集積されるには零次たると第一次たるとを問はないものである。

斯様に速度の不均質分布だけで、Helmholtz の提出した様な不連続面が無くとも不安定擾亂波が發生し得る事は注目に値しよう。

此の不安定擾亂波のセンスは直ちに解る様に、西風帶と赤道東風帶と連なる所では高氣壓性廻轉で、極東風と連結する所では低氣壓性廻轉となる。後者は極前線論の一證明ともならう。低氣壓の渦度は勿論一般母流の渦度から培はれるものであり、従つて以上の結論は特別に前に出した數式の吟味を必要とせずとも明らかである。

平均値に關する若干の注意*

荒 川 秀 俊

氣象學や氣候學では、算術平均値をとつて論ずることが多い。さうして観測が多いとき程、信用度は高いと考へられて居る。これは果して眞實であらうか？

假令ば n 箇の自變數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の函數 $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ があるとする。この關係は箇々の場合には嚴密にあてはまるとする。かゝる場合に m 組の観測

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1}), \\ y_2 &= f(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n,2}), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f(x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \end{aligned} \right\}$$

を行つたとする。扱て平均値を

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^m x_{1,i}/m, \bar{x}_2 = \sum_{i=1}^m x_{2,i}/m, \dots, \bar{x}_n = \sum_{i=1}^m x_{n,i}/m.$$

及び

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m y_i/m$$

とおく。そのとき

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

なる關係は必ずしも成立しない。

解析學における一定理によれば、

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (1)$$

が、各變數 x_i につき閉じた變域 $a_i \leq x_i \leq b_i$ に於て定義され

(1) H. Ertel: Die Arten der Unstetigkeiten des Windfeldes an der Tropopause, Met. Zs., 53, 450-455 (1936).

* H. Arakawa: Mittelbildungen bei klimatologischen Untersuchungen.