$$v_{\infty}=10 \text{ m/sec}, \quad p_0=760 \text{ mm},$$

と見て見る。この場合の気温分布は第 3 圖の通りで、下層は次第に安定になつて居る。従つて流れは、特に下層では層流をなし、天気はよく、暑くて濕潤になるわけである。気温遞減率は減少し、高所に気温の逆轉がおこる。混合比は持続的で仲々變化しない。高緯度地方における暖氣の層位は霧を發生せしめ、しかも持続させる作用がある。第 3 圖は大氣の垂直斷面の構造を示すもので、逆轉層の發生と霧の出来る高さとは判然とわかる。

以上で氣塊論の基本定理を剩す所なく證明し得たやうに思ふ。

終りに臨み、畏友大谷東平氏の示唆に對し謝意を表する。

不均質彈性體のラブ波に就て*

本 間 正 作

1. 緒 言

以前妹澤博士⁽¹⁾は彈性率が地表面からの深さの一次式で増大する半無限彈性體の表面にラブ波と同じ型の表面波が傳播し得る事を研究されたが、之に就て私は更に充分の吟味を要する事を述べて置いた。⁽²⁾其後、數値計算未了で居つたが、最近河角博士と佐藤泰夫氏は他の問題と一緒に、唯今の問題の御研究を完了されたと同つたのであるが、私の解法も異つて居る様であり、又密度の變る場合の吟味も若干行つてあつたから、一應報告させて頂く事にした。

2. 解 式

解法及び記號は妹澤博士に依る。即ち圓塲座標 (r, θ, z) を採り、彈性體の表面は $z=d(d>0)$ に置き彈性體は $z \geq d$ の範圍を占めるものとす。變位の (r, θ) 成分を (u, v) と置くと、

$$u = 2B_m \frac{m}{k^2} \varphi(z) \frac{H_m^{(2)}(kr) \cos \theta}{r \sin \theta} \left\{ (m\theta) \cdot e^{\pm i m \theta} \right\},$$

$$v = -2B_m \frac{1}{k^2} \varphi(z) \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \cdot \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} \left\{ (m\theta) \cdot e^{\pm i m \theta} \right\}.$$

但し $\varphi(z)$ は次の (1), (2) を満足し $z \rightarrow \infty$ で 0 となる。

$$z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + \left(\frac{\rho p^2}{c} - k^2 z \right) \varphi = 0, \quad \left[\frac{d\varphi}{dz} \right]_{z=d} = 0. \quad (1), (2)$$

此處に彈性分布は

$$\mu = cz \quad (3)$$

* S. Honma: The Love Wave in a Heterogeneous Medium. 中央氣象臺彙報.

(1) 妹澤克惟: 地震研究所彙報, 9 (1931), p. 310. (2) 昭和 13 年 4 月發表, 驗震時報に印刷中.

で與へられて居る。

扱て、妹澤博士に従ひ、

$$2\alpha = 1 + \frac{\rho p^2}{kc} = 1 + \frac{V^2}{b_0^2} kd \quad \therefore \alpha \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

なる α を導き、(但し V は考へる表面波の位相速度、 b_0 は横波の速度 b の表面に於ける値)

$$x = kz, \quad h = kd \quad (5)$$

と置き直すと、(1), (2) は次の如くなる。

$$x \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + \frac{d\varphi}{dx} + (2\alpha - 1 - x)\varphi = 0, \quad \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=h} = 0. \quad (6), (7)$$

(1) の解を次の積分型に假定す。

$$\varphi = \int_K e^{-xt} T(t) dt.$$

但し K は複素数 t の平面上の積分路である。之を (6) に入れて部分積分すると

$$\int_K \left[\frac{d}{dt} \{ (t^2 - 1)T \} + (2\alpha - 1 - t)T \right] e^{-xt} dt - \left[(t^2 - 1) \cdot T e^{-xt} \right]_K = 0.$$

第一項の被積分函数が恒に 0 となる爲には、 $T = \frac{(t+1)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha}$ 。之に對し第二項が 0 となる K は第 1 圖の K, K' の 2 個である。但し之等は $R(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で $+\infty$ に赴く事を要する。しかるに $x \rightarrow \infty$ で K' の方は發散するが、 K の方は到る處 $R(t) > 0$ にとれるから $\varphi \rightarrow 0$ となり表面波に相當する解を與へる。故に A を任意の常數とし、

$$\varphi = A \int_{\infty}^{1+} e^{-xt} \frac{(t+1)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha} dt, \quad (8)^{(1)}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -A \int_{\infty}^{1+} e^{-xt} \frac{t(t+1)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha} dt. \quad (9)$$

故に (7) は

$$\int_{\infty}^{1+} e^{-ht} \frac{t(t+1)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha} dt = 0. \quad (10)$$

(4) により $\alpha \geq \frac{1}{2}$ であるが、 $1 > \alpha \geq \frac{1}{2}$ の時 (10) に根は無い。夫は K を變形して $t=1$ の周圍の小圓と $t > 1$ の部分の實軸上の積分とに分けると、小圓上の積分はその半径と共に 0 となり、實軸上の積分は明らかに、あらゆる h, α の組合に對し 0 とならぬ事から分る。故に $\alpha \geq 1$ である。

(1) 若干の計算の後 $\varphi = A \frac{(-)^{\alpha} 2\pi i}{\Gamma(\alpha) \sqrt{2x}} W_{\alpha-\frac{1}{2}, 0}(2x)$ と書ける事が分る。但し W は Whittaker の Confluent Hypergeometric Function である。(Whittaker and Watson; Modern Analysis (2nd ed.) p. 333) 之を用ひると (7) は $W_{\alpha-\frac{1}{2}, 0}(2h) = 4h W'_{\alpha-\frac{1}{2}, 0}(2h)$ と書ける。河角博士はこの解を利用されたと伺つたが、私は計算の都合上、之を用ひる事を避けた。

第 1 圖

3. h の大ならざる時の算定法

$h = kd = \frac{2\pi d}{L}$ (L は波長) だから, h が 1 附近或ひは夫より小と云へば實用問題としては, 甚だしく大きな波長を想定する事になり, 地球の曲率を無視出来ぬ筈であるから, 最早や弾性の不均一性が波長に對して極めて弱いから, 深さに對して振幅の減小する割合も弱く, 何れにしても驗震學上の興味は比較的少い問題であると思はれる. 先づ (10) を次の如く書き直す.

$$I_a(h) + I_{a-1}(h) = 0, \quad (11)$$

但し
$$I_a(h) \equiv \int_{\infty}^{1+} e^{-ht} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^a dt. \quad (12)$$

然るに部分積分により $I_a = \frac{1}{h} \int_{\infty}^{1+} e^{-ht} d \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^a$ であるから, 積分路を第 2 圖の如く實軸上の一點 $t=N$ より ∞ 迄と, 一つの圓周に分ける. この圓周は $\frac{t+1}{t-1} = \tau \cdot e^{i\theta}$ の τ が一定である様な軌跡である.

第 2 圖

$$\therefore I_a = \frac{i\alpha\tau^a}{h} \int_0^{2\pi} e^{-h\tau^2 \frac{1-2i\tau \sin \theta}{\tau^2 - 2\tau \cos \theta + 1} + i a \theta} d\theta \\ + (1 - e^{-2\pi i a}) \int_{\infty}^N e^{-ht} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^a dt,$$

但し
$$N = \frac{\tau+1}{\tau-1}. \quad (13)$$

今
$$P(\theta) \equiv \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 - 2\tau \cos \theta + 1}, \quad Q(\theta) \equiv \frac{2\tau \sin \theta}{\tau^2 - 2\tau \cos \theta + 1} \quad (14)$$

とおき I_a は實數部を採る事にすると,

$$I_a = -\frac{\alpha\tau^a}{h} \int_0^{2\pi} e^{-hP} \sin(hQ + \alpha\theta) d\theta + \{1 - \cos(2\pi\alpha)\} \int_{\infty}^N e^{-ht} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^a dt. \quad (15)$$

τ を十分 1 に近く採る時 N は大きく成るから (15) の右邊第二項は $O(e^{-hN})$ で小さく出来る. 同様な式は I_{a-1} についても成立するから, 夫等で第二項を省略すると, (11) は

$$\int_0^{2\pi} e^{-hP} \sin(hQ + \alpha\theta) d\theta + \frac{\alpha-1}{\alpha\tau} \int_0^{2\pi} e^{-hP} \sin(hQ + (\alpha-1)\theta) d\theta \doteq 0.$$

之を若干計算すると,

$$\left[\int_0^{\pi} X(\theta) \sin \{\alpha(\pi-\theta)\} d\theta + \int_0^{\pi} Y(\theta) \cos \{\alpha(\pi-\theta)\} d\theta \right] \\ - \frac{\alpha-1}{\alpha\tau} \left[\int_0^{\pi} X(\theta) \sin \{(\alpha-1)(\pi-\theta)\} d\theta + \int_0^{\pi} Y(\theta) \cos \{(\alpha-1)(\pi-\theta)\} d\theta \right] \doteq 0, \quad (16)$$

(1) 吉山良一: 地震. 10 (1938), 272 頁.

$$\text{但し} \quad X(\theta) \equiv e^{-hP} \sin(hQ), \quad Y(\theta) \equiv e^{-hP} \cos(hQ). \quad (17)$$

X, Y は α に無関係に計算出来、之に對し色々の α を假定して (16) の左邊の積分を數値積分すれば、之が 0 となる α を求める事が出来る。⁽¹⁾ θ が 0 に近い時は Q が大きいので X, Y が振動が劇しいが、そこでは又 P も大きいから全體の振幅が小さく、積分に寄與する分量は少くない。 h が相當小さい時でも、夫に應じて τ を 1 に近付ければ有効に計算を行ひ得る筈である。第 3 圖の分散曲線上の白點は $\tau=1.14$ に置いて求めたものである。⁽²⁾ ずつと h が小さく成ると分散曲線は漸近拋物線 $\frac{V}{b_0} = \sqrt{\frac{L}{2\pi d}}$ を持つ様になる。⁽³⁾

4. h の大きい時の算定法

h が大きいと α も從つて大きく成る。夫で今度は α を與へて h を求める様にする。 α を整数に與へると極めて簡單になる。即ち斯る場合は $t=1$ が t 平面で極に成る。從つて積分路は $t=1$ を圍む閉曲線に出来、留數の定理で I_α を計算出来る。即ち

$$I_\alpha = \frac{2\pi i}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} \left\{ e^{-ht}(t+1)^\alpha \right\} \right]_{t=1},$$

$$\frac{e^h}{4\pi i} I_\alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!2!}(2h) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!3!}(2h)^2 - \dots \quad (4)$$

之は α が整数だから $(2h)^{\alpha-1}$ の項で終る。從つて (11) は例へば次の如き代數方程式になる。

$$\begin{aligned} \alpha=2 \quad & 3-2h=0, \\ \alpha=3 \quad & 5-8h+2h^2=0, \\ \alpha=4 \quad & 21-54h+30h^2-4h^3=0 \quad \text{等々.} \end{aligned}$$

之等は、一般に $\alpha-1$ 個の正の實根を有し、地中に節平面を生ぜぬ様な解は最大の根を求めればよい。 $\alpha \rightarrow \infty$ に從つて $h \rightarrow \infty$ になるが、物理的に考へれば $h \rightarrow 2\alpha-1$ になるものと想像される。夫は (4) を

$$2\alpha-1 = \frac{V^2}{b_0^2} \cdot h \quad (4')$$

と書直せる事及び $h \rightarrow 2\alpha-1$ が深さと共に減衰せぬ横波の解として成立する事より分る。解析的證

(1) (16) 式の $\frac{\alpha-1}{\alpha\tau}$ は正確には $\frac{\alpha-1}{\alpha\tau} \left[1 - \frac{h}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\tau^{\alpha-1}} \left\{ (1-\cos 2\pi\alpha) \int_\infty^N \dots \right\} \right]$ となるから假令 $\alpha \rightarrow 1$ でも $\frac{1-\cos 2\pi\alpha}{\alpha-1} \rightarrow 0$ となり $\int_\infty^N$ の項が效いて來る事は無い。

(2) 分散曲線が無数にある事は、前に一般的に證明して置いた。その内、第一次のものは α の一番小さい値で、(17) は之の計算には用ひ得るが、高次のものは α が大きく成る爲 $\sin(\alpha\pi-\theta)$ 等の振動性が劇しく數値積分の精度が落ちる。大體被積分函數を小数以下 6 桁まで計算し θ を 3° づつ區切つて Simpson の積分を行ふと小数以下 3 桁迄完全に正しい程度の精度が得られた。

(3) (17) の極限を探ると $h \rightarrow 0$ が $\alpha \rightarrow 1$ に對應する事が調明出来るが餘りくどくなるから省略する。

(4) $e^{-ht}(t+1)^\alpha$ を $(t-1)$ の冪級數に開いて $(t-1)^{\alpha-1}$ の係數を残す。

明は得られなかつたが、數値計算の結果もその様な傾向にある。⁽¹⁾ 以上の方法で求めた分散曲線の一部を第 3 圖に掲げる。

$L=0$ で $\frac{dV}{dL} \rightarrow \infty$ の事は容易に證明し得る。

5. 密度も一次式で變化する場合

弾性率の他に密度も深さの一次函數で變化する場合を考へる。密度の配分を

$$\rho = r + sz, \quad (\rho_0 = r + sd) \quad (18)$$

で與へると⁽²⁾(1) の代りに

$$z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + \left\{ \frac{p^2 r}{c} - \left(k^2 - \frac{p^2 s}{c} \right) z \right\} \varphi = 0 \quad (19)$$

となるから、密度の變化が比較的緩で $r > 0$, $\frac{sd}{\rho_0}$ が小で

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{p^2 s}{k^2 c}} = \sqrt{1 - \frac{sd}{\rho_0} \left(\frac{V}{b_0} \right)^2} \quad (20)$$

が實數の時は、

$$x = k\beta z, \quad h = k\beta d, \quad (21)$$

$$2\alpha - 1 = \frac{r}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{V}{b_0} \right)^2 h \quad (22)$$

と置くと (19) 及び境界條件は

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + (2\alpha - 1 - x) \varphi = 0, \quad \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=h} = 0$$

となり、(6), (7) と同一だから α, h の對應も前節で求めたものと同一となる。故に (20), (21), (22) を使つて $\left(\frac{V}{b_0} \right)$ と kd の關係を決定出来る。即ち

$$\left(\frac{V}{b_0} \right)^2 = \frac{\frac{2\alpha-1}{h}}{1 + \left(\frac{2\alpha-1}{h} - 1 \right) \frac{sd}{\rho_0}}, \quad kd = h \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{2\alpha-1}{h} - 1 \right) \frac{sd}{\rho_0}}{1 - \frac{sd}{\rho_0}}} \quad (23)$$

従つて、 s は負でもよいが $1 + \left(\frac{2\alpha-1}{h} - 1 \right) \frac{sd}{\rho_0}$ が負になる程度に絶対値が大きく成つてはいけない。 $\left| \frac{sd}{\rho_0} \right| \ll 1$ であれば、

$$\left(\frac{V}{b_0} \right)^2 = \frac{2\alpha-1}{kd} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha-1}{kd} \right)^2 \frac{sd}{\rho_0}, \quad kd = h + \frac{2\alpha-1}{2} \frac{sd}{\rho_0} \quad (23')$$

が使へる。次に $\frac{sd}{\rho_0}$ が正で 1 より大きいと、上の關係が成立する爲には $\frac{V}{b_0} < 1$ を必要とするから不

(1) h の極めて大きい時は h の値に對して α を $\frac{h+1}{2}$ の近くの 2, 3 の整数に假定して α 次の判別代數方程式の値を大體求め、之を 0 とする α を圖式に求める事が出来ると思ふ。

(2) $\rho = \text{一定}$ は $r = \rho_0, s = 0$ で與へる。

第 3 圖

合理である。(1)この時は

$$\bar{\beta} = \sqrt{\frac{sd}{\rho_0} \left(\frac{V}{b_0} \right)^2 - 1} \quad (24)$$

を實數とすれば

$$x = k\bar{\beta}z, \quad h = k\bar{\beta}d, \quad 2\alpha - 1 = \frac{r}{\rho_0} \frac{1}{\bar{\beta}^2} \left(\frac{V}{b_0} \right)^2, \quad (25)$$

と置いて (19) に代りて

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + (2\alpha - 1 + x)\varphi = 0 \quad (26)$$

となる。之を 2 節で述べた方法で積分表示すると、 $\varphi = A \int_K e^{-xt - \frac{2\alpha-1}{2} t \log \frac{t+i}{t-i} (1+t^2)^{\frac{1}{2}}} dt$ となる。但し積分路 K は第 4 圖に示す。この K_1, K_2 は何れも $R(t) < 0$ の區域に跨るから、兩方の特解を如何様に組合せても $x \rightarrow \infty$ で發散し表面波にはなるまいと考へられる。次に r が負の時は $\frac{sd}{\rho_0} > 1$ 故 β が實數に成る解は成立せぬ。 $\bar{\beta}$ が實數の時は (26) の代りに

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \{-(2\alpha - 1) + x\} \varphi = 0$$

が来るが、之も (26) の場合と同理により表面波とならぬ事が言へる。即

ち ρ が深さの一次函數の場合で表面波が成立するのは本節の冒頭に述べた $r > 0, \beta = \text{實數}$ の場合に限る。

6. 結 言

以上述べた事により、妹澤博士の論ぜられた様な不均質半無限弾性体の表面波は存在するが、その位相速度は、以前に一般的に證明して置いた様に表面に於ける横波の速度より決して遅くはあり得ない事が分つた。又密度も深さと共に變化する場合の議論も行つた。然し目下の状態では、之等の波動の驗震學的興味は割合に寡いものと思はれる。

終りに臨み貴重な御研究の概要を御報告賜つた河角博士に深甚の謝意を表し、又常に御鞭撻頂く水戸測候所長高谷技師及び種々の御注意を頂いた森田技師に厚く感謝致す次第である。

(昭和 14 年 10 月、於水戸測候所)

〔附記〕 微分方程式の解が唯今の場合の如く Laplace の變換 $\int_K e^{-xt} \Pi(t) dt$ の型に與へられ、特性方程式の根を求めるのが、この積分を行ふ事に依つて得られる場合は随分多い。その時、冪級數や漸近級數に展開したり、鞍點法を利用出来る様な場合も多いが中にはさう言ふ便宜の得られない場合もある筈である、そ

(1) 解析的に證明する事も容易であるが、 $\frac{V}{b_0}$ で判定する事は前の論文で一般的に證明した。

第 4 圖

の時は數値積分をすればよいわけであるが、 t 平面上で積分に寄與する分量が充分小さく成る區域が定められるなら、その區域を包む曲線上の任意の一點より、他の一點迄を最も積分し易い路に沿ふて積分する事により、計算を多少でも樂にし得る場合があると思ふ。第 3 節の方法は左様な點に留意したわけでは無いが、一例を示す事になつて居ると思ふ。

八戸沖海水溫度に關する統計的調査 (第一報)*

檜 山 國 雄

§1. 緒 言

東北凶冷の近因たる高氣壓蟠踞の對象として、或は直接的な物理的過程に依て互に影響し合ふ氣溫との問題に關聯し、海水溫度の研究^{(1)~(6)}は既に屢々人口に膾炙され來つた。著者は是等の大問題とは別個に、八戸で觀測された範圍で、海水溫度に就き先づ二三統計の結果を示し、漸次氣溫との關係に就き言及したいと思ふ。

八戸測候所では附屬船親潮丸 (17 噸半) を以て定期的に海洋觀測を開始してから 3 ケ年を経過した。その内容は顛倒寒暖計により、沿岸より 5 哩おき 20 哩迄の各層の測溫を以て第一義として居る。本調査では觀測回數の少い 15 哩以沖を割愛したから、沿岸を窺ふに過ぎない嫌は免れないが、詳細は何れ再検討せらるべき事を銘記して敢て筆を取つた次第である。

§2. 水溫の水平配布年變化

昭和 11 年 9 月より同 14 年 8 月迄の滿 3 ケ年間に於て、10 哩迄繼續して觀測し得た日數は冬季は寡いが全部で 188 回あつた。このデーターに依り、水溫水平配布の年變化を覗へば次の通りとなる (第 1 表、第 1 圖參照)。即ち表面 25 米、50 米 (A 點即沿岸は 30 米の値を以て假に代用せり) 等の各層の平均狀態に於ては、4 月及び 10 月を境として 5 月より 9 月に至る期間は

* K. Hiyama: Statistical Investigation of the Surface Temperature of the Sea off Hatinohe (I).

(1) 岡田、安藤、遠藤の諸博士及關、築地教授の研究を以て嚆矢とす。

(2) 岡田武松: 氣象學下卷第 11 章; 東北地方凶冷の原因, 天氣と氣候. 第 1 卷; 黒潮の水溫と東北凶冷の關係 同 第 3 卷等。

(3) 内桶 淑, 吉村睦勝: 海水溫度と氣溫との關係, 氣象集誌. 第 10 卷, 第 7 號; 宮野靖二, 木村 隼, 三宅靜雄: 海面溫度と氣溫との相關々係に就ての研究, 同 第 12 卷, 第 6 號; 野田誠一, 龜田 堇, 玉木章夫: 館野風速及び北太平洋海面溫度と東北 7, 8 月氣溫との相關, 同 第 17 卷, 第 7 號。

(4) 須田皖次: 日本近海表面水溫の異常分布, 中央氣象臺產業氣象報告. 第 4 卷; 高氣壓の若返り, 天氣と氣候. 第 2 卷; 豐凶作年次の北太平洋の水溫, 同 第 5 卷等。

(5) Tsukuda: On the Sea Fog in the North Pacific Ocean. Geophys. Mag. Vol. 6.

(6) 宇田道隆: 日本近海の廣海面上に於ける氣溫の分布, 氣象集誌. 第 12 卷, 第 8 號; 凶作年の海の低溫と其の豫想, 科學. 第 5 卷, 第 1 號等。