低 氣 壓 に つ い て (1)*

三 浦 武 亞

序論 従來の低氣壓に關する數多くの研究を内容から見て次の様に區分して見よう。觀測結果より歸納される經驗法則及び之を説明せんとする又は指導する理論法則である。この小文に於ては觀測による經驗から大體認容されたる低氣壓の性質を抜き出して一つの低氣壓に關するモデル (§3 に想定せるものを言ふ) について推論する事にする。この我々の言ふ低氣壓モデルが要求する發生條件、發達條件及び移動條件、を全部洩れなく第 1 報に於て報告する。

この想定されたモデル低氣壓が實際の低氣壓系 (所謂熱帶低氣壓・溫帶性低氣壓・龍卷) 高氣壓又は實驗室内の渦巻き等と同じ様なものであるか否かは次の様に考へれば明瞭である。仍ちモデル低氣壓に關して得られた上の條件を使用して實際に當て嵌まるかどうかによつて正否が判然と決まるわけである。

本論に立ち入る前に歴史的に低氣壓論を振り返つて見るに、従來の渦度の式は一點に關するものであつて實驗室外の低氣壓の様に大きなものに適用するのに不便であり、特に觀測所の分布が濃密になつてゐないため巨視的に渦度を論ずると言ふには適當でない。理論的には波動論等があるがいづれも未だ完成されて居らず、特に實際にそれらの理論を應用して直ちに効果を期待されない現状である。

ビヤークネスの循環加速の定理は傾壓大氣を問題にした點で優れたものであるが粘性を無視し又立體的な低氣壓を問題にして我々の要求する條件を満足するには至つてゐない。

今回の小文は實用に供し得る何等かの理論を出して之が實際の大氣に於ける、氣象要素の巨視的分布と組み合せてこの理論が當て嵌まるかどうかを試みようとするものゝ一つの試みである。

§1. 記 號

$\mathfrak{V}$ 風速度: u, v, w を x, y, z 方向の成分とす

$\mathfrak{U}$ 渦度 $\text{rot } \mathfrak{V} = 2\mathfrak{U}$

$\mathfrak{W}$ 地球自轉の角速度ベクトル $|\mathfrak{W}| = \omega$

$\mathfrak{F}$ 單位質量に働く外力

ρ 空氣の密度 R 普遍ガス常數 m 一グラム分子

p 大氣壓

φ 坐標の原點に關する緯度 = 北を正とする

* T. Miura: Contributions to the Theory of Barometric Depression. I. 中央氣象臺彙報.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 動的粘性係数

τ 考へてゐる空間 (單連空間を一般に採用する)

σ はその表面

t 時間坐標

n σ に対する内法線 (xy) 面に投射したものを η とする

ξ 水平な面と τ との交線 τ を左にして前方を正にとる

使用する變数は適當に可微分・連續なるものとする。

脚符 h は水平に關し

脚符 x, y, z, h, n 等はベクトルの夫々の脚符の方向に於ける成分を示す。

§2. 坐標及び運動方程式

坐標は地面に靜止せる觀測者について取る事にする x, y, z を直角右手系坐標にして

x —南, y —東, z —上

に取る事にする。

大氣は壓縮及び粘性のあるものとして考へて、ナビヤー・ストークスの運動方程式を採用する事にする。

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B} - 2[\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}] + \mathfrak{R} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \mathfrak{B} + \nu \nabla^2 \mathfrak{B} \quad (1)$$

$$\text{連續の式} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (p \mathfrak{B}) = 0 \quad (1)'$$

$$\text{空氣體の狀態方程式} \quad \rho \frac{R}{m} T = p \quad (1)''$$

§3. 渦度と低氣壓

低氣壓のモデルとして渦巻きによつて運動する空氣系を考へる事にする。乃ち次の様なものを想定する。

『本論で論ずる低氣壓は渦巻きであつて或鉛直軸の近くの空間 τ 内では鉛直渦度 $\mathfrak{L}_z$ が極大で、之より遠ざかるに従つて渦度が減少する風系なり、但し空間 τ の高さは適當に考へるものとする』

(2)

この如き低氣壓は一般の經驗と矛盾するものでない。本文では今後單に低氣壓と言へば特に斷らぬ限りかゝる意味で使用して置くものとする。又之は古くは藤原博士の研究その他により大體認められてゐる事實である。例へば最近のものでは室戸颱風についての山本・竹田兩氏の調査⁽¹⁾がある。

想定 (2) に従つて次の積分をつくつて見る

(1) 中央氣象臺. 室戸颱風調査報告 p. 115.

$$\iiint_{\tau} \mathfrak{U}_z d\tau \quad (3)$$

積分 (3) によれば低氣壓の發生・消滅・移動・發達・衰弱は夫々 (3) の値によつて定つて來る事は明瞭である。

§4. 渦度補給の式の擴張

渦度補給の微分方程式については既に Hesselberg, 藤原博士等により何回となく論議され渦度補給の各項についても藤原博士の説明がある⁽¹⁾最近又荒川博士⁽²⁾に依りベクトル計算による形の式が發表された, こゝに便宜のため壓縮性・粘性大氣に關する一般の式を示せば仍ち次の様になるのは周知の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{U} + \operatorname{div} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U} - (\mathfrak{U} \cdot \nabla) \mathfrak{B} \\ + (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B} + \operatorname{div} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B} \\ = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{R} - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \frac{\operatorname{grad} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathfrak{U} \end{aligned} \quad (4)$$

今後は $\mathfrak{R}$ をポテンシャルを持つものとして仍ち $\operatorname{rot} \mathfrak{R} = 0$ と考へる事にする。 (5)

こゝで (4)(5) より (4) の空間積分をとつて見よう。更に Z 成分だけを取る事にして $\iiint \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \mathfrak{U}_z d\tau$ なる事に注目する⁽³⁾。この積分について第 1 項以外は面積分に變換される。簡單な勘定により體積分に關するものは消えてしまつて結局の所として次の式を得る

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \mathfrak{U}_z d\tau = A + W + V + B \quad (6)$$

こゝに

$$\begin{aligned} A &= \iint (\mathfrak{B}_n \mathfrak{U}_z - w \mathfrak{U}_n) d\sigma \\ &= \iint \mathfrak{U}_z \mathfrak{B}_n \sin(n \cdot z) \cos(\eta, \mathfrak{B}_n) d\sigma - \iint \mathfrak{U}_n w \sin(n \cdot z) \cos(\eta, \mathfrak{U}_n) d\sigma \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W &= \iint (\mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_z - w \mathfrak{B}_n) d\sigma \\ &= \mathfrak{B}_z \iint \mathfrak{B}_n \cos(n \cdot \mathfrak{B}_n) d\sigma - \mathfrak{B}_x \iint w \cos(n \cdot x) d\sigma \end{aligned} \quad (8)$$

(1) 藤原博士, 大氣物理學 p. 131 但し脚註 4 参照。

(2) 昭和 16 年 5 月氣象集誌。 (3) τ は t の函數でないと思へてゐるから

脚註 4

(4) 式の第 5 項 $(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B}$ を z 成分について書けば $\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{B}_z$ となる。こゝに $\mathfrak{B}_z = \omega \sin \varphi$ であるが $\sin \varphi$ は常數である z 軸の方向が從つて原點をずらせなければこの坐標系について固有のものであつて一つの値しか持たぬものである。従つて $(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathfrak{B}_z$ は零となる。脚註 (1) 中の H_z 又は正野博士の論文に於ても之に相當する項を $\neq 0$ となる H_z に相當する項が出て居るが之は不要のものである。

$$V = -\nu \int \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial n} d\sigma \quad (9)$$

$$B = -\frac{1}{2} \int \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \sin(n, z) d\sigma \quad (10)$$

状態方程式 (1'') を使つて (10) を書き換へれば

$$= -\frac{1}{2} \frac{R}{m} \int \int T \frac{\partial \log p}{\partial \xi} \sin(n, z) d\sigma \quad (10')$$

かくて § 3 に定義したモデル低氣壓に關する所用の條件が (6) (7) (8) (9) (10) 又は (10') で與へられた。更に (10') は別の形にも表はし得る。

以上では (6)–(10') を導く途中の計算を全部省略して終つた。この途中の計算は差程面倒でなく普通の教科書にある部分積分の定理だけである。

檢算として (6)–(10') から逆に渦度補給の微分方程式 (4) をその z 成分について證明する事が出来る。即ち (6) は (4) と同等な内容を持つてゐる事が分る。

§ 5. モデル低氣壓に關する條件 A, B, W, V の吟味

以上の議論では氣象要素は空間内で連續で然も必要なだけ微分可能とした。之等については實際の大氣に應用する前に一應の吟味を必要とする。内部に所謂不連續面を含む場合にはどうなるか。

之に對する解答としては所謂不連面に於ける變化を有する有限ではあるが狭い距離に於ける連續な變化に置き代へても大した差を與へない事は明瞭である。かかる置き換へによつた氣象要素については早や何等連續に關して危險な何物もない事になる。従つて § 4 の結果は殆ど全ての場合に當筈と考へられる。

もう一つの問題は境界面が内部空間に存在する場合である。例へば塵埃・水滴・又は普通の物體がある時大勢に影響を及ぼす様な事がないかどうかである。

この場合物體内に空氣の流入がないものとすれば

$$\mathfrak{B}_n = 0$$

故に之等の面の一つが寄與する渦度は次の 4 つとなる

$$A_1 = - \int \int w \mathfrak{M}_n d\sigma$$

$$W_1 = - \int \int w \mathfrak{B}_n d\sigma = -w \int \int \omega \cos(n, \mathfrak{B}) d\sigma$$

$$V_1 = -\nu \int \int \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial n} d\sigma$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} \frac{R}{m} \int \int T \frac{\partial \log p}{\partial \xi} \sin(n, z) d\sigma$$

然し本文に於ては一先づ之等は省略する事にする。

従つて前 ξ の條件が満足されるのは空間内に固形物又は水滴の如きものを含まない空間である。

然し乍ら一般には之等の假定は上式よりみて物体が小さくて風に自由に流される様な慣性の小なる場合には大體無視されるものと見做す事にする。

要するに上の議論は完全な不連続面の存在を無視した場合について成り立つ事を言つたものであつて今後この假定を以て推論する必要あれば不連続を假定する事にする。

§6. A, W, V, B の夫々の大きさの吟味

之等補給の各項の大きさを見るため積分函数の大きさの見當をつけて見る事にする

$$A \dots \dots \{ \mathfrak{U}_z \mathfrak{B}_h \cos(\eta, \mathfrak{B}_h) - \mathfrak{U}_h w \cos(\eta, \mathfrak{U}) \} \sin(n, z)$$

$$B \dots \dots - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \sin(n, z)$$

$$W \dots \dots \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_h \cos(n, \mathfrak{B}_h) - \mathfrak{B}_x w \cos(n, x)$$

$$V \dots \dots - \nu \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial n}$$

各要素の大きさを次の大きさで見積る (e.g.s)

$$\mathfrak{U}_z = 10^{-5} \sim 10^{-4} \quad w = 10^{-4} \sim 10^0 \quad \mathfrak{B}_H = 10^2 \sim 10^3 \quad \nu = 10^4 \sim 10^5 \quad \mathfrak{U}_H = 10^{-3} \sim 10^{-2} \quad p = 10^6$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z} = 10^{-12} \sim 10^{-11} \quad \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial \xi} = 10^{-10} \sim 10^{-9} \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 10^{-5} \sim 10^{-4} \quad \frac{1}{\rho} = 10^3$$

之等は Hesselberg と Friedmann⁽¹⁾の與へたものであるが之を使へば $ABWV$ は夫々次の様になる

$$A \dots \dots (10^{-3} \sim 10^{-1}) + (10^{-5} \sim 10^{-2})$$

$$B \dots \dots 10^{-2} \sim 10^{-1}$$

$$W \dots \dots (10^{-2} \sim 10^{-1}) + (10^{-6} \sim 10^{-4})$$

$$V \dots \dots 10^{-6} \sim 10^{-4} \text{ (側面)} \quad 10^{-8} \sim 10^{-6} \text{ (上面)}$$

然し乍ら $\mathfrak{B}_z = \omega \sin \varphi$, $\mathfrak{B}_x = -\omega \cos \varphi$ であるから赤道に於ては $\varphi = 0^\circ \therefore \mathfrak{B}_z = 0 \quad \mathfrak{B}_x = -\omega$ となり地理的に分布せるものであるから、上式を使用するには注意を要するのは勿論である。

1 例として颱風についてこの大きさがどの程度のものになるか計算して見よう。低緯度に發生する場合であるから $|\mathfrak{B}_x| w \approx \omega \approx 10^{-4}$, $\delta w = 10 \text{ cm/sec}$ の差が南北の兩面にあるものとしよう。ヒリツピンの東の岡田博士の低氣壓谷について W に主に利いて來るのは $|\mathfrak{B}_x|$ によるものと考へ南北の長さを 1000 km として見る。渦度が 10^{-5} だけこの區域内に一樣に増加するには N 日を要する

(1) Hesselberg und Friedmann, Die Größenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Veröff Geophys. Inst. Univ. Leip. 1, 147-173 (1941) 文獻抄, 第1巻に抄録あり。

とすれば仍ちそのオーダーは

$$N \approx \frac{1000 \text{ cm} \times 10^{-5} / \text{sec}}{10 \text{ cm/sec} \cdot 10^{-4} / \text{sec}} \approx 10^6 \text{ sec} \approx \frac{10^6}{10^5} \text{ 日} = 10 \text{ 日}$$

の程度であるから数日乃至数十日間あれば大體颱風の卵程度の渦は Ω_x と w により補給される事が分り實際の物についても一概に W の第 2 項を無視する譯には行かない事が分る。

上は唯 W の第 2 項を簡単に吟味しただけであつて實際問題としては他の項を考慮しなければならぬ事は云ふ迄もない。

§ 結 言

以上では従來の渦度補給の式を空間積分する事により簡単に使ひよい式を得た。之を低氣壓の渦度と關係づけてその發達の段階が新しく導いた渦度の式で表はされる場合の式が得られた。このモデル低氣壓と實際のものとの比較は次の機會にゆづる。

終にいつも乍ら御鞭撻下さい岡田先生及び閱讀と批評して誤解を注意して戴きました藤原先生に又普段教示を受けてゐる本多先生にも厚く御禮申し上げます。

附記 藤原先生は本論文に就て。

(1) 鉛直渦度の積分空間は數學的に任意であるが、實際問題として具體的に高氣壓或は低氣壓の發達を論ずるに當つては、空間を適當に採らねばならぬ。

(2) この空間内に不連續面を含む時は、不連續面の存在による渦度の生成があるからこの點をも考慮を要する。

等御注意下さつた。筆者は先生の御注意に基き、之等の點に關しても最近の機會に研究成果を報告したい思つて居る。

要 報

曲線座標によるエネルギー減衰定理*

(水平安定の限界 第四報)

荒 川 秀 俊

内部摩擦による運動エネルギーの減衰を表はす定理は

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint \Phi dx dy dz.$$

擾動による運動エネルギーの減衰を表はす定理は

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint \Phi dx dy dz - \iiint \Psi dx dy dz.$$

但し考ふる流體が外力を受くることなく又剛體の境界

* H, Arakawa: Dissipationstheorem der Turbulenter Flüssigkeitsbewegungen.