ないであらう。この問題は重要なので今後なほ考察をつづけ度いと思つて居る。

この問題に關しては岡田先生、藤原先生並に他の諸兄の御教示に負ふ所が多い。衷心より謝意を表する。

高橋喜彦氏の方法に依る波動方程式の一數值的解法*

本 間 正 作

1. 緒 言

最近、高橋喜彦氏は「熱及び渦動傳導の圖式解法」と題する論文を發表され、⁽¹⁾ 極めて巧妙な圖式積分に依り、種々の境界條件の下に熱傳導方程式を解き、更に進んで寒暖二氣塊の混合過程及び夫によつて生ずる雲形の數值的決定迄成功された。斯様な複雑な問題に利用出来る爲には、解法の手續きが成る可く簡易である事が重要な條件となるが、此の方法はその點に於て著しい特長を持つて居るように思はれる。もう一つ大切な事は、その解法の操作の物理的意味が明瞭な事で、實際高橋氏は物理的考察に基いて解法を得られた事を説いて居られ、又藤原博士が指示された通りに、同博士の稱へられた向平等原理⁽²⁾の一方面に證明を與へた事になつてゐる。

一方、波動現象の中にも重要であるが複雑で近付き難い問題が澤山殘されて居るから、高橋氏と同じ様な方法で波動方程式が解ければ非常に便利な筈である。今回は、その方法の物理的内容及び日高博士に倣つた證明を述べ、又圖式積分の代りに數値積分を用ひる場合に便利な形への變換及び、實用性を確かめる爲の簡単な一例を記した。

2. 第 1 の方法及びその物理的意味

先づ一樣な媒質内に於ける一次元の波動

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

を考へる。或る時刻 t に於ける波動の場の模様が分つて居る時、極めて短い時間 τ の後の u の値は $0(\tau^3)$ を無視出来るものとすれば、次の如くなる。

$$u(x, t+\tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}V\tau} \int_{-\sqrt{3}V\tau}^{\sqrt{3}V\tau} u(x+\xi, t) d\xi + \tau \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2)$$

* S. Honma: Application of Y. Takahashi's Method to the Integration of the Wave Equations. 中央氣象臺彙報.

(1) 本誌, 第 19 卷, 第 8 號.

(2) 藤原吹平: 大氣物理學 (岩波講座; 物理學及化學), p. 126.

$$[\text{證}] \quad (2) \text{ の左邊} = u(x, t) + \tau \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

$$(2) \text{ の右邊} = \frac{1}{2\sqrt{3}V\tau} \int_{-\sqrt{3}V\tau}^{\sqrt{3}V\tau} \left[u(x, t) + \xi \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] d\xi + \tau \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$= u(x, t) + \tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1) \text{ を代入して}$$

$$= u(x, t) + \tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad [\text{證, 了}]$$

(2) 式の右邊第一項は、或る點 x で時刻 $t+\tau$ に於ける u の値が、時刻 t に於ける u の値を $x-\sqrt{3}V\tau$ から $x+\sqrt{3}V\tau$ の區間で平均したものに近づくかとする傾向を示すもので、丁度藤原博士の向平等の項に相當するものである。熱傳導の場合は之だけで済むが波動現象では媒質の慣性が現はれる筈である。之が第二項で、反平等の作用を表はしてゐる⁽¹⁾。この二つの相反する作用の相剋する處に振動と云ふ永續する現象の生ずる事は振動學の教へる所である。

(2) の第一項の積分は高橋氏の様に圖式積分ですか、さもなければ圖上から、積分區間の兩端及び若干の點に於ける u の値を読み取つて、適當な數値積分を行へばよい。一般に初期値問題では $t=0$ で $u(x, 0)$ の外に $\partial u(x, 0)/\partial t$ が與へられるから、之から出發して τ 時間置きに、次々の時刻に於ける u の値が計算出来る。然し $t=0$ 以外の各時刻では、一々 $\partial u/\partial t$ を求めるのは不便であるが、この困難は次の公式により脱れ得る

$$\tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{3}V\tau} \int_{-\sqrt{3}V\tau}^{\sqrt{3}V\tau} u(x+\xi, t) d\xi - u(x, t-\tau).$$

$$[\text{證}] \quad \text{左邊} = \tau \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial t} + \tau^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t-\tau)}{\partial t^2}$$

$$\text{右邊} = \frac{1}{2\sqrt{3}V\tau} \int_{-\sqrt{3}V\tau}^{\sqrt{3}V\tau} \left[u(x, t-\tau) + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi \cdot \tau \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] d\xi - u(x, t-\tau)$$

$$= \tau \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t-\tau)}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 u(x, t-\tau)}{\partial x^2} \quad (1) \text{ を代入して}$$

$$= \tau \cdot \frac{\partial u(x, t-\tau)}{\partial t} + \tau^2 \frac{\partial^2 u(x, t-\tau)}{\partial t^2} \quad [\text{證, 了}]$$

(3) を (2) に代入すると

$$u(x, t+\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}V\tau} \int_{-\sqrt{3}V\tau}^{\sqrt{3}V\tau} u(x+\xi, t) d\xi - u(x, t-\tau). \quad (4)$$

(1) 茲に向平等と云ふ又反平等と云ふのは、振幅 u の變化に對して云つて居るのであつて、エネルギーの議論では無い事は (2) 式から明白である。

右邊第一項は (2) の右邊第一項を 2 倍したものになる。

以上の諸公式に相當する二次元，三次元の波動問題の公式も證明は全く同じであるから，結果を列擧するに止める。

二次元

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5)$$

$$u(x, y, t + \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} u(x + \xi, y + \eta, t) d\eta + \tau \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\tau \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} u(x + \xi, y + \eta, t) d\eta - u(x, y, t - \tau), \quad (7)$$

$$u(x, y, t + \tau) = \frac{2}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} u(x + \xi, y + \eta, t) d\eta - u(x, y, t - \tau). \quad (8)$$

三次元

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$u(x, y, z, t + \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)(2\sqrt{3} V_z \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} d\eta \int_{-\sqrt{3} V_z \tau}^{\sqrt{3} V_z \tau} u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t) d\zeta + \tau \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\tau \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)(2\sqrt{3} V_z \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} d\eta \int_{-\sqrt{3} V_z \tau}^{\sqrt{3} V_z \tau} u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t) d\zeta - u(x, y, z, t - \tau), \quad (11)$$

$$u(x, y, z, t + \tau) = \frac{2}{(2\sqrt{3} V_x \tau)(2\sqrt{3} V_y \tau)(2\sqrt{3} V_z \tau)} \int_{-\sqrt{3} V_x \tau}^{\sqrt{3} V_x \tau} d\xi \int_{-\sqrt{3} V_y \tau}^{\sqrt{3} V_y \tau} d\eta \int_{-\sqrt{3} V_z \tau}^{\sqrt{3} V_z \tau} u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t) d\zeta - u(x, y, z, t - \tau). \quad (12)$$

二次元の場合の (6) 式及び三次元の場合の (10) 式の各第一項は，夫々 (x, y) 或ひは (x, y, z) を中心とした矩形或ひは直方體の内部に於ける u の平均値を作る事を意味する向平等の項であり，第二項は慣性を表はす反平等の項である。

この節で述べた方法は高橋氏の熱傳導に對するものと全く同様のもので物理的内容も明瞭であるが，向平等の項を求めるのに圖式積分をするか，さうでなく共，被積分函數の値を圖上から求めて數値積分をする等，圖の助けが要る。そのことが不便となる場合には次節の様な變形を行ふと都合がよい様に思ふ。

3. 第 2 の方法及び例題

各次元の場合をとりまとめて取扱ふために一般に n 次元の空間の波動を考へると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n V_i^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x_i^2} \quad (13)$$

を満たす $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ の或る時刻 t に於ける値が全空間で知れて居ると、短い時間 τ の後の u の値は $O(\tau^3)$ を無視出来るならば、

$$u(x_j, t+\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{k^3}{2\sqrt{3} V_i \tau} \int_{-\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}} u(x_j + \delta_{ji} \cdot \xi_i, t) d\xi_i + \tau \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} - (nk^2 - 1)u(x_j, t). \quad (14)$$

で表はされる。

但し $u(x_j, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, δ_{ji} は $i=j$ なら 1, $i \neq j$ なら 0 を表はす。

[證] 左邊 $= u(x_j, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= \sum_i \frac{k^3}{2\sqrt{3} V_i \tau} \int_{-\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}} \left[u(x_j, t) + \xi_i \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial x_i} + \frac{\xi_i^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t)}{\partial x_i^2} \right] d\xi_i + \tau \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} \\ &\quad - (nk^2 - 1)u(x_j, t) \end{aligned}$$

$$= u(x_j, t) + \tau \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \sum_i V_i^2 \frac{\partial^2 u(x_j, t)}{\partial x_i^2} \quad (13) \text{ に依り}$$

$$= u(x_j, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [\text{證, 了}]$$

(14) 式は u 及び $\partial u / \partial t$ の初期値が與へられた時、計算操作の出發に必要な公式であるが、後の各時刻で一々 $\partial u / \partial t$ を求めるのは不便だから、それを避ける爲に次の公式が用ひられる。

$$\tau \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{k^3}{2\sqrt{3} V_i \tau} \int_{-\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}} u(x_j + \delta_{ji} \cdot \xi_i, t) d\xi_i - (nk^2 - 1)u(x_j, t) - u(x_j, t - \tau). \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [\text{證}] \text{ 右邊, 第一項} &= \sum_i \frac{k^3}{2\sqrt{3} V_i \tau} \int_{-\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3} V_i \tau}{k}} \left[u(x_j, t - \tau) + \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\xi_i^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right. \\ &\quad \left. + \xi_i \tau \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial t} + \frac{\tau^2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] d\xi_i \\ &= \sum_i \left[k^2 \left\{ u(x_i, t - \tau) + \tau \frac{\partial u(x_j, t - \tau)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t - \tau)}{\partial t^2} \right\} + \frac{\tau^2}{2} V_i^2 \frac{\partial^2 u(x_j, t - \tau)}{\partial x_i^2} \right] \\ &= nk^2 u(x_j, t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t - \tau)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{右邊} = \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t - \tau)}{\partial t^2} + u(x_j, t) - u(x_j, t - \tau) = \tau \frac{\partial u(x_j, t - \tau)}{\partial t} + \tau^2 \frac{\partial^2 u(x_j, t - \tau)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t}$$

= 左邊

[證, 了]

(14) に (15) を代入すると,

$$u(x_j, t+\tau) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{k^3}{2\sqrt{3} V_i \tau} \int_{-\sqrt{3} V_i \tau}^{\sqrt{3} V_i \tau} u(x_j + \delta_{ji} \cdot \xi_i, t) d\xi_i - 2(nk^2 - 1) \cdot u(x_j, t) - u(x_j, t-\tau). \quad (16)$$

特に $k = \sqrt{3}$ の場合には右邊第一項で u の平均を作る範圍は $x_i - V_i \tau$ から $x_i + V_i \tau$ 迄になるが, $x_i - V_i \tau$, x_i , $x_i + V_i \tau$ の如く $V_i \tau$ づつ距つた點の u の値は數值的に知れてゐるから, 此等 3 つの値を用ひてシンプソンの 1/3 則を用ひて積分する事にすれば圖の補助を藉りなくて済む. 斯様な場合に對する公式を一次元, 二次元及び三次元について書き下すと次の様になる. 但し $u(0, 1, \bar{1}, t)$ 等とあるは, 時刻 t に於いて, 點 $(x, y + V_y \tau, z - V_z \tau)$ で採る u の値等を意味する.

一次元

$$\left. \begin{aligned} u(x, t+\tau) &= \frac{1}{2} [u(1, t) + u(\bar{1}, t)] + \tau \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \\ &= u(1, t) + u(\bar{1}, t) - u(0, t), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

二次元

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t+\tau) &= \frac{1}{2} [u(1, 0, t) + u(\bar{1}, 0, t) + u(0, 1, t) + u(0, \bar{1}, t) - 2u(0, 0, t)] + \tau \frac{\partial u(0, 0, t)}{\partial t} \\ &= u(1, 0, t) + u(\bar{1}, 0, t) + u(0, 1, t) + u(0, \bar{1}, t) - 2u(0, 0, t) - u(0, 0, t-\tau), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

三次元

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t+\tau) &= \frac{1}{2} [u(1, 0, 0, t) + u(1, 0, 0, t) + u(0, 1, 0, t) + u(0, \bar{1}, 0, t) \\ &\quad + u(0, 0, 1, t) + u(0, 0, \bar{1}, t) - 4(0, 0, 0, t)] + \tau \frac{\partial u(0, 0, 0, t)}{\partial t} \\ &= u(1, 0, 0, t) + u(\bar{1}, 0, 0, t) + u(0, 1, 0, t) + u(0, \bar{1}, 0, t) \\ &\quad + u(0, 0, 1, t) + u(0, 0, \bar{1}, t) - 4(0, 0, 0, t) - u(0, 0, 0, t-\tau). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

シンプソンの 1/3 則に於ける誤差はビッチ $V_i \tau$ の 5 乗の程度のもので, 之は我々の方法で必要な精度より遙かに高いものであるから, もつと粗い近似積分でも間に合ふ位である. 然し偶々公式が簡単になると云ふ點でシンプソンの積分が矢張り都合がよいのである.

この方法が實用に供し得ることを確かめるために簡単な例を採つて當つて見た。問題は一定の張力で張つた弦の一端は固定し、他端 ($x=0$) は弦に垂直な一つの直線上に小さい振幅で單弦振動させた時起る弦の振動を求め

ることである。與へる運

動は $t < 0$ では 0, $t \geq 0$

では $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ とし、こ

の T を基本周期に持つ

様な弦の長さ L に較べ、

只今の弦の長さが $1/4$ 及

び $13/72$ の各場合に (17)

式を用ひて、各時刻に於

ける變位 u を求め、嚴密

な解式より得られる値と

比較した。計算は終始小

數點下 3 桁の數を扱つた

が満足すべき結果を得た。ピッチ $2\pi t/T$ は 5° に採つたが 5° と云へば 0.087 ラジアンであるから、その 3 乗を無視した場合に豫想されるより遙かに良好となつた。

$l/L=1/4$ の場合の圖を前頁に示す。線に矢印で示した數字は t/T の値で、之が $1/2$ になると弦は水平になり、それから先では丁度この圖の水平に對する鏡像となり t/T の時は全く出發當時の状態に戻る。上表に若干の場合に於ける計算値とその誤差 (過大を + とす) を示す。誤差 0.001 とあるものも皆切上げたもの許りで 0.001 を超えたものは皆無であつた。

尙ほこの問題の嚴密な解式は

$$u(x, t) = \frac{\sin\left\{\frac{2\pi l}{L}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right\}}{\sin\frac{2\pi l}{L}} \cdot \sin\frac{2\pi t}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2\pi l}{L} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}}{\left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 - (n\pi)^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{T} \cdot \frac{L}{l}\right)$$

で⁽¹⁾ x と t に具體的な數値が與へられると第二項の無限級數は有限の形に書けるものである。⁽²⁾

4. 不均質媒質の場合、その他

波動の式が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n V_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (20)$$

(1) 例へば E. J. Routh, Advanced Rigid Dynamics, (1884), p. 320.

(2) 寺澤寛一, 數學概論, p. 185, 例 5.

で V_i^2 が座標 $\{x_i\}$ の函数である場合には (2)~(16) の總ての公式が當てはまる. この場合平均範圍 (積分の上, 下限) に入る V_i には u の値を求めようとする點に於ける V_i を用ひればよろしい事は今までの證明法から推して明らかである. この時は 3 節に述べた様な積分範圍を, その點の兩隣の點にとるような都合のよい手段はないから圖式積分をするか, 圖上から被積分函数の値を読み取るような手続きが必要である.

$$\text{波動の式が (20) の代りに} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} \quad (21)$$

で ρ 及び μ_i が座標 $\{x_i\}$ の函数の場合には

$$\mu_i = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2) \cdots X_n(x_n) \quad (22)$$

と書かれるならば獨立變數 $\{x_i\}$ を

$$\frac{1}{X_i(x_i)} = \frac{d\xi_i}{dx_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

なる變換により (20) の場合に歸着する.

$$\text{電信方程式} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n V_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (24)$$

$$\text{の時は} \quad u = e^{-\varepsilon t} \quad (25)$$

$$\text{と置くと,} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varepsilon^2 v = \sum_{i=1}^n V_i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \quad (26)$$

となるから (14) 及び (16) に對應して

$$v(x_j, t+\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{k^3}{2\sqrt{3}V_i\tau} \int_{-\frac{\sqrt{3}V_i\tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3}V_i\tau}{k}} v(x_j + \delta_{ji}\xi_i, t) d\xi_i + \tau \frac{\partial v(x_j, t)}{\partial t} - (nk^2 - 1 - \varepsilon^2)v(x_j, t) \quad (27)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \frac{k^3}{2\sqrt{3}V_i\tau} \int_{-\frac{\sqrt{3}V_i\tau}{k}}^{\frac{\sqrt{3}V_i\tau}{k}} v(x_j + \delta_{ji}\xi_i, t) d\xi_i - 2(nk^2 - 1 - \varepsilon^2)v(x_j, t) - v(x_j, t-\tau) \quad (28)$$

が得られる. 従つて u も求まる.

5. 結 言

以上得られた結果を要約すると,

- (i) 高橋(喜)氏が熱傳導方程式の解法に利用された方法と同じ方針で波動方程式を解く事が出来る.
- (ii) 解法の操作は物理的意味がはつきりして居る事は熱傳導の場合と同様で, 藤原博士の稱へられた向平等の項と, 更に慣性の項とより成つてゐる.
- (iii) 方法を變形して數値積分に依る計算に適するように直すと, 非常に便利な公式が得られる.

(iv) 不均質媒質や電信方程式の場合も同じ様な考へ方で取扱へるが多少面倒になる。

終りに臨み、種々の御教示を賜つた藤原博士、本多博士及び高橋喜彦技師に厚く御禮申し上げます。

(昭和 16 年 8 月)

要 報

雨量計へ落ちる雨滴のはね返りに依る雨量の誤差について*

齋 藤 芳 雄, 桑 名 十 郎

§1. 緒 言

雨量計へ落ちる雨滴のはね返りは受水器の深さが餘り淺くない限り一般に小なるものと考へられてゐる。我々は此のはね返りの程度を確め様と思ひ若干の簡單なる實驗を試みてはね返りの影響は雨量觀測の誤差の範圍なることを確め得たので實驗の經過を簡單に報告する。

§2. 方法及び裝置

我々の用ひた方法は直径約一握長さ十握のガラス管の一端を毛細管とし、ほゞ一定の大きさの水滴を高さ 14.8 米より滴下させ此れを雨量計に受け水滴のはね返りを雨量計の周圍に置いた濾紙を以つて受け所謂吸收法によりはね返りの量を求めた。(濾紙には豫めエオシン 1 滑石粉末 10 の割合の粉末をふりまいておく)。

場所は氣象臺の風力塔内空所(七階より一階迄)を利用した。その結果實驗に使用し得る空所狹隘なるため雨量計の周圍全部に濾紙を置くことが出來ず、止むを得ず半分だけ濾紙を置いて後に結果を二倍にすることにした。又濾紙に適當なるものなく直径 18.5 握の圓形の濾紙 5 枚を並べて使用することとした。

§3. 實 驗

ガラス管で作つた毛細管は大小二種類作りそれより水滴を滴下させ各の場合 100 滴づゝ 500 滴を秤量瓶に取り秤量し平均して大滴、小滴に對して夫々 44.0 mg, 13.5 mg なる結果を得た。さて此の二種の大きさの水滴についてのみ實驗を行つた。始め雨量計の

受水器の如何なる部分よりはね返りが最大になるかを試さうと思つて大小各滴について 5 滴づゝ受水器の各部分について繰返し水滴を落して濾紙を調べた。此の結果によると小滴の方は受水器の中央(水の表面張力のため水のたまつてゐる所)に落ちたもの以外は全然はね返りを認め得なかつた。

然しへりに極く近い部分のみは滴下する水滴が屢々雨量計外に逸出し濾紙を汚してしまひ直接は調べられなかつた。それで實驗途中偶然へりの近くに落ちたものが澤山あつたので此れを多少調べられた。大滴の雨滴に對しては極めて小數の水滴のみが受水面よりのはねを生じたのみで受水器中央よりはねるものに比すれば全然無視し得る程度である。

以上で結局受水器からの水滴のはね返りは主に中央の水たまりの部分より起り受水器の斜面からに依るものは全然ないが極めて小であることが判つた。

次に稍定量的な實驗を行ふため 5 滴づゝ水滴を落しはねの有無について檢し後に濾紙のしみの大きさを計りはねの量を求めた。しみの大きさははねの量との關係は高橋喜彦先生の結果をそのまゝ拜借させて戴いた。しみの直径 0 耗から 1.0 耗迄はグラフを書き内挿して用ひた(はねの量の大凡を知るのが目的であつたので簡單のため此の如くした)。此の場合は受水器の斜面よりのはねはないものとして中央の水溜からのはね返りのみを知るべく水滴は受水器の中央に向けて落した。その結果は次の様である。

* Y. Saitō and J. Kuwana: On the Error of Rainfall Observation due to the Splashes of Water Drops from the Rain-gauge.