へられた時間 T 後の温度を求めるときの全體の誤差は大體 τ に比例することになる。従つて正確さを欲するときには手数を厭はず τ を小刻みにして進んでゆくべきである。

尙今假りに A, B 二つの作圖法があつたとして刻みが τ のときの夫々一回の操作の誤差を $\alpha\tau^2, \beta\tau^2$ また夫々の一回の操作の中に含まれる手間の数を a, b としよう。時間 T 後の温度を求めた際の誤差は夫々 $\alpha\tau^2 \frac{T}{\tau} = \alpha\tau$, $\beta\tau^2 \frac{T}{\tau} = \beta\tau$ となる。従つて同じ誤差で仕上げるには兩方法でビッチ τ の比が $\tau_1 : \tau_2 = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta}$ となる。この場合の手間の比は $a \frac{T}{\tau_1} : b \frac{T}{\tau_2} = a\alpha : b\beta$ になるわけである。

然るに一般に精度を少しでも上げるためには手間は非常にかかるのが普通である。夫れで假りに $a : b = \frac{1}{\alpha^2} : \frac{1}{\beta^2}$ とすれば、全過程の手間の比は $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ となる。即ち結局一回の操作に手間の掛らない方の作圖が全體としても、同一の精度を與へるための操作の数が少なくてすむことになる。換言すれば同じ手間をかけた場合に精度がよい。これを以て見れば作圖解法に於て如何に簡單といふことが生命であるかが分る。

(7) この章の所論は實は §8 の様式に倣つて展開した方が遙かに簡單であるが、上述と比較の便のため敢てこれによつた。

(8) もつと正確なことを欲するならば原方程式に §8 の方法を適用した結果を作圖することを考へればよい。

(9) 例へば日高孝次、積分方程式論を見よ。

(10) 例へば永宮健夫、微分方程式論を見よ。

(11) これは何時でも出来るとは限らない。そのときは假の η 軸を勝手に取つて以下の作圖を遂行し、次に今度は ξ 軸の方向には $\partial^2 u / \partial \xi^2 = 0$ であるとして、 ξ, η 兩軸の役目を取換へて作圖を遂行し、この兩方から未來等温線の通過點 P の ξ 座標と η 座標を定めればよいのである。

(12) 尙ほ日高孝次、海と空 21 (昭和 16 年) 285, 335. を参照せよ。

(13) 本間正作：氣象集誌 19 (昭和 16 年) 351.

熱傳導及波動方程式の數値解法*

下 瀬 育 郎**

§1. 緒 言

最近高橋喜彦氏⁽¹⁾は平均化の考へから熱傳導の圖式解法を案出せられ、次で本間正作氏⁽²⁾は此の方法を波動方程式に適用されて數値解法の基本式を得られ、又押田勇雄氏⁽³⁾は高橋氏の方法を用ひて熱傳導方程式の數値解法の基本式を得られた。著者は簡単な級數展開に依て直接方程式から數値解法の基本式を求めて見た。

此の結果は熱傳導に就ては、一次元の場合には押田氏が得られた結果のうち誤差の最も小さい場

* I. Simose: On the Numerical Solution of the Equations of Heat Conduction and of Wave Motion.

** 第七高等學校物理教室。

(1) 高橋喜彦：氣象集誌，第 19 卷（昭和 16 年）321 頁。

(2) 本間正作：氣象集誌，第 19 卷（昭和 16 年）351 頁。

(3) 押田勇雄：氣象集誌，第 20 卷（昭和 17 年）207 頁。

合と一致し、二次元、三次元の場合にも同程度の誤差を有つ基本式が得られた。波動方程式に就ては最初の時刻を除けば、一次元の場合には誤差の全く無い式が、二次元、三次元の場合には本間氏の得られた結果に比して形は少し複雑であるが誤差の著しく小さい式が得られた。

§2. 一次元熱傳導

方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

とし、係数 κ は一定とする、

τ を充分小さい時間とし、 u は τ に就て Taylor の級数に展開し得ると假定すれば

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3)$$

方程式 (1) を適用すると、此の式の時間 t に関する偏微分は場所 x に関する偏微分に書き換へ得る。即ち

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \kappa \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \kappa^2 \tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\tau^3)$$

然るに

$$u(x+s, t) - 2u(x, t) + u(x-s, t) = s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} s^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(s^6)$$

なる関係があるから

$$s = \sqrt{6\kappa\tau}$$

と置けば

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) &= u(x, t) + \frac{1}{6} \{u(x+s, t) - 2u(x, t) + u(x-s, t)\} + O(\tau^3) \\ &= \frac{1}{6} \{u(x+s, t) + 4u(x, t) + u(x-s, t)\} + O(\tau^3) \end{aligned}$$

従て数値解法の基本式として

$$\left. \begin{aligned} u(x, t + \tau) &= \frac{1}{6} \{u(x+s, t) + 4u(x, t) + u(x-s, t)\} \\ s &= \sqrt{6\kappa\tau} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

なる式を得る。此の式の誤差は τ^3 程度で、押田氏が得られた結果のうち誤差の最も小さい場合と一致してゐる。

§3. 二次元熱傳導

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

一次元の場合と同様に

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \tau) &= u(x, y, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) \\ &= u(x, y, t) + \kappa \tau \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{2} \kappa^2 \tau^2 \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\} + O(\tau^3) \end{aligned}$$

さて $u(x+s, y+s, t) = u(11t)$, $u(x, y-s, t) = u(0\bar{1}t)$ 等と書き表はせば

$$\begin{aligned} u(10t) - 2u(00t) + u(\bar{1}0t) &= s^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} s^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(s^6) \\ u(01t) - 2u(00t) + u(0\bar{1}t) &= s^4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{12} s^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(s^6) \\ u(11t) - 2u(01t) + u(\bar{1}1t) - 2\{u(10t) - 2u(00t) + u(\bar{1}0t)\} \\ &+ u(1\bar{1}t) - 2u(0\bar{1}t) + u(\bar{1}\bar{1}t) = s^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + O(s^6) \end{aligned}$$

なる故

$$s = \sqrt{6\kappa\tau}$$

とすれば一次元の場合と同様に次の基本式を得る.

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \tau) &= \frac{1}{36} [u(11t) + u(\bar{1}1t) + u(1\bar{1}t) + u(\bar{1}\bar{1}t) \\ &+ 4\{u(10t) + u(\bar{1}0t) + u(01t) + u(0\bar{1}t)\} + 16u(00t)] \\ s &= \sqrt{6\kappa\tau} \end{aligned}$$

此の式の誤差は τ^3 程度である.

§4. 三次元熱傳導

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

二次元の場合と同様にして次の基本式を得る.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t + \tau) &= \frac{1}{36} [u(110t) + u(1\bar{1}0t) + u(\bar{1}10t) + u(\bar{1}\bar{1}0t) \\ &+ u(101t) + u(\bar{1}01t) + u(10\bar{1}t) + u(\bar{1}0\bar{1}t) + u(011t) \\ &+ u(0\bar{1}1t) + u(01\bar{1}t) + u(0\bar{1}\bar{1}t) + 2\{u(100t) + u(\bar{1}00t) \\ &+ u(010t) + u(0\bar{1}0t) + u(001t) + u(00\bar{1}t)\} + 12u(000t)] \\ s &= \sqrt{6\kappa\tau} \end{aligned}$$

但し $u(110t) = u(x+s, y+s, z, t)$, $u(\bar{1}\bar{1}0t) = u(x-s, y, z-s, t)$ 等.

此の基本式の誤差は τ^3 程度である.

§5. 數値解法例 (一次元熱傳導)

$x=0$ 及 $x=1$ で $u=1$, $t=0$ の時 $u=\sin \pi x$ なる條件の下に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の數値解法を試みて見た。此の例は押田氏⁽¹⁾が圖式解法の例として用ひられたものである。 $s=0.1$ 従て

$$\tau = \frac{1}{600\kappa}$$

として基本式 (2) を適用して τ 時間毎の u の値を求めた。

x	$t=0$	$t=6\tau=0.01\frac{1}{\kappa}$		$t=12\tau=0.02\frac{1}{\kappa}$	
	u	u	誤 差	u	誤 差
0.1	0.30902	0.27998	0.00000	0.25366	0.00000
0.2	0.58779	0.53255	0	0.48250	0
0.3	0.80902	0.73299	0	0.66410	0
0.4	0.95106	0.86168	0	0.78070	0
0.5	1.00000	0.90602	0	0.82088	+ 1

x	$t=18\tau=0.03\frac{1}{\kappa}$		$t=24\tau=0.04\frac{1}{\kappa}$		$t=30\tau=0.05\frac{1}{\kappa}$	
	u	誤 差	u	差 誤	u	誤 差
0.1	0.22982	0.00000	0.20822	-0.00001	0.18865	-0.00001
0.2	0.43715	0	0.39606	- 1	0.35884	0
0.3	0.60168	- 1	0.54514	0	0.49390	- 1
0.4	0.70732	0	0.64084	- 1	0.58061	0
0.5	0.74372	0	0.67382	- 1	0.61049	- 1

$t=0$ 及 $6\tau(=0.01/\kappa)$ 毎の値が表に示してある。計算はすべて小數點以下 5 桁目の數を取扱つた。此の嚴密な解式は

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 \kappa t} \sin \pi x$$

で、此の式から求めた値と上記の値との差が誤差として表に示してあるが、小數點以下 5 桁目に於て 1 以上のものは皆無であつた。誤差が此の様に小さいことは基本式 (2) が充分實用になることを證してゐると思はれる。

§6. 一 次 元 波 動

方程式を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

とし、係數 V^2 は一定とする。 u は τ に就て Taylor の級數に展開し得ると假定すれば

(1) 前掲。

$$\begin{aligned}
u(x, t+\tau) + u(x, t-\tau) &= 2u(x, t) + \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{12} \tau^4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{1}{360} \tau^6 \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \dots \\
&= 2u(x, t) + (V\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} (V\tau)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360} (V\tau)^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \\
&= u(x+V\tau, t) + u(x-V\tau, t)
\end{aligned}$$

故に次の基本式を得る。

$$u(x, t+\tau) = u(x+V\tau, t) + u(x-V\tau, t) - u(x, t-\tau)$$

此の式には誤差は全く無い。併し $t=0$ に對しては適用できぬが、此の場合には

$$\begin{aligned}
u(x, t+\tau) &= u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) \\
&= u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (V\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

然るに

$$u(x+V\tau, t) - 2u(x, t) + u(x-V\tau, t) = (V\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^3)$$

なる故、 $t=0$ に對しては次の基本式が得られる。

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2} \{u(x+V\tau, t) + u(x-V\tau, t)\}_{t=0} + \tau \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0}$$

上式に含まれてゐる

$$\left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0}$$

は普通初期條件として與へられる。此の基本式の誤差は τ^3 程度で本間氏の結果と一致する。

§ 7. 二 次 元 波 動

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

一次元の場合と同様に、

$$\begin{aligned}
u(x, y, t+\tau) + u(x, y, t-\tau) &= 2u(x, y, t) + \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{12} \tau^4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^6) \\
&= 2u(x, y, t) + \left\{ (V_x \tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (V_y \tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{12} \left\{ (V_x \tau)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2(V_x V_y \tau^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + (V_y \tau)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\} \\
&\quad + O(\tau^6)
\end{aligned}$$

さて $u(11t) = u(x+V_x \tau, y+V_y \tau, t)$, $u(\bar{1}0t) = u(x-V_x \tau, y, t)$ 等と書き表はせば、

$$\begin{aligned}
u(10t) - 2u(00t) + u(\bar{1}0t) &= (V_x\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} (V_x\tau)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\tau^6) \\
u(01t) - 2u(00t) + u(0\bar{1}t) &= (V_y\tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{12} (V_y\tau)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(\tau^6) \\
u(11t) - 2u(01t) + u(\bar{1}1t) - 2\{u(10t) - 2u(00t) + u(\bar{1}0t)\} \\
&\quad + u(1\bar{1}t) - 2u(0\bar{1}t) + u(\bar{1}\bar{1}t) = (V_x V_y \tau^2)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + O(\tau^6)
\end{aligned}$$

なる故 $t > 0$ の場合の基本式として次式が得られる。

$$\begin{aligned}
u(x, y, t + \tau) &= \frac{1}{6} [u(11t) + u(\bar{1}1t) + u(1\bar{1}t) + u(\bar{1}\bar{1}t) \\
&\quad + 4\{u(10t) + u(\bar{1}0t) + u(01t) + u(0\bar{1}t)\} - 8u(00t)] - u(00, t - \tau)
\end{aligned}$$

此の基本式の誤差は τ^6 程度で、本間氏の結果に比すれば形は少し複雑であるが、誤差は著しく小さい。

$t = 0$ に對しては一次元の場合と同様にして、

$$u(x, y, \tau) = \frac{1}{2} \{u(10t) + u(\bar{1}0t) + u(01t) + u(0\bar{1}t) - 2u(00t)\}_{t=0} + \tau \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right\}_{t=0}$$

此の基本式の誤差は τ^3 程度で、本間氏の結果と一致してゐる。

§ 8. 三 次 元 の 波 動

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

二次元の場合と同様にして $t > 0$ に對する基本式として次式が得られる。

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t + \tau) &= \frac{1}{6} [u(110t) + u(\bar{1}10t) + u(1\bar{1}0t) + u(\bar{1}\bar{1}0t) + u(101t) \\
&\quad + u(\bar{1}01t) + u(10\bar{1}t) + u(\bar{1}0\bar{1}t) + u(011t) + u(0\bar{1}1t) \\
&\quad + u(01\bar{1}t) + u(0\bar{1}\bar{1}t) + 2\{u(100t) + u(\bar{1}00t) + u(010t) \\
&\quad + u(0\bar{1}0t) + u(001t) + u(00\bar{1}t)\} - 12u(000t)] - u(000, t - \tau)
\end{aligned}$$

但し $u(101t) = u(x + V_x\tau, y, z + V_z\tau, t)$, $u(01\bar{1}t) = u(x, y + V_y\tau, z - V_z\tau, t)$ 等。

此の基本式の誤差は τ^6 程度で、本間氏の結果に比すれば形は少し複雑であるが、誤差は著しく小さい。

$t = 0$ に對しては一次元、二次元の場合と同様にして、

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, \tau) &= \frac{1}{2} \{u(100t) + u(\bar{1}00t) + u(010t) + u(0\bar{1}0t) + u(001t) \\
&\quad + u(00\bar{1}t) - 4u(000t)\}_{t=0} + \tau \left\{ \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right\}_{t=0}
\end{aligned}$$

此の基本式の誤差は τ^3 程度で、本間氏の結果と一致してゐる。

§ 9. 結 言

簡単な級数展開に依て誤差の相當小さい數値解法の基本式が得られた。即ち熱傳導の場合には各次元とも誤差は τ^3 程度であつた。波動に對しては最初の時刻を除けば一次元の場合には誤差は全く無く、二次元、三次元の場合には誤差は τ^6 程度で、最初の時刻には各次元とも誤差は τ^3 程度であつた。

以上の如く誤差は非常に小さいので、解析的に解法の困難な種々の現象に適用して有用な結果が得られることと思ふ。

終りに論文代讀の勞を賜つた中央氣象臺吉武素二氏に厚く謝意を表する。

(昭和 17 年 12 月)

要 報

大 氣 低 層 の 風 の 理 論 (2)*

畠 山 修 三

§ 1. 緒 言

筆者は曩に、 $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ として $\frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} > \lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ なる時は地衡風が起り得ないといふ事を指摘して置いたが、この論文はその一例を示したものである。即ち地面に極く近い層では、日中日射の爲に不安定となり、到る所で上昇流が起るが、斯様な上昇流によつて出来る様な、多數の弱い泡狀の低氣壓が定常氣壓傾度場に出来る時、 $L \geq \frac{2\pi}{\lambda} V_0$ に従つて傾度風が卓越して順旋し、又は疑似 Euler⁽¹⁾ の風が卓越して逆旋する。但し V_0 は定常氣壓傾度による風速であり、 L はこの風速と同じ方向に測つた泡狀低氣壓間の距離である。茲

に注意すべき事は、今我々の問題にしてゐる泡狀低氣壓は、 $\frac{2\pi}{\lambda} V_0 \approx 67 V_0 \text{ km}$ 程度のものであり、而も非常に弱いものであるから、天氣圖上には現はれない。

§ 2. 泡狀低氣壓群

今次の様な氣壓分布をなして居る場合を考へよう、

$$P = P_0 + Ax + B \cos \varepsilon y \cos \mu x \quad (1)$$

これは以前櫻庭先生が氣流の收斂⁽²⁾を論ぜんとして採用された式と同じである。茲に、 $\varepsilon = \frac{2\pi}{L}$ 、 $\mu = \frac{2\pi}{D}$ と置くと L, D は夫々 y 方向、 x 方向の泡狀低氣壓間の距離を表はす。

この場合運動方程式は次の様になる、

* S. Hatakeyama: Theory of Winds near the Earth's Surface.

(1) 定常氣壓傾度を與へる氣壓分布式の項を Ax とする時

$$\frac{A}{\rho \lambda} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{A}{\rho \lambda} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

によつて與へられる風である。この場合 Euler の風なる名稱は不適當であるとの臺長先生よりの御注意により、取敢ずこの様に名付けて置くが、他に適當なる名前の見付かり次第訂正する。

(2) S. Sakuraba: On the Geostrophic Departure and the Convergence of Air Current.