氣象集誌

第二輯 第二十二卷 第十二號

論文

對稱高低氣壓内の下層風に關する近似解と其の應用*

(大氣の擾亂の研究 第九報)

正 野 重 方**

1. 緒 言

流體力學の運動方程式は非線形微分方程式であるから一般解は現在の所、解析的には求められて居ない。氣象力學に於いても地上風に關する微分方程式も同様であるから、從來は非線形項（慣性項）を省略出来る様な場合に就いてのみ取扱はれて居た。1925 年に B. Haurwitz⁽¹⁾ が圓形等壓線の場合に就いて風速、氣壓傾度が中心よりの距離 r に比例する場合の嚴密解を求めた。更に彼は V. Bjerknes の擾動法を用ひて近似解を求めた。此の近似解に於いても相當によい結果が得られるのであるが、我々は別の方法により此の近似解と同様の形式を持つがより精度の良い近似解を得た。此の方法は單に數値解を得るのが目的で考案されたものでなく、高低氣壓内の力學的機構の物理的解釋を行ふために使はれた概念の應用であつて、その點に Bjerknes の擾動法よりは物理的内容を含んで居るものと考へる。

此の方法によつて任意の氣壓配布を持つ高低氣壓内の下層に於ける運動が求められる。

茲にはその方法の基礎と取扱法を述べ他の方法との比較を行ひ、更に颶風に關する若干の應用を行つた。

2. 基礎概念

地球上での運動方程式は直交座標を用ひれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* S. Syono: Approximate Solution of Non-linear Differential Equation of Stationary Wind in Axial-symmetric Cyclone and Anticyclone and its Applications.

** 中央氣象臺航空氣象課、氣象技師、理學博士。

(1) Gerl. Beitr.z. Geophys. 1935, 45, 243-267.

で與へられる⁽¹⁾。之より簡単な變形により

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + \zeta)v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\lambda + \zeta)u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を得る。但し

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad P = p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

上式に於いて $v_r = u \cos \theta + v \sin \theta$, $v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 等の變換を行へば容易に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} - \lambda v_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \lambda v_r &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但し球對稱として $\partial/\partial \theta = 0$ と置いてある。従つて (2) と (3) とは同等である。

今、定常狀態に就いて考へれば

$$\left. \begin{aligned} -(\lambda + \zeta)v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ (\lambda + \zeta)u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を得る。

扱て非線形項を省略した直線等壓線の場合の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\lambda v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \lambda u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

であり, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ が z に関して常数の場合 (5) の解は次式で與へられる:

(i) $z=0$ に於いて $u=v=0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{D} z\right) \\ v &= \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\pi z}{D}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{D}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(ii) $z=0$ に於いて $u = x \frac{\partial u}{\partial z}$, $v = x \frac{\partial v}{\partial z}$ の場合

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} C \exp\left(-\pi \frac{z}{D}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{D} - \gamma\right) \\ v &= \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \left[1 + C \exp\left(-\pi \frac{z}{D}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{D} - \gamma\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(1) 垂直速度成分は省略する。

$$\left. \begin{aligned} C^2 &= 1 / \left(1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} + x^2 \frac{\lambda}{\nu} \right) \\ \operatorname{tg} \gamma &= 1 + x \sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} / x \sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda}} \quad (9)$$

今 (4) の式を圓筒座標に直せば容易に

$$\left. \begin{aligned} -(\lambda + \zeta)v_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ (\lambda + \zeta)v_r &= +\nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を得る。

(10) に於いて若し ζ 及 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$ が常數であれば (5) と同形であり、只 u の代りに v_r, v の代りに v_θ, λ の代りに $\lambda + \zeta, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ の代りに $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$ と入れ換つて居るだけであるから、(i) 及 (ii) の場合の解として夫々次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad v_r &= -\frac{1}{\lambda + \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{D} z\right) \\ v_\theta &= \frac{1}{\lambda + \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(ii)} \quad v_r &= -\frac{1}{\lambda + \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} C \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z - \gamma\right) \\ v_\theta &= \frac{1}{\lambda + \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \left[1 + C \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{D} z - \gamma\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C^2 &= 1 / \left(1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} + x^2 \frac{\lambda + \zeta}{\nu} \right) \\ \operatorname{tg} \gamma &= 1 + x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} / x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} \\ D &= \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

今参考のために上の結果を Haurwitz の求めた結果と比較するために變形する。

(10) に於いて粘性項を省略すれば (動徑成分も之に伴ひなくなると考へられるから)

$$(\lambda + \zeta)v_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

となるから、之は傾度風の式になる。(11) 又は (12) の第二式で $z \rightarrow \infty$ とすれば指數項は零になるから、 $\frac{1}{\lambda + \zeta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$ は v_θ と置くべきものである。更に $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{k}{\rho} r$ と置けば傾度風の式より

$$\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r} \right) v_\theta = \frac{k}{\rho} r$$

なる故 r にて割り、兩邊に $\lambda^2/4$ を加へると

$$\lambda \frac{v_\theta}{r} + \frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{\lambda^2}{4} = \frac{k}{\rho} + \frac{\lambda^2}{4}$$

従つて $\lambda = 2\Omega_z$ と置けば ($v_\theta \propto r$ に注意して)

$$\sqrt{\frac{k}{\rho} + \Omega_z^2} = \Omega_z + \frac{v_\theta}{r} \text{ 即ち } \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2}} = \sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}}$$

になる故、(12) の解は

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -v_\theta C e^{-\frac{\sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}} z}{\sqrt{\nu}}} \cos \left(\frac{\sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}}}{\sqrt{\nu}} z - \gamma \right) \\ v_\theta &= v_\theta \left[1 + C e^{-\frac{\sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}} z}{\sqrt{\nu}}} \sin \left(\frac{\sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}}}{\sqrt{\nu}} z - \gamma \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} C^2 &= 1 / \left[1 + \frac{2x}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}} + \frac{2x^2}{\nu} \left(\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho} \right) \right] \\ \tan \gamma &= 1 + \frac{x}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}} / \left[\frac{x}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\Omega_z^2 + \frac{k}{\rho}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

になり、之は Haurwitz が Bjerknes の擾動理論により求めた結果である。即ち Haurwitz の近似解は (10) に於いて ζ 及 $\partial P / \partial r$ を傾度風に關する値に採り、 λ を常數と見做して全氣層に應用したものであることが判る。

然るに考へてみれば地面摩擦の影響で地面附近では運動がないが ((i) の場合) 或は抵抗で速度が小さくなつて居る ((ii) の場合) のであるから、考へる氣層に對して傾度風に對する ζ を用ひるのは少し大き過ぎる様に思はれる。實際には風は地面より上に行く程増加して傾度風の値に達するのであるから、 $\zeta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}$ は大氣下層の運動に對しては幾分小さい値を採るべきであらうと考へられる。即ち氣層に關する或平均値を採つた方がより實際に精度のよい近似値が得られる筈である。

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \frac{1}{H} \int_0^H \zeta dz = \frac{1}{H} \int_0^H \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{H} \int_0^H v_\theta dz \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{H} \int_0^H v_\theta dz \\ &= \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} = \frac{\partial K v_\theta}{\partial r} + K \frac{v_\theta}{r} = K \zeta, \quad 0 < K < 1. \end{aligned}$$

なる故に上の方法で、 ζ を決定する。茲に g は傾度風に關する量を表はす。 H としては如何なる値を採るのが最も良いかは決定的ではないが、地面摩擦の影響する範圍に採るのが適當であることは間違ひがない。我々は $H = D$ と採ることにした。次に K を決定しよう。

(i) の場合

$$K = \frac{1}{D} \int_0^D \left(1 - \exp \left(-\frac{\pi}{D} z \right) \cos \left(\frac{\pi}{D} z \right) \right) dz = 1 - \Re \frac{1}{D} \int_0^D e^{-\frac{\pi}{D} (1-i) z} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \Re \left\{ \frac{1}{D} \left| \frac{D}{\pi(1-i)} e^{-\frac{\pi}{D}(1-i)z} \right|_0^D \right\} = 1 - \Re \frac{1}{\pi(1-i)} (1 + e^{-\pi}) \\
 &= 1 - \frac{1}{2\pi} (1 + e^{-\pi}) = 0.827.
 \end{aligned} \tag{17}$$

(ii) の場合

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{D} \int_0^D \left\{ 1 + C \exp \left(-\frac{\pi}{D} z \right) \sin \left(\frac{\pi}{D} z - r \right) \right\} dz \\
 &= 1 + \frac{C}{D} \Im \int_0^D e^{-\frac{\pi}{D}(1-i)z - i\gamma} dz = 1 + \frac{C}{D} \Im \left\{ -\frac{D}{\pi(1-i)} e^{-\frac{\pi}{D}(1-i)z - i\gamma} \right\}_0^D \\
 &= 1 - \frac{C}{2\pi} (1 + e^{-\pi}) (\sin \gamma - \cos \gamma) = 1 - 0.173C (\sin \gamma - \cos \gamma)
 \end{aligned} \tag{18}$$

此の場合 $K=0$ 即ち滑りがなければ, $C=1$, $r=\pi/2$ になり, (18) は (17) と一致する.

上の計算に於いては平均値として地上より D 迄を採つたが此の範圍の平均が適當か否かは明らかでないが假りに地上より $1.5D$ 及 $2D$ 迄の平均を採用したものとすれば (i) の場合に對して $K=0.895$ 及 $K=0.921$ (ii) の場合に對しては $K=1-0.105C(\sin \gamma - 1.018 \cos \gamma)$ 及 $K=1-0.079C(\sin \gamma - \cos \gamma)$ になり, 餘り違ひは起らない. 然し結果より云へば $H=D$ の場合が最も良さそうである.

、擬て (10) の左邊 $\lambda + \zeta$ の代りに常數 $\lambda + \bar{\zeta}$ にて置き換へた式を用ひようとするのであるが, 考へる氣層の運動を最もよく表現するには $\lambda + \zeta$ の代りに $\lambda + \bar{\zeta}$ を用ひるだけでは不充分で $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$ も適當なる平均値を以つて置き換へなければならない. 此の平均値として $\frac{1}{D} \int_0^D \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz$ の如きものを採用しては適當でないことは明らかである. 何故なら此の様な平均値は運動方程式中の各項に就いて此の様な平均操作を施した場合に限つて意味があるからであるが我々は左邊に於いて $(\lambda + \zeta) v_\theta$ の如き量を用ひて居るのではなく $(\lambda + \bar{\zeta}) v_\theta$ を用ひて居るからである. 此の平均値の採用には $z \rightarrow \infty$ に於ける條件を滿足する様に擇ぶことにする. 即ち $z \rightarrow \infty$ に於いては $v_\theta \rightarrow v_\theta$ になり, $\nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$ 等は零に近づくのであるから, (10) の代りに代用方程式が充分高い所で滿足される爲には

$$-(\lambda + \bar{\zeta}) v_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

なる如き $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$ の採用が適當であらう. 従つて我々は (10) の代りに

$$\left. \begin{aligned}
 -(\lambda + \bar{\zeta}) v_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\
 (\lambda + \bar{\zeta}) v_r &= \quad \quad + \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned}
 -(\lambda + \bar{\zeta}) v_\theta &= -(\lambda + \bar{\zeta}) v_\theta + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\
 (\lambda + \bar{\zeta}) v_r &= \quad \quad \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

用ひることとする。

實際問題に於いては $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$ は z の函数で v_g も高度の函数であり、如何なる高度に於ける v_g が適當なりやの問題が起つて来る。此の問題は氣壓傾度による外力が高度に對して一定とした風の理論の範圍外の問題で thermal wind の成分も問題になる場合であつて、之に就いては別個に扱ふこととする。

(20) の解としては (11)(12) より直ちに次の解を得る。

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} v_r &= -v_g \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{D} z\right) \\ u_\theta &= v_g \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} v_r &= -v_g C \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z - \gamma\right) \\ v_\theta &= v_g \left[1 + C \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{D} z - \gamma\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} C^2 &= 1 / \left[1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} + x^2 \frac{\lambda + \zeta}{\nu}\right] \\ \operatorname{tg} \gamma &= 1 + x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} / x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} \quad (24)$$

以上の解は圓形等壓線の場合氣壓傾度の r に對する函数形の如何に關らず成立する近似解である。

此の近似解法の順序を要約すれば次の如くなる：

- (i) 氣壓配置より氣壓の動徑分布を求める。
- (ii) 之より傾度風速の動徑分布を求める。
- (iii) 此の分布より $\partial v_g / \partial r + v_g / r$ を求め、之に K を乗じて $\bar{\zeta}$ を作る。
- (iv) 之より (23)(24) により C, γ, D を求める。
- (v) 地上の條件に従ひ (21) 又は (22) を用ひて、各點に於ける v_r 及 v_θ の高度分布を求める。

3. Haurwitz の解との比較

Haurwitz の求めた嚴密解と Bjerknes の擾動理論による近似解と著者の近似解とを比較し、著者の解の精度を實際的に吟味して見よう。猶参考のために直線等壓線の場合も比較する。比較の便宜上 Haurwitz の嚴密解を (A)、直線等壓線の解を (B)、Bjerknes の方法による解を (C)、著者の近似解を (D) と名付ける。

- (i) 比較の場合の條件は Haurwitz の計算例と同じものとする。即ち次の如きものである。

氣壓傾度 $\partial p / \partial r = k_r, v_r, v_\theta \propto r$

地面に於いて $v_r = v_\theta = 0$

$\varphi = 30^\circ, r = 500 \text{ km}, \mu/\rho = \nu = 50 \text{ m}^2/\text{sec} = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$

氣壓傾度 $= 2.49 \times 10^{-6} \text{ c bar/m} = 2.49 \times 10^{-7} \text{ m bar/cm} = 2.49 \times 10^{-4} \text{ C.G.S.}$

$\rho = 1.1 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, 傾度風速 $v_\theta = 20 \text{ m/sec}$

(A), (B) の解は Haurwitz の原著に掲載されて居るので茲には引用を省略する。

(C) に於いては ζ 及 D は次の様になる。

$$\zeta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} = 2 \times \frac{20 \text{ m/sec}}{500 \text{ km}} = 8 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

$$\lambda = 2\omega \sin 30^\circ = 7.3 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

従つて

$$D = \pi \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 10^5}{(7.3 + 8) \times 10^{-5}}} = \pi \sqrt{\frac{1}{1.53}} \times 10^5 \text{ cm} = 2540 \text{ m.}$$

(D) に於いては $\bar{\zeta}$ 及 $\bar{D}$ は次の様になる。

$$\bar{\zeta} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) K = 8 \times 10^{-5} \times 0.827 = 6.6 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

従つて

$$\bar{D} = \pi \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 10^5}{(7.3 + 6.6) \times 10^{-5}}} = \pi \sqrt{\frac{1}{1.39}} \times 10^5 \text{ cm} = 2665 \text{ m.}$$

以上の $\zeta, D, \bar{\zeta}, \bar{D}$ 等を (11) 及 (21) に代入して (C) 及 (D) を得るのであるが途中の計算を省略して結果のみを表示する。

以上の結果を判り易い様に圖示したものが第 1 圖～第 4 圖である

之等の表及圖より判ることは摩擦高度 D 以上に於いては著者の解は擾動法より稍不正確であるが D より下層では著者の解は擾動法より正確である。そして數值的に云へば全般的に見て著者の解の方が擾動法より優つて居ることが明瞭である。之は當然豫期される結果である。

(ii) 第 1 例では地表面で滑りのない場合であつたが第 2 例として地面で滑りがあり、地面條件として

$$W = x \frac{\partial W}{\partial z}, \quad W = \text{tang} - x = 55.2 \text{ m}$$

の場合に就いて比較して見よう。その他の條件は (i) の場合と同じとする。

(C) に於いては

$$\zeta = 8 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}, \quad D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} = 2540 \text{ m}$$

になるから, $\sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1.53}} \times 10^5 \text{ cm} = 808.452 \text{ m}$, $x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} = 0.0682$ になる。従つて

第 1 表

z	(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
z	v_r	u	v_r	v_r	v_θ	v	v_θ	v_θ
m	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec
0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	-2.0	-1.6	-2.18	-2.09	2.3	1.7	2.46	2.34
200	-3.6	-2.9	-3.83	-3.59	4.4	3.4	4.87	4.64
300	-4.9	-3.9	-5.00	-4.87	6.6	5.0	7.14	6.83
400	-5.7	-4.8	-5.80	-5.76	8.7	6.6	9.22	8.71
500	-6.2	-5.4	-6.25	-6.17	10.6	8.2	11.22	10.78
600	-6.6	-5.9	-6.43	-6.41	12.4	9.5	12.98	12.52
700	-6.7	-6.2	-6.41	-6.44	14.0	10.9	14.55	14.05
800	-6.6	-6.4	-6.31	-6.36	15.4	12.2	15.92	15.42
900	-6.3	-6.4	-5.82	-6.04	16.7	13.3	17.12	16.64
1000	-5.9	-6.4	-5.48	-5.69	17.8	14.4	18.09	17.65
1200	-4.9	-6.1	-4.52	-4.76	19.4	16.3	19.60	19.25
1400	-3.9	-5.9	-3.01	-3.82	20.6	18.0	20.61	20.30
1600	-2.8	-5.0	-2.53	-2.87	21.2	19.0	21.10	20.94
1800	-1.9	-4.3	-1.65	-2.05	21.4	19.9	21.32	21.25
2000	-1.2	-3.6	-1.05	-1.33	21.5	20.5	21.32	21.35
2250	-0.5	-2.7	-0.44	-0.67	21.3	21.0	21.16	21.25
2500	-0.1	-2.0	-0.05	-0.21	21.0	21.3	20.91	21.04
2750	0.1	-1.4	0.17	0.08	20.7	21.3	20.65	20.78
3000	0.3	-0.8	0.27	0.24	20.4	21.3	20.41	20.53
3250	0.3	-0.5	0.27	0.27	20.2	21.2	20.27	20.31
3500	0.3	-0.2	0.24	0.27	20.1	21.0	20.10	20.18
3750	0.2	0.05	0.19	0.23	20.0	20.8	20.01	20.07
4000	0.1	0.2	0.13	0.18	20.0	20.6	19.97	20.00

z	(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
z	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\sqrt{u^2 + v^2}$	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$	$\text{tg}^{-1} \frac{u}{v}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$
m	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	°	°	°	°
0	0	0	0	0	-45	-45	-45	-45
100	3.1	2.3	3.28	3.13	-41.5	-42.7	-41.66	-41.23
200	5.7	4.4	6.20	5.93	-39.3	-40.0	-38.18	-38.50
300	8.2	6.4	8.62	8.39	-36.3	-37.9	-35.00	-35.43
400	10.4	8.2	10.89	10.44	-33.5	-35.7	-32.17	-33.48
500	12.1	9.8	12.85	12.42	-30.3	-33.5	-29.13	-29.78
600	14.0	11.2	14.77	13.96	-28.0	-31.7	-26.35	-27.12
700	15.5	12.4	15.89	15.46	-25.5	-29.7	-23.77	-24.10
800	16.8	13.8	17.09	16.68	-23.1	-27.7	-21.30	-22.41
900	17.8	14.8	18.07	17.70	-21.2	-25.7	-18.77	-19.95
1000	18.7	15.7	18.89	18.54	-18.3	-24.0	-16.53	-17.76
1200	20.0	17.4	20.13	19.83	-14.2	-20.7	-12.99	-13.88
1400	20.8	18.8	20.91	20.68	-10.7	-17.4	-9.67	-10.65
1600	21.4	19.6	21.25	21.14	-7.6	-14.7	-6.38	-7.81
1800	21.5	20.3	21.38	21.35	-5.1	-12.2	-4.41	-5.51
2000	21.5	20.8	21.37	21.39	-3.1	-9.9	-2.81	-3.56
2250	21.4	21.2	21.17	21.26	-1.4	-7.4	-1.18	-1.78
2500	21.0	21.4	20.91	21.04	-0.2	-5.3	-0.11	-0.56
2750	20.7	21.4	20.65	20.78	0.5	3.7	0.47	0.21
3000	20.4	21.3	20.41	20.53	0.8	2.3	0.75	0.66
3250	20.2	21.1	20.27	20.31	0.9	1.3	0.75	0.76
3500	20.1	21.0	20.10	20.18	0.8	0.5	0.68	0.76
3750	20.0	20.8	20.01	20.07	0.6	0.1	0.55	0.65
4000	20.0	20.6	20.00	20.00	0.4	-0.5	0.37	0.51

第 1 圖

第 2 圖

第 3 圖

第 4 圖

$$C^2 = 1 / \left(1 + 2 \times 55.2 \times \frac{1}{808.45} + \frac{(55.2)^2 \times 2}{(808.45)^2} \right) = 1 / 1.188 = 0.8787$$

$$\therefore C = 0.937$$

$$\operatorname{tg} r = 1 + 0.0682 / 0.0682 = 15.60$$

$$\therefore r = 86^\circ 20'$$

(D) に於いては次の如き逐次近似法に従つて種々の量を求める。

(23) の第二式に於いて $\bar{r}$ の代りに r を代入して C, r を求める。

$$C = 0.937, r = 86^\circ 20'$$

此の値を (18) に代入し, K を求める. 即ち

$$K = 1 - 0.173 \times 0.937 \times (\sin 86^\circ 20' - \cos 86^\circ 20') = 1 - 0.151 = 0.849$$

此の K を用ひて改めて C, r, D を求め之より (22) によリ風速分布を求めるのである.

$$\bar{\zeta} = K\zeta = 0.849 \times 8 \times 10^{-8} = 6.79 \times 10^{-8} \text{ sec}^{-1}$$

従つて

$$\sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \bar{\zeta}}} = \sqrt{\frac{21.5 \times 10^5}{(7.3 \times 6.8) \times 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{1}{1.41}} \times 10^5 \text{ cm} = 842.15 \text{ m}$$

第 5 圖

第 7 圖

第 6 圖

第 8 圖

第 2 表

z	(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
z	vr	u	vr	vr	v_θ	v	v_θ	v_θ
m	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec
0	-1.1	-0.9	-1.20	-1.15	1.3	0.9	1.30	1.24
100	-2.9	-2.3	-3.31	-3.00	3.6	2.6	3.78	3.58
200	-4.3	-3.5	-4.86	-4.36	5.8	4.3	6.20	5.83
300	-5.3	-4.4	-5.89	-5.33	2.8	5.9	8.49	7.98
400	-6.0	-5.1	-6.68	-5.96	10.0	7.5	10.65	9.97
500	-6.4	-5.5	-6.88	-6.31	11.6	8.8	12.62	11.78
600	-6.6	-6.0	-6.96	-6.46	15.2	10.3	14.34	13.42
700	-6.6	-6.3	-6.73	-6.36	14.8	11.6	15.91	14.89
800	-6.4	-6.4	-6.39	-6.13	16.1	12.8	17.23	16.16
900	-6.0	-6.4	-5.84	-5.82	17.3	14.1	18.38	17.25
1000	-5.6	-6.4	-5.39	-5.42	18.3	15.0	19.27	18.19
1200	-4.6	-6.0	-4.21	-4.49	19.8	16.7	20.60	19.62
1400	-3.5	-5.4	-3.04	-3.54	20.7	18.2	21.34	20.54
1600	-2.6	-4.8	-2.00	-2.58	21.2	19.2	21.64	21.06
800	-1.7	-4.1	-1.12	-1.78	21.4	20.0	21.68	21.29
2000	-1.0	-3.4	-0.52	-1.12	21.4	20.6	21.50	21.32
2250	-0.4	-2.6	0.01	-0.51	21.2	21.1	21.16	21.17
2500	0.1	-1.8	0.30	-0.11	20.9	21.3	20.80	20.94
2750	0.2	-1.2	0.40	0.13	20.6	21.3	20.48	20.67
3000	0.3	-0.7	0.40	0.25	20.4	21.3	20.23	20.47
3250	0.3	-0.4	0.33	0.7	20.2	21.1	20.06	20.26
3500	0.3	-0.1	0.24	0.24	30.1	20.9	19.96	20.14
3750	0.2	0.1	0.16	0.20	20.1	20.8	19.92	20.04
4000	0.1	0.2	0.10	0.14	20.0	20.6	19.91	19.99

z	(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
z	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\sqrt{u^2 + v^2}$	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$	$\text{tg}^{-1} \frac{u}{v}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$	$\text{tg}^{-1} \frac{v_r}{v_\theta}$
m	m/sec	m/sec	m/sec	m/sec				
0	1.7	1.3	1.77	1.69	-39.3°	-42.3°	-42.7°	-42.83°
100	4.6	3.5	5.02	4.67	-38.8	-40.7	-41.62	-39.97
200	7.2	5.5	7.88	7.28	-37.0	-38.8	-38.10	-36.62
300	9.4	7.3	10.33	9.59	-34.2	-36.7	-34.77	-33.78
400	11.5	6.0	12.52	11.62	-31.5	-34.4	-31.72	-30.88
500	13.2	10.4	14.37	13.36	-29.0	-32.2	-28.62	-28.20
600	14.8	12.0	15.94	14.88	-26.3	-30.4	-25.87	-25.60
700	16.2	13.2	17.28	16.17	-23.8	-28.4	-22.93	-21.45
800	17.4	14.3	18.38	17.28	-21.5	-26.5	-20.35	-20.75
900	18.3	15.5	19.29	18.20	-19.2	-24.5	-17.63	-18.63
1000	19.1	16.3	20.01	18.98	-17.1	-23.0	-15.60	-16.60
1200	20.3	17.8	21.03	20.13	-13.1	-19.6	-11.53	-12.85
1400	21.0	19.0	21.56	20.82	-9.5	-16.7	-8.13	-9.77
1600	21.4	19.8	21.65	21.22	-6.7	-13.9	-5.37	-6.79
1800	21.5	20.5	21.71	21.36	-4.5	-11.6	-2.91	-4.75
2000	21.4	21.0	21.51	21.32	-2.7	-9.3	-1.43	-3.00
2250	21.2	21.2	21.16	21.18	-1.1	-6.9	0.03	-1.39
2500	20.9	21.4	20.80	20.94	0.2	-4.9	0.87	-0.35
2700	20.6	21.4	20.48	20.67	0.6	-3.4	1.15	0.40
3000	20.4	21.3	20.23	20.47	0.8	-2.0	1.15	0.69
3250	20.2	21.1	20.06	20.26	0.8	-1.0	0.97	0.75
3500	20.1	21.0	19.96	20.14	0.7	-0.3	0.63	0.69
3750	20.0	20.8	19.92	20.04	0.6	0.2	0.47	0.58
4000	20.0	20.6	19.91	19.99	0.4	0.5	0.28	0.40

$$\therefore x\sqrt{\frac{\lambda+\zeta}{2\nu}} = 55.2\text{m} \times \sqrt{1.41} \times 10^{-5} = 0.0655$$

$$C^2 = 1/1 + 0.131 + 0.002 = 1/1.133 = 0.8826, \quad C = 0.940$$

$$\text{tg } \gamma = 1.0655/0.0655 = 16.27, \quad \gamma = 86^\circ 29'$$

$$D = 3.1416 \times 842.15 = 2646\text{m}$$

摩擦高度 D は滑りのない場合に比べて 9 米の低下を示して居る。

以上に得た C, γ を用ひて更に K を計算し、之より同様の計算を繰返して C, D, γ 等を得ることが出来る。假に K をもう一度求めれば

$$K = 1 - 0.166 \times 0.940 \times 0.98 = 1 - 0.156 = 0.844$$

になり、 $\zeta = K\zeta = 6.75 \times 10^5 \text{sec}$ になるが、實際の計算には最後の桁を繰上げるので、此の程度の近似を行つても實際上の變化はない。

以上の値を用ひて (22) により計算した結果は第 2 表に示す通りである。

第 5 ～ 第 8 圖は以上の値を圖示したもので之によると我々の解は略厳密解と一致して居ることが判るであらう。

以上の二つの例より我々の近似解は實用上充分の精度で厳密解と一致することが判るであらう。

4. 應 用 例

本節に於いては以上の解法より得られた諸結果より導かれる種々の事柄に就いて述べて見ようと思ふ。

(i) 收歛と渦度との關係

中心より半径 r なる半無限の垂直圓壩を考へるとき、此の假想的圓壩を通して流入する空氣の量 M は

$$M = \int_0^\infty 2\pi z \rho v_r dz$$

で與へられる。 $v_r > 0$ の場合は流出する量で、 $v_r < 0$ の場合は流入する量になる。簡單のために ρ として適當な平均値 $\bar{\rho}$ を用ひることにし (22) の第一式に代入すれば、

$$\begin{aligned} M &= -\rho v_g C 2\pi r \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{D}z} \cos\left(\frac{\pi}{D}z - \gamma\right) dz \\ &= -2\pi \bar{\rho} v_g C \Re \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{D}z(1-i) - i\gamma} dz \\ &= -2\pi \bar{\rho} v_g C \Re \left[-\frac{D}{\pi(1-i)} \left| e^{-\frac{\pi}{D}(1-i)z - i\gamma} \right|_0^\infty \right] \\ &= -2\pi \bar{\rho} v_g C \Re \left[\frac{De^{i\gamma}}{\pi(1-i)} \right] = -\sqrt{2} \bar{\rho} v_g C D \cos\left(\gamma - \frac{1}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

地表面で滑りのない場合には $C=1, \gamma=\frac{\pi}{2}$ になるから

$$M = -\bar{\rho} r v_g D \quad (26)$$

を得る。

x が 0 より ∞ 迄に變る間に r は $\pi/2$ より $\pi/4$ 迄變るから、 $\cos\left(r - \frac{1}{4}\pi\right)$ は $1/\sqrt{2}$ より 1 迄變る。又 C は 1 より 0 迄變る。従つて x が小さい (滑りがない) 程 M は大きい (地表面で滑り易くなる程 M は小さくなる)。

更に上式より判る事は $v_g > 0$ の時には $M < 0$ (即ち流入 ($v_g < 0$ の時 $M > 0$ 即ち流出) になることである。そしてその大きさは傾度風速度と摩擦高度に比例することである。然るに D は λ や ζ が小さい程大きく、 ν が大きい程大きい。従つて同じ構造の高低氣壓の場合でも低緯度に行く程流入及流出量が大きくなる。

高氣壓と低氣壓とを比較すると v_g が同じであれば高氣壓の方は低氣壓より D が著しく大きいので高氣壓の流出量は低氣壓の流入量より著しく大きい。

次に收斂量に就いて考へよう。單位底面積上に立つた半無限の氣柱に水平方向に收斂する量 Q は

$$Q = \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v_r)}{\partial r} dz$$

になるから、(22) の第 1 式を代入すると

$$\begin{aligned} Q &= -\bar{\rho} C \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_g)}{\partial r} \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z - r\right) dz \\ &= -\bar{\rho} C \left(\frac{\partial v_g}{\partial r} + \frac{v_g}{r} \right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi}{D} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D} z - r\right) dz \\ &= -\bar{\rho} C \zeta_g \frac{C}{\sqrt{2}\pi} \cos\left(r - \frac{1}{4}\pi\right) \end{aligned} \quad (27)$$

になり、滑りのない場合には

$$Q = -\frac{\bar{\rho}}{2\pi} \zeta_g D \quad (28)$$

になる。

上の式より次の結果が出る。

A) 收斂量は傾度風の渦度が大きくなる程大きくなる。

正の渦度 (低氣壓性) の場合には收斂し、負の渦度の場合には發散す。比濕を一定とすれば降雨量は收斂量に比例するから、降雨量は渦度に比例する。従つて最も降雨の激しい所は最も渦度の大きい所である。

B) 收斂量は摩擦高度に比例する。

摩擦高度は $\pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + K\zeta}}$ にて與へられるから、比濕が一定であれば同じ構造の低氣壓に於いて低緯度に於いては收斂量従つて降雨量も多く緯度が高くなる程少なくなる。

(ii) 上昇速度と渦度との關係

上昇速度を求めるには近似的に

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{又} \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (29)$$

即ち非壓縮性流體の連續方程式を用ひる (嚴密な低氣壓論は上の様な式では不充分である)。

上式より z にて積分すれば, $z=0$ に於いて $w=0$ なる故に

$$w = - \int_0^z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) dz$$

を得る。之に (22) を代入すれば

$$\begin{aligned} w &= \frac{C}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \int_0^z \exp\left(-\frac{\pi}{D}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{D}z - r\right) dz \\ &= \frac{C}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \Re \left[-\frac{D}{\pi(1-i)} \left| e^{-\frac{\pi}{D}(1-i)z - ir^2} \right|_0^z \right] \\ &= \frac{CD}{\sqrt{2}r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \left\{ \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\frac{\pi}{D}z} \cos\left(r - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{D}z\right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

又 $z=0$ で $w=0$ の場合には

$$w = \frac{D}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \left\{ 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{D}z} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{D}z\right) \right\} \quad (31)$$

又 $\zeta_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r}$ なる故に之を用ひると (30), (31) は夫々

$$w = \frac{DC}{\sqrt{2}\pi} \zeta_0 \left\{ \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\frac{\pi}{D}z} \cos\left(r - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{D}z\right) \right\} \quad (30')$$

$$w = \frac{D}{2\pi} \zeta_0 \left\{ 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{D}z} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{D}z\right) \right\} \quad (31')$$

になる。

上式より次の結果を得る

- (i) 上昇速度は摩擦高度に比例する。
- (ii) 上昇速度は渦度に比例し, 低氣壓性の場合には上昇氣流で高氣壓性の場合には下降氣流になる。
- (iii) $z \rightarrow \infty$ に於ける上昇速度は

$$w = \frac{DC}{\sqrt{2}\pi} \zeta_0 \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \quad (32)$$

及

$$w = \frac{D}{2\pi} \zeta_0 \quad (33)$$

になる。例へば前節の場合地面で滑りのない場合には

$$\zeta_0 = 8 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}, \quad D = 2655 \text{m}$$

になるから、

$$w = \frac{265500}{6.2832} \times 8 \times 10^{-8} \text{sec}^{-1} = 3.4 \text{cm/sec}$$

程度になる。

(iv) 上昇速度の最大層は (22) を (26) に代入すれば

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r)$$

になるから

$$\cos\left(\frac{\pi}{D}z - r\right) = 0, \quad \text{即ち} \quad \frac{\pi}{D}z - r = \frac{\pi}{2} \\ z = \frac{D}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + r \right) \quad (34)$$

之より $z=0$ で $W=0$ の場合には

$$z = D \quad (35)$$

即ち摩擦高度が最大の上昇速度の位置になる。滑りのある場合には $r < \pi/2$ であるから、 z は幾分 D より低い所にある。

最大上昇速度は $\frac{\pi}{D}z = r + \frac{\pi}{2}$ を (31) に代入すると

$$w_{\max} = \frac{DC}{\sqrt{2}\pi} \zeta_0 \left\{ \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\left(r + \frac{\pi}{2}\right)} \cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ \frac{DC}{\sqrt{2}\pi} \zeta_0 \left\{ \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(r + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \quad (36)$$

又 $z=0$ で $W=0$ の場合には

$$w_{\max} = \frac{C}{2\pi} \zeta_0 (1 + e^{-\pi}) \quad (37)$$

5. 模型低気圧内に於ける氣象要素の分布

以上の諸結果を利用して模型低気圧内で氣象要素の分布を論じて見よう。

低気圧としては密度は一定とし、風速分布として

$$v_g = A \frac{r}{(a^2 + r^2)^n} \quad (38)$$

を採用する。又簡単のために地上風速は零とする。

先づ以上の様な風速分布に對應する諸量を求めよう。

(i) 氣 壓

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left(\lambda v_g + \frac{v_g^2}{r} \right)$$

を積分すれば

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} A \left\{ \frac{\lambda}{n-1} \left(\frac{1}{a^{2(n-1)}} - \frac{1}{(a^2+r^2)^{n-1}} \right) + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{a^{2(2n-1)}} - \frac{1}{(a^2+r^2)^{2n-1}} \right) \right\} : n \neq 1, \quad (39)$$

$$= p_0 + \frac{\rho}{2} A \left\{ \lambda \log \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) - A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+r^2} \right) \right\} : n = 1 \quad (40)$$

但し p_0 は中心の氣壓示度とする。

(ii) 風速の最大の位置

(36) を r にて微分し、零と置けば

$$\frac{\partial v_g}{\partial r} = A \left\{ \frac{1}{(a^2+r^2)^n} - \frac{2nr^2}{(a^2+r^2)^{n+1}} \right\} = 0$$

即ち

$$r = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} a \quad (41)$$

又最大風速は

$$v_{g\max} = \frac{A}{a^{2n-1}} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n \quad (42)$$

で與へられる。

(iii) 渦度 ζ_g

$$\begin{aligned} \zeta_g &= \frac{\partial v_g}{\partial r} + \frac{v_g}{r} = 2 \frac{A}{(a^2+r^2)^n} \left(1 - n \frac{r^2}{a^2+r^2} \right) \\ &= \frac{2v_g}{r} \left(1 - n \frac{x^2}{1+x^2} \right). \quad \text{但し} \quad x = \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (43)$$

以上は n が一般の場合であるが我々は $n=2$ の場合に就いて數值的に計算を行つて見る。

數値としては次の値を採用した。

$$\bar{\rho} = 1.1 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3, \quad \nu = 5 \times 10^6 \text{C.G.S.}$$

$$A = 96 \times 10^{25} \text{C.G.S.}, \quad a = 400 \text{km} = 4 \times 10^7 \text{cm}$$

氣柱内の平均比濕 20, 緯度 30° 即ち $\lambda = 7.3 \times 10^{-5} \text{cm}^{-1}$.

(i) 傾度風速

$$v_g = A \frac{r}{(a^2+r^2)^2} = \frac{A}{a^3} \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

最大風速

$$v_{g\max} = \frac{A}{a^3} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{9}{16} = 48.71 \text{m/sec}$$

最大風速の位置

$$r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}}a = 231\text{km}$$

(iii) 氣壓分布

(36) を變形すれば

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\rho}{2} \frac{A}{a^2} \left\{ \lambda \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) + 3a^4 \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^3} \right) \right\} \\ &= p_0 + 2.475 \left\{ 7.8 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) + 12.5 \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^3} \right) \right\} \text{ mmHg} \end{aligned} \quad (44)$$

之より氣壓分布を求める。

(iii) 渦 度

渦度は (40)

$$\zeta_g = 2 \frac{v_g}{r} \left(1 - 2 \frac{x^2}{1+x^2} \right) \quad (45)$$

を得るから、之より計算する。

(iv) 上昇速度

上昇速度は (33) より計算され、最大上昇速度は $z=D$ に於いて起り

$$w_{\max} = w_{\infty} (1 + e^{-\pi}) = 1.0431 w_{\infty}$$

より計算される。

(v) 收斂量及降雨量

收斂量 Q は (28) により

$$Q = -\frac{\rho D}{2\pi} \zeta_g$$

であるが、 w_{∞} は (33) より $\zeta_g \frac{D}{2\pi}$ なる故

$$Q = -\rho w_{\infty}$$

により收斂量を求めることが出来る。

收斂量とは単位底面積の半無限氣柱内に收斂する量であるから、之の中に含まれる水蒸氣は凝結すると考へられる。今平均の比濕を 20 とすれば、水蒸氣の收斂量は $Q \times 20/1000$ である。従つて 1 時間の降雨量に直すには $Q \times 20/1000 \times 3600 \times 10 \text{ 耗/時} = Q \times 720 \text{ 耗/時}$ になる。之より降雨量を求めた。

猶渦度の負の範圍では $w < 0$ になるから、下降氣流及水平發散氣流がある。従つて此の範圍では天氣は良いものと考へられる。この様に天氣の良否は渦度によつて定まつて来る。

(vi) 流入量 M

半徑 r なる半無限圓嚢を通して流入する量は (26) により與へられる。

以上の方法に依つて得られた結果が第 3 表に示すものである。猶第 9 圖は之を圖示し、低氣壓

(颱風)内の氣象要素の分布を示せるものである。

第9圖に於いては軸對稱の構造をして居るので各要素の分布曲線を四象限に分けて書いてある。之は眼のない颱風の模型である。本節の事柄より颱風内の氣象要素に関する實用的方面の應用に就いては相當に有用なものであるから、此の方面の關係者の注意を喚起して置き度い。

第 3 表

中心距離	100	0	100	200	300	400	500	600	700	800	1200	1600	2000
氣 壓	耗	710	716.2	728.8	739.7	746.2	750.2	752.7	754.2	755.3	757	758	759.5
傾 度 風 速	米/秒	0	33.2	48.0	46.1	37.5	28.5	21.3	15.9	12.0	4.5	2.1	1.7
渦 度	10^{-5} 秒 ⁻¹	7.5	53.7	28.8	8.6	0	-1.04	-0.95	-0.69	-0.47	-0.10	-0.04	-0.01
摩 擦 高 度	米	2694	1324	1842	2609	3677	3927	3902	3838	3702	3702	3677	3677
上限上昇速度	厘/秒	3.2	12.4	8.4	3.6	0	-0.65	-0.59	-0.42	-0.29	-0.06	-0.036	-0.007
最大上昇速度	厘/秒	3.3	12.9	8.7	3.8	0	-0.68	-0.68	-0.44	-0.32	-0.07	-0.03	-0.007
收 斂 量	10^{-3} 瓦/秒	3.63	14.19	9.24	4.18	0							
降 雨 量	耗/時	2.61	10.22	7.65	3.00	0							
流 入 量 M	10^{-6} 瓦/秒	0	5	15	40	61	61	55	48	41	20	14	13

第 9 圖

6. 颶眼風の理論的考察

颶風眼に就いての特性を要約すれば

- (i) 強烈な颶風に現はれる。
- (ii) 強烈な低氣壓系の中心に現はれ、風は弱く又時には靜穩な事もある。
- (iii) 雨は止み、雲は切れ、時には青空や星も見える。

- (iv) 直徑は數十軒以内である。
- (v) 海上では陸上より頻繁に現はれる。

颶風眼の發生に對しては未だ決定的の理論はない様である。此の發生論に關係の深いのは眼中に於ける氣溫や濕度の値であり、1882年10月20日の Manila 颶風では氣溫は 23.8° より 31.6° に昇り、濕度は 100% より 50% に下り、混合比は 19.1 より 15.1 に下つて居た。之は颶風眼中の下降氣流説に都合が良い⁽¹⁾ と Normand⁽²⁾ も述べて居る。R. C. E. Deppermann が此の事を確証するために多くの颶風の記録を調べた所がその様な顯著な結果がなかつたのである⁽³⁾。我國に於いても富士山の觀測結果によれば颶風中心では溫度が高くなかつたと云ふ⁽⁴⁾。従つて下降氣流説は必ずしも確かではない。

茲に前の結果より此の問題に若干の考察を行つて見ようと思ふ。

雨が止み、雲が切れ、時には青空や星の見えるのには必ずしも下降氣流が必要ではない。上昇氣流が無いが又あつても極く弱くて問題にならない程度であれば良い譯である。又海上では陸上に於けるより頻繁に現はれることは岡田先生も注意されて居る様に地面の摩擦抵抗が効いて居る⁽⁵⁾。扱て(27)に依れば收斂量は

$$Q = -\rho C \zeta_0 \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(r - \frac{1}{4}\pi\right)$$

で與へられる。(此の値が降雨量に比例する譯である)。

Haurwitz は中心附近で D が小さくなるから、收斂部分の氣柱の高さが低いことが颶風眼の部分の説明になると述べて居る⁽⁶⁾。が之は不充分であることは上式より明らかである。むしろ著者の考へでは $\zeta_0 C$ が重要であると思ふ。

先づ C に就いて考へるに (23) より判る様に

$$C = 1 / \left(1 + x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} + x^2 \frac{2\lambda + \zeta}{\nu} \right)$$

であり、 x が大きくなる程 C は小さくなるのである。即ち地面摩擦が小さくなる程收斂量従つて上昇速度や降雨量も略逆比例して小さくなるのである。従つて海上の方が陸上に於けるより頻繁に現はれる傾向があることは此の事より説明出来る。

次に ζ_0 に就いて考へる。

(4) の例は中心附近で距離に比例して傾度風速が増して居る場合であつたが此の様な場合には中心に於いても ζ_0 は零でないから中心でも收斂が起り、降雨があつた。然るに今 $r^n (n > 1)$ の場合

(1) 颶風の強烈な場合にも現はれると云ふ人もある様である。

(2) Ind. Met. Mem., 23, 19.

(3) Manila Central Obs., Weather Bureau. 1937.

(4) 岡田：毎象學，下卷 11 頁。

(5) 岡田：氣象學，下卷 13 頁。

(6) Gerl. Beitr. z. Geophys. 1936.

には $\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} = (n+1)r^{n-1}$ になり、中心では零になるから、中心では Q は零になり、上層氣流がないことになり、雲が切れても差支へがない。

$$v_0 = Ax^n \quad (x=r/a)$$

今 $x=1$ で $v_0 = 4m/sec$ になる場合を考へるに x と x^n との関係は左圖の如くなる。

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} = (1+n)n^{n-1}$$

なる故に上圖より判る様に $\zeta_{0=1}$ の α 分の 1 の範圍は $1/\alpha = x^{n-1}$, $x = 1/n^{n-1} \sqrt{\alpha}$ になり、 n が 1 より大きくなるに従ひ急激に増加する。従つて傾度風速の増加率が x^n に比例し n が大きければ大きい程 ζ_0 結局上昇速度や降雨量の極く小さい範圍が増すことになるのである。上昇速度が假に存在しても充分小さければ實際上は問題にならないから、或る上昇速度を限界としてそれ以下が問題にならない場合、今假に最大位置の上昇速度を $10cm/sec$ とし $0.1cm/sec$ が限界とすれば $1/\alpha = 1/100$ になるから、 $x=300$ 籽の場合を考へれば $n=1.5$ の時 $r = (1/100)^2 \times 300$ 籽 $= 30$ 米、 $n=2$ の時 $r=3$ 籽、 $n=3$ の時 $r=30$ 籽、 $n=4$ の時 $r=64.7$ 籽になる。

即ち 300 籽で最大風速に達する様な場合でも分布が x^3 に比例する場合は 30 籽の半径の眼が現はれることになる。勿論此の範圍内では風は非常に弱いことは明らかである。

以上の事柄を要約すれば発達した颶風に於いては中心より少し離れた所に渦度の集積が大きく、然して中心より此の最大域迄に行く際の風速増加率が大きく、従つて中心より若干の範圍では殆んど上昇氣流が無視出来る範圍がある。然らば内域に於いて風速が r の何乗に比例するかに就いては今の所不明であるが兎に角上例では $n=2$ 又は 3 位でも充分颶風眼が現はれて居るのである⁽¹⁾。以上の理論に依れば初めに述べた五つの條件とは矛盾しない様である。即ち颶風眼には氣壓配置従つて傾度風速分布と地面摩擦が本質的の事柄である。

7. 著者の近似法の吟味補足

- (1) より (2) を導く場合には $v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y}$ の如き餘分の項の追加を行つて居る。之は (2) の如き形に纏めるために必要であつた。然るに單に $\partial u / \partial y$ 等の平均値を使ふのみとすれば

(1) 颶風眼の附近迄我々の近似解を用ひてもよいかどうかの疑問がある。それは粘性項が $(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \times v_0$ であるのを初めの 3 項を省略した式を用ひて居るからである。然し之は中心より 1 籽以内を除けば r に關する項は z に關する項より小さいから、上例の $n=1.5$ の場合を除けば大體颶風眼の中に對しても使へるものと考へられる。之に關する詳細吟味は後に行ふが、然し大體の議論としては間違つて居ないであらうと考へる。

第 10 圖

(2) の代りに

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\lambda - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\end{aligned}$$

の如き非對稱の形式を用ひても良い筈である。即ち (3) の定常的問題を解くのに

$$\left. \begin{aligned} - \left(\lambda + \frac{v_\theta}{r} \right) v_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(P + \frac{\rho}{2} v_r^2 \right)}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \left(\lambda + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) v_r &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

を用ひて、 $\frac{v_\theta}{r}$ を ζ , $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}$ を ζ と置いて非對稱の線形微分方程式

$$\left. \begin{aligned} -\beta' v &= -K + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \beta u &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

と比較してもよい筈である。果して此の様な方法が成功するかを示して見よう。

(47) より v を消去すれば

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{\beta \beta'}{\nu^2} u = \alpha^4 u \quad (48)$$

と置く。但し

$$\alpha^4 = -\frac{\beta \beta'}{\nu^2}$$

今 $\epsilon = \frac{\sqrt{\beta \beta'}}{\nu}$ と置くと (48) の解は

$$u = A e^{-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}(1+i)z} + B e^{-\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}(1-i)z} \quad (49)$$

但し $z \rightarrow \infty$ に對して ∞ になる解は捨てゝある。之を (47) の第 1 式に代入すると

$$v = \frac{K}{\beta'} - i \sqrt{\frac{\beta}{\beta'}} \left(A e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \epsilon z} - B e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \epsilon z} \right) \quad (50)$$

になる。

$z=0$ に於いて $u=v=0$ の場合を考へると

$$0 = A + B \quad \therefore B = -A$$

$$0 = \frac{K}{\beta'} - i \sqrt{\frac{\beta}{\beta'}} 2A \quad \therefore A = \frac{K}{2i \sqrt{\beta \beta'}}$$

従つて

$$u = -\frac{K}{\beta'} \sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z} \sin \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z, \quad (51)$$

$$v = \frac{K}{\beta'} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z} \cos \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z \right)$$

之と比較すれば

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{K}{\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r}\right)} \sqrt{\frac{\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r}\right)}{\left(\lambda + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right)}} e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z} \sin \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z, \\ v_\theta &= \frac{K}{\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r}\right)} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z} \cos \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}z \right), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

但し

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \sqrt{\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r}\right) \left(\lambda + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right)}, \quad (53)$$

又

$$D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\left(\lambda + \frac{v_\theta}{r}\right) \left(\lambda + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right)}} \quad (54)$$

次に $\frac{v_\theta}{r}$, $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}$ として傾度風を採る場合と 0.834 を乗じた場合を考へる。

前者を (E), 後者を (F) と名付ける。前の例と比較するために同じ数値を用ひる。

$$(E) \quad \frac{v_\theta}{r} = \frac{2000}{5 \times 10^7} = 4 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = 4 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$$

従つて

$$\beta' = \lambda + \frac{v_\theta}{r} = 11.3 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}, \quad \beta = \lambda + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} = 15.3 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$$

従つて

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta\beta'}}{2\nu}} = 1.19 \times 10^{-5}, \quad D = \pi \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = 2633 \text{ 米},$$

$$\sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} = \sqrt{\frac{11.3}{15.3}} = 0.86, \quad \frac{K}{\beta'} = 20 \text{ m/sec}$$

以上の値を用ひて u_r と v_θ を求めれば第4表の如くなる。之と (A)(D) と比較すると (D) に比べて必ずしも良い結果になつて居ない事が判る。

(E) 次に $\frac{v_\theta}{r}$, $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}$ の平均値を採つた場合を考へよう。

$$\beta' = \lambda + K \frac{v_\theta}{r} = (7.3 + 4 \times 0.827) \times 10^{-5} = 10.60 \times 10^{-5},$$

$$\beta = \lambda + K \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) = (7.3 + 8 \times 0.827) \times 10^{-5} = 13.91 \times 10^{-5},$$

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = 0.1214, \quad D = \pi \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} = 2577 \text{ 米}, \quad \sqrt{\frac{\beta'}{\beta}} = \sqrt{\frac{10.60}{13.91}} = 0.873.$$

以上の値を用いた結果が第5表に示す通りである。

第 4 表

z 米	v_r 米/秒	v_θ 米/秒
0	0	0
100	-2.05	3.37
200	-3.28	4.88
300	-4.31	6.89
400	-4.88	8.92
500	-5.45	11.06
600	-5.65	12.86
700	-5.67	14.15
800	-5.53	15.52
900	-5.30	17.72
1000	-5.00	17.74
1200	-4.19	19.32
1400	-3.29	20.37
1600	-2.49	20.67
1800	-1.74	21.26
2000	-1.13	21.34
2250	-0.56	21.24
2500	-0.15	21.00
2750	+0.09	20.75
3000	+0.20	20.52
3250	+0.24	20.31
3500	+0.22	20.16
3750	+0.20	20.06
4000	+0.15	20.00

第 5 表

z 米	v_r 米/秒	v_θ 米/秒
0	0	0
100	-1.87	2.41
200	-3.29	4.78
300	-4.32	7.01
400	-5.02	9.12
500	-5.5	11.05
600	-5.61	12.79
700	-5.61	14.33
800	-5.56	15.70
900	-5.20	16.91
1000	-4.86	17.93
1200	-4.05	19.47
1400	-3.16	20.47
1600	-2.34	21.04
1800	-1.60	21.29
2000	-1.00	21.33
2250	-0.46	21.20
2500	-0.11	20.96
2750	+0.12	20.80
3000	+0.22	22.46
3250	+0.24	20.27
3500	+0.25	20.13
3750	+0.18	20.03
4000	+0.13	19.98

以上の結果より判る様に非對稱型の解は對稱型の解に比べて必ずしも精度が良くない。

8. 地表風と等壓線の傾角

地表風と等壓線のなす角は種々の條件により變るのであるが颶風中に於いても相當な規則的變化のあることが報告されて居る。例へば堀口博士は颶風に關する研究中に於いて中心よりの距離との關係を調査し、次表の如き結果を得られた。(1)

中心よりの距離	100	200	300	400	500	600	700 軒
角 度	51	54	51	57	55	49	52 度

又高橋(浩)氏(2)も同様の調査を行ひ次表を得られた。

(1) Mem. Imp. Mari. Obs. 132 頁, 第 XV 表

(2) 毎象集誌 第 17 卷 6 頁昭和 14 年。

此の値に於て中心距離 0.3 に對して 40° といふ値は我々の理論からは豫期出來ない。堀口博士の調査では距離 100 軒で 51° になつて居る。勿論 0.3 と 100 軒とは一致しないけれど最大風速の内域といふ點では大體同傾向にならなければならない様に思はれる。此の點は將來の研究に残して置く。

中心よりの距離	0.3	0.8	1.5	3.0	6.0	8.0 軒
角 度	40	54	65	64	69	64 度

上の結果によれば大體に於いて 45° より大きく 50° 乃至 70° 位になる。上の結果は統計的に多くの條件の場合ので平均あるから、一概に云へないが大體中心附近で弱く或る距離で最大になり、それより減少する傾向が見える。

我々の解を用ひて傾角を求めて見よう。

(22) に於いて $z=0$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -v_\theta C \cos \gamma, \\ v_\theta &= v_\theta (1 - C \sin \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

但

$$C = 1 \sqrt{1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}} + x^2 \frac{\lambda + \zeta}{\nu}}, \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = 1 + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} = 1 + \frac{1}{x} \frac{D}{\pi},$$

$$D = \pi \sqrt{\frac{2\nu}{\lambda + \zeta}} \quad (24)$$

今等壓線と風向のなす角の餘角を ψ とすれば

$$\tan \psi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{1 - C \sin \gamma}{-C \cos \gamma} = \tan \gamma - \frac{1}{C} \sec \gamma \quad (55)$$

更に (23) より

$$\frac{1}{C} = \sqrt{\left(1 + x \frac{\pi}{D}\right)^2 + \left(x \frac{\pi}{D}\right)^2} = x \frac{\pi}{D} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{D}{x\pi}\right)^2} \quad (56)$$

$$= \frac{1}{\tan \gamma - 1} \sqrt{1 + \tan^2 \gamma} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma - \cos \gamma} = \frac{1}{\sin \gamma - \cos \gamma} \quad (57)$$

(23) 及 (56) を (55) に代入すれば

$$\begin{aligned} \tan \psi &= 1 + \frac{D}{x\pi} - x \frac{\pi}{D} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{D}{x\pi}\right)^2} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{D}{x\pi}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{D}{x\pi} - x \frac{\pi}{D} \left(1 + \left(1 + \frac{D}{x\pi}\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{D}{x\pi} - \left\{x \frac{\pi}{D} + x \frac{\pi}{D} + 2 + \frac{D}{x\pi}\right\} \\ &= -\left(1 + 2x \frac{\pi}{D}\right) = -\left(1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda + \zeta}{2\nu}}\right) \\ &= -\left(1 + 2x \sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}\right). \end{aligned} \quad (58)$$

上式に依れば ζ が大きくなる程 ψ も大きくなる。即ち等壓線に近づくことを示して居る。

(i) 一例として $x=55.2\text{m}$, $\lambda=7.27 \times 10^{-5}$, $\nu=5 \times 10^5 \text{C.G.S.}$ とすれば,

$$2x\sqrt{\frac{\lambda}{2\nu}} = 2 \times 5520 \sqrt{\frac{7.27 \times 10^{-5}}{106}} = 0.094.$$

従つて

$$\tan \psi = -\left(1 + 0.094 \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)}\right). \quad (59)$$

之より次の表を得る.

ζ	λ	2λ	3λ	4λ	5λ	10λ	15λ	20λ	25λ
$\sqrt{1 + (\zeta/\lambda)}$	1.41	1.73	2	2.45	3	3.32	4	4.58	5.10
$-\tan \psi$	1.131	1.163	1.188	1.230	1.282	1.312	1.376	1.431	1.479
ψ	48°23'	49° 8'	49°55'	50°53'	52°3'	52°41'	54°00'	55°3'	55°56'

(ii) 次に更に廣い範圍變化に應ずるために次の表を與へに置く.

φ	10	20	30	40°
λ	0.25507	0.49741	0.72722	0.93518

なる故に $\sqrt{\lambda + \zeta}$ に對して次の表を得る:

φ	0.5	1	3	5	10	15	20	$25 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$
10°	0.8678	1.1194	1.8036	2.2919	3.1016	3.8051	4.4000	5.0249
20	0.9987	1.2235	1.8700	2.3445	3.2404	3.8357	4.5277	5.0498
30	1.0077	1.3141	1.0305	2.3981	3.2741	3.9661	4.5530	5.0715
40	1.1979	1.3910	1.9837	2.4362	3.2076	3.9910	4.5760	5.0922

従つて之より (58) により ψ の値を求めれば次表の如くなる:

$$\varphi = 10^\circ$$

$x\sqrt{2/\nu}$	0	10	20	30	40
$\zeta = 0 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	45°	46°24'	47°53'	49° 1'	50°29'
0.5	45	47 22	49 34	51 34	53 25
1	45	48 2	50 45	53 11	55 22
3	45	49 44	53 41	57 21	59 31
5	45	50 52	55 33	59 19	62 27
10	45	52 39	58 19	62 37	65 57
15	45	54 5	60 25	65 08	68 22
20	45	55 13	62	66 41	70 5
25	45	56 21	63 30	68 16	71 34

$$\varphi = 20^\circ$$

$x\sqrt{2/\nu}$	0	10	20	30	40
$\zeta = 0 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	45°	46°57'	48°46'	50°23'	52° 1'
0.5	45	47 44	50 11	52 26	54 27
1	45	48 18	51 13	53 49	56 7
3	45	49 53	53 57	57 21	60 14
5	45	50 59	55 45	59 35	62 42
10	45	52 56	58 45	63 7	66 28

15	45	54 8	60 30	65 3	68 28
20	45	55 27	62 19	67 1	70 25
25	45	55 24	64 33	68 19	71 41

 $\varphi = 30^\circ$

$x\sqrt{2/\nu}$	0	10	20	30	40
$\zeta = 0 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	45°	47°21'	49°29'	51°28'	53°17'
0.5	45	47 45	50 14	52 29	54 31
	45	48 32	51 38	53 47	56 45
3	45	50 2	54 11	57 39	60 34
5	45	51 6	55 56	59 48	62 56
10	45	53 1	58 51	63 14	66 36
15	45	54 24	60 51	65 28	68 52
20	45	55 30	62 22	67 5	70 29
25	45	56 26	63 36	68 22	71 44

 $\varphi = 40^\circ$

$x\sqrt{2/\nu}$	0	10	20	30	40
$\zeta = 0 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	45°	47°39'	50°2'	52°12'	54°12'
0.5	45	48 14	51 6	53 40	55 57
1	45	48 41	51 58	54 48	57 17
3	45	50 9	54 12	57 55	60 51
5	45	51 12	56 5	59 59	63 8
10	45	52 52	58 39	63 0	66 21
15	45	54 27	60 55	65 32	68 56
20	45	55 33	62 26	67 9	70 32
25	45	56 23	64 33	68 25	71 46

上表の結果と實測による傾角とを比較すると傾角の動徑分布の意義に對する光明が與へられるものと思はれる。更に $\zeta = 0$ の場合では相當に大きい摩擦があつても傾角は實測の與へる程大きくならないから、此の傾角に對する渦度の意義が明瞭になるであらう。

9. 地表風と傾度風との關係

颶風中に於いて傾度風の實測は未だ行はれて居ない。ラジオトラッキングが將來發達した時には實測出来るようになるのであるが現在は未だその域に達して居ない。然し地上風は實測出来るので之を傾度風の大きさとの關係を求めて置くのは興味あることと考へられる。

(55) より

$$\frac{v_r}{v_\theta} = -C \cos \gamma, \quad (55')$$

$$\frac{v_\theta}{v_g} = 1 - C \sin \gamma \quad (55'')$$

従つて

$$\frac{\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}{v_g} = \sqrt{1 - 2C \sin \gamma + C^2}. \quad (60)$$

然るに (57) より逆数を求め、上式に代入すると

$$\frac{v_r}{v_g} = \cos \gamma (\cos \gamma - \sin \gamma) \quad (61)$$

$$\frac{v_r}{v_g} = 1 - \frac{\sin \gamma}{(\sin \gamma - \cos \gamma) \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma \cos \gamma - \cos^2 \gamma - \sin \gamma}{(\sin \gamma - \cos \gamma) \cos \gamma} \quad (62)$$

$$\frac{v_\theta}{v_g} = 1 - (\sin \gamma - \cos \gamma) \sin \gamma = \cos \gamma (\cos \gamma + \sin \gamma) \quad (63)$$

$$\frac{\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}{v_g} = \sqrt{1 - 2 \sin \gamma (\sin \gamma - \cos \gamma) + (\sin \gamma - \cos \gamma)^2} = \sqrt{2} \cos \gamma. \quad (64)$$

又一方 (55), と (57) より C を消去すれば

$$\cot \phi = \frac{\cos \gamma - \sin \gamma}{\cos \gamma + \sin \gamma} \quad (65)$$

を得る, 故に γ をパラメーターと考へれば, $v_r/v_g, v_\theta/v_g, \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}/v_g$ 等は ϕ の函数として表は

γ	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
ϕ	90°	85°	80°	75°	70°	65°	60°	55°	50°	45°
v_r/v_g	0	-0.0791	-0.140	-0.1830	-0.043	-0.2045	-0.1831	-0.141	-0.0791	0
v_θ/v_g	1	0.2060	0.7996	0.5830	0.5622	0.4384	0.3173	0.2477	0.0942	0
$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}/v_g$	1	0.9082	0.8116	0.7070	0.5981	0.4836	0.3662	0.2460	0.1230	0
$v_g/\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$	1	1.10	1.23	1.41	1.67	2.07	2.73	4.07	8.13	∞

される.

第 11 圖

上の結果より上の表を得る.

上の結果より渦粘性係数が高度に對して變化しなければ地面の風向と等壓線の傾角を測れば, 地上風速より傾度風速が求められるのである. 上の結果より傾度が 60° では 1.4 倍になつて居る. 傾角が大きくなる程倍率が小さくなるのである. 上表に於いて $\gamma=45^\circ$ は地上摩擦が零で, $\gamma=90^\circ$ は地上摩擦が無限大の場合である. 第11圖は上表を圖示したものである.