氣溫遞減率の(近似)定理*

澤 田 龍 吉**

問題と基本方程式

地球大氣の所謂「氣溫遞減率」が自轉と南北氣溫傾度の組合せより生ずる一種の平衡狀態として解釋されることは、既に筆者が別の論文で扱つた。(氣象集誌第 2 輯第 22 卷第 5 號)

平衡狀態に於いて氣溫遞減率は地球上ほゞ一定であるが、日々の實狀は可なりの變化を示してゐる。南と北では對流圈全體の氣層が平行的な氣溫傾度を示し、從つて氣溫遞減率は同じであることが常態として豫想されるが、一例へば滿洲方面より寒氣が南下するとき、ほゞ同じ氣圈内と思はれる範圍内に於いても氣溫遞減率が可なり變つてゐることも多い。

滿洲及び日本に於ける筆者の經驗は大雜把に、寒氣は遞減率が大で、暖氣は小であることを暗に感じてゐた。同じ氣圈内でも力學的其他の原因に依り一部分が寒冷化し、或ひは溫暖化するときにも何時も特徴として氣溫遞減率が可なり厚い氣層全體(概略、對流圈全部に亙る)に變化する事實を痛感して來た。

この氣溫遞減率(以下單に遞減率と呼稱す)の變動は何に起因するか。尠くとも何が重大要素か。

この研究の理論的方法には先づ二つの出發點が考へられる。一つは運動方程式を主體として、その中に含まれる氣溫 T の函數を決定する立場である。他の一つは筆者が「場の變動方程式」と呼稱したものをを用ひ、或る流れが存する時に如何に T の分布が變化するかを決定しやうとする立場である。既に筆者がその論文で述べたやうに、運動方程式も場の變動方程式も流體運動の實態を異つた立場から眺めるのみで、結局は同じことを示すものではあるが、數學的便宜上からは違つた價値を持つことが考へられる。又、場が與へられた時に運動を決定するためには運動方程式が便利であるし、運動が與へられた時に場が如何に變動するかを論ずるには場の變動方程式が有利であることは確實である。

本編は主題の示すやうに氣溫の場の變動を主體とするものであるから、場の變動方程式から出發することにしよう。

即ち基礎の式として、氣溫の場の變動方程式の一つ:—

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dT}{dt}\right) - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

* R. Sawada: A Theorem on the Lapse-rate of Free Atmosphere.

** 中央氣象臺研究部第二研究室, 氣象技師。

を用ひる。座標系は x, y, z 直角座標系を用ひ、 u, v, w は夫々の方向の速度成分、 t は時間を示す記號である。(1) 式中に現れる二種類の未知量即ち dT/dt 及び u, v, w は夫々熱力學第一法則及び運動方程式に依り與へられるものである。即ち補助の式として、

$$lv = RT \frac{\partial \ln P}{\partial x} \quad \text{又は} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$-lu = RT \frac{\partial \ln P}{\partial y} \quad \text{又は} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

$$-g = RT \frac{\partial \ln P}{\partial z} \quad \text{又は} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{AR}{C_p} \frac{T}{P} \frac{dP}{dt} \quad (5)$$

を採用する。即ち風が水平方向には地衡風則に従ふとする。

記號 $l = 2\omega \sin \varphi$, ω : 地球自轉角速度, φ : 緯度—着目せる空間で φ は一定と近似假定をする。 A : 仕事の熱當量, R : 空氣の氣體常數, P : 氣壓, ρ : 密度, C_p : 定壓比熱, Q : 外部との交換熱量。

更に連續の式を併せ用ひる。

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

これ等一聯の式に現れる微分記號 d/dt は一つの實質が爲す變化たることを示すのは通常 of 取扱ひと全く同じであつて、(1) 式は、或る空氣質點が (2) 乃至 (6) 式で與へられる他の量に依つて如何に遞減率を變へながら運動するかを示すものと解釋するのである⁽¹⁾。

補助の計算

水平運動が地衡風則に従ふ場合は、空氣粒子はその狀態を如何に變化するか、某高度 z に於ける氣壓の局地變化は (4), (6) 式を用ひて、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = g \int_z^\infty \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = -g \int_z^\infty \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dz$$

(2), (3) を導入して、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -g \left[\rho w \right]_z^\infty = g \rho w \quad (7)$$

故に空氣粒子自身の氣壓變化は、

(1) $\partial T / \partial z$ は一個の粒子のみでは定義されない。降り合つた流體粒子の溫度差を考へ、その相互距離を無限に小さくした時の量として始めて定義される。然らば $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$ は一つの粒子に着目しては考へ難くはないかの疑問が生ずるが、これは筆者の既に解明した所である。「場の變動方程式」氣象集誌 第 2 輯 第 22 卷 第 5 號を参照。

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t} - g\rho w$$

(7) 式を用ふれば結局,

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad (8)$$

即ち、地衡風の場合は空気粒子は等壓変化の下に運動する⁽¹⁾。これは當然のことである。

熱力学の第一法則を示す (5) 式に依り粒子の気温変化は、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p} \frac{dQ}{dt} \quad (9)$$

となる。即ち空気粒子は非断熱変化のみに依り温度を変化する。若し断熱変化であれば、 $dQ/dt=0$ であるから、

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad (9)'$$

となり粒子の気温は不変であることになる。従つて ($P=\rho RT$ の関係から) $d\rho/dt=0$ 、即ち密度も不変である。

次に (2), (3), (4) を組合はせて、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial \ln T}{\partial z} - \frac{g}{l} \frac{\partial \ln T}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v \frac{\partial \ln T}{\partial z} + \frac{g}{l} \frac{\partial \ln T}{\partial x} \quad (11)$$

これより、

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} \left(u \frac{\partial \ln T}{\partial x} + v \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right) \quad (12)$$

又、(2) を y で、(3) を x で夫々微分して加ふれば、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = u \frac{\partial \ln T}{\partial x} + v \frac{\partial \ln T}{\partial y} \quad (13)$$

故に (12), (13) を組合はせて、

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (14)$$

(9) 及び (14) 式を (1) 式中に導入すれば $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$ を示す式を得るであらう。

遞減率の定理

(9), (14) 式を (1) 式に代入すれば、

(1) $z=0$ では Jeffreys の定理に依り $\partial P/\partial t=0$ なることは既に良く知られてゐる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{1}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dQ}{dt} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (15)$$

連続の式を代入すれば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{1}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dQ}{dt} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{d \ln \rho}{dt} \quad (16)$$

断熱変化では $dQ/dt=0$ となり、且つ $d\rho/dt=0$ となる（前述）から、空気は遞減率を変化しないで運動する。厳密には $dQ/dt \neq 0$ であり、断熱変化とは云ひ難い Q が現實である。

Q に就いては知るところ未だ尠いが、 $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dQ}{dt} \right)$ は空氣が外部から得る（又は外部に與へる）熱量の變化が高度に依つて如何程異なるかを與へる量であつて、

1. 水蒸氣が重要な役割を演ずる場合
2. 特殊な局所的變化が考へられる場合

を除外すれば、殆んど $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \rightarrow 0$ として良さそうである。——（これが實際に適當であるかないかは次に實證する。）従つて、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{d \ln \rho}{dt} \quad \text{又は} \quad \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\partial T / \partial z}{\rho} \right) = 0 \quad (16')$$

但し非断熱変化であるから $d\rho/dt \neq 0$ である。即ち、一つの實質に固有な常數 A を用ひて、

$$\frac{\partial T}{\partial z} = A\rho \quad (17)$$

が得られる。この A はベルヌーイの定理に於けると同様に、空氣の矢々の實質に固有な量であり、大雑把に云ふと、氣團に固有な常數である。

定常流の場合には各流線に固有な値となる。

實 例

日時——昭和 18 年 0 月 0 日 10 時

資料——ラジオゾンデ觀測値

當日の氣象狀態——2 日間位氣壓配置の變動は緩か下層では一様に滿洲から本州に北風が吹走し、上層では大體西風が吹走してゐた。

流線は 2 軒以上で略々等壓線に平行であり、天氣も概して良く、本理論の檢證に好都合である。

整理上の注意は：

1. 地表摩擦の圈外を用ひること。
2. 逆轉（フロント等に依る）があるものは使へない。
3. 低緯度地方は除かねばならぬ。（ $l=0$ となり理論が通用されぬ）。

この種の條件を考慮して、氣壓 600 耗と 410 耗の間を使ふことにした。即ち、

1. この氣層は大體 2~5 耗の層を示す
2. 氣層の厚さは平均氣層溫度に比例する。即ち平均密度に反比例する。
3. 氣層の上限及び下限の氣溫の差は、(氣層の厚さがそれ程大きくは變化しないから) 大體氣層内の遞減率を示すものと見て間違ひない。従つて逆轉のあるところを除く。

この爲めに用ひた箇所は 27 箇所(當日の報告は全部で 36 箇所であつた)でこれは次圖に示す結果となつた。ハイラル及び咸興をのぞけば、他は大體直線上にのことは確實であつて、

1. 氣溫差(従つて遞減率)は層の厚さに反比例する。
2. 換言すれば遞減率は平均密度に比例する。

すでに述べた如く、比例常數は氣團に依り相違するのであるから、ハイラル、咸興が外れたのは構はない。(咸興が特殊な地形環境にあることを最近考へてゐる。)

嚴密には粒子毎に(定常狀態でも流線毎に)違つた値であらうと豫想される A が實際は斯様に可なり共通の(即ち値が似てゐる)ものたり得ることは實用上大變便利なことである。本例は秋季の例であつて、もつと複雑な時季の複雑な狀態では同じ日にいくつかの違つた A を見出すことになるであらう。

併しながら、この A が(氣團によつて保存量であらうと云ふ見込から)氣團分布に採つて新らしい要素となり得るであらう。

遞減率變動の要因

空氣粒子の外部より受ける熱量が垂直方向に略々一様であると見られる範圍、即ち $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dQ}{dt} \right)$ を無視し得る程度に於いて (16)' が成立つのであるが、これを更に熱力學の第一法則を用ひて變形する。第一法則に依り、

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \rho}{dt} &= \frac{d \ln P}{dt} - \frac{d \ln T}{dt} & (8) \text{ 式に依り } \frac{dP}{dt} &= 0 \quad \text{故に,} \\ &= - \frac{d \ln T}{dt} \\ &= - \frac{1}{C_p T} \frac{dQ}{dt} & (5) \text{ 式に依る.} \end{aligned}$$

故に遞減率の定理として、(16)' の代りに、

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \frac{1}{C_p T} \frac{dQ}{dt} \quad (18)$$

又は,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{1}{C_p} \frac{\partial \ln T}{\partial z} \frac{dQ}{dt} \quad (18)'$$

之は次の事を結論せしめるであらう.

1. 空氣粒子が熱量を吸収する時 ($dQ/dt > 0$) は, 遞減率は減ずる. $dQ/dt > 0$ は (5) 式に依り $dT/dt > 0$ に相應する故, 空氣が (非斷熱的に) 暖まれば遞減率は減ずる.
2. 逆に, 熱量を放出して冷却すれば遞減率は増大する.

冬期, 快晴狀態の大陸より溢出する寒氣が著しい不安定なる遞減率を示し, 或ひは低氣壓前面乃至夏期の南方よりの暖氣が小さい遞減率を示す等は何れもこの dQ/dt 又は dT/dt の符號に依り説明されさうである⁽¹⁾

斯くして, 遞減率變動の要因としては, 實に非斷熱的過程が一つの重大要素として着目されなくてはならぬことが云へるであらう.

非斷熱變化としては,

1. 輻射,
2. 傳導,
3. 水蒸氣の狀態變化に伴ふ潜熱の放出吸入 (乾燥空氣粒子の變化過程を考へるときは水蒸氣は系外の物質と考へるべきである)

等が擧げられるであらう.

(昭和 18 年 12 月)

風向に及ぼす斜面の影響に就いて*

澤 田 龍 吉**

第一節 解 題

實測した風向が一般に地衡風乃至傾度風より偏倚する理由として次の二つが擧げられるのが通常である.

1. 摩擦, 2. 加速度

グルドベルグ及モーンの研究に始まり, スプリング, ヘツセルベルグ及スヘルドラツプ, エクマ

* R. Sawaja: The Effect of Slope on the Direction of Wind.

** 中央氣象臺研究部第二研究室, 氣象技師.

(1) 併しながら地表近傍に於いては又別個の考察を要することは本議論の方法から見て當然である.