定常性高氣圧に伴う周辺前線帯の力學的研究^{*}

(第1報)

鈴木榮一^{**}

§ 1 緒論

高氣圧内における空氣の運動については、既に幾多の研究が発表されている。例えば Bjerknes Pockel, Haurwitz 北尾, Deppermann 等の研究、および正野博士の改善された近似解があり、又渡辺次雄氏の渦度理論の立場からの研究もある。しかして低氣圧や前線の理論は正野博士により鮮やかな解として與えられた。前者の力學的構造も低氣圧については詳細に研究されているが、(氣象集誌 Vol. 19 No. 1, 1~11) 高氣圧辺の前線帯についてはあまり論ぜられていない。移動性高氣圧にはこの種前線帯はないが、北太平洋高氣圧の如き比較的背の高い定常性高氣圧には相当判然とした様相が見られ、これが台風を進路を予想する際重要な役割を演ずることは前に高橋浩一郎先生によつて指摘され、その Synoptic な性質も次第に明らかにされて來たようである。

そこで私は台風進路を支配する要因としてこの北太平洋高氣圧辺前線帯の力學的構造を模型化して考察し、將來における台風進路予想の一つの手段としたが大略の構造を考察する一側面を與え得ると思う。

§ 2 取扱ひ方

大氣中の運動は一般に粘性を考へて解かれるべきであるが、複雑になるので省略される場合が多い。線型化した場合は實際の現象を説明するのに勿論不充分である。

そこで私は粘性を導入し、これを解くのに Prandtl 流の層流境界層の理論 (Theory of laminar boundary layer) の思想を發展させ、下降氣流による水平發散氣流の生成および前線帯内側を境界層における跳水的轉移として説明を試みた。この如き層流境界層理論を綜合的に研究されたのは和田小六先生でその後谷一郎教授 (東大)、栗原九大教授などにより發展されたがそれが渦流境界層に轉移する構造や轉移現象 (jump) の説明は未だ不充分で近似的にしか説明されていない。最近谷教授は下降流によつて生ずる水平發散の放射流は適當な仮定のもとに、下降流域より若干離れた場所において轉移跳水的することを理論的に説明された。

私は一般大氣の運動方程式に地球自轉の轉向力を入れた境界層微分方程式を作り、境界層内速度分布を別の形に仮定して第一近似の解を導入した。コリオリ因數は規模の小さい定常運動では省略

てもよいが、北太平洋高氣圧の如き規模の大きい運動では最早省略できない。高橋先生もこの省

* E. Suzuki: Dynamical Researches of Frontal Zone belonging to a Stationary Anticyclone (Part I)

** 中央氣象臺

略すべきでないことを指摘して最近新しい項を運動方程式に導入されている、こゝでは下降氣流による水平発散氣流の垂直構造を調べる目的でコリオリ因数の緯度効果を省略したが、これを導入して近似的に Bjerknes の Perturbation method を用いてとくこともできる

§ 3 運動方程式

一般大氣の運動方程式は円筒座標においては

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} + 2\omega(v_z \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \sin\varphi) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} + 2\omega(-v_z \cos\varphi \sin\theta + v_r \sin\varphi) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2\omega \cos\varphi (v_r \cos\theta - r v_\theta \sin\theta) \\ = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

又、連続の方程式は次の如くなる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

φ : 緯度, ω : 地球自轉角速度, ν : 渦動粘性係数, 定常性の仮定, 境界層の厚さ δ とし同程度の項を残しかつ r が充分大なる附近の運動を論ずる場合は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \sim 0, \quad \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \sim 0, \\ \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \sim 0, \quad \frac{v_\theta^2}{r} \sim 0, \\ \frac{v_\theta^2}{r^2} \sim 0, \quad \frac{v_\theta v_r}{r} \sim 0, \quad \frac{v_\theta}{r^2} \sim 0, \end{aligned}$$

などを考えることにより, 境界層運動方程式は

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + 2\omega(v_z \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \sin\varphi) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + 2\omega(-v_z \cos\varphi \sin\theta + v_r \sin\varphi) &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2\omega \cos\varphi (v_r \cos\theta - r v_\theta \sin\theta) &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \end{aligned}$$

でかつ又連続の方程式は次の如くなる

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

これを解けばよいのであるが, 上式を積分して適当に変形し $\frac{dh}{dr}$ の式を導くことを考える。

境界層外の圧力を $P_0 = \text{const}$ と仮定し (実は空氣が排除されつゝ水平発散流が進むから少し変化する) 境界層内で近似的に靜圧分布を仮定すると,

$$P = \rho g(h - z) + P_0, \quad P_0 = [P]_{z=h}$$

でたゞ h は境界層の厚さ, (自由表面の高さ即ち水平発散流の垂直高度) である, これを微分することにより,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -g \frac{dh}{dr}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g$$

を得る。これを運動方程式に代入すれば結局

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + 2\omega(v_z \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \sin\varphi) = -g \frac{dh}{dr} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + 2\omega(-v_z \cos\varphi \sin\theta + v_r \sin\varphi) = \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2\omega(v_r \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \cos\varphi \sin\theta) = \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (3)$$

となる。連続方程式は前と全く同様である

§ 4 境界条件

左の第1図において，Aは下降気流域，Bは層流境界層，Oは轉移層（乱流境界層への轉移），P₀は外圧， h は境界層の厚さである。下降気流の中心Oより轉移層O迄の距離を求める。

境界条件として，速度分布を第2図の如く仮定すると

$$z=0 \quad v_r=v_\theta=0$$

$$z=h \quad v_r=V_r, \quad \left[\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]=0, \quad \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]=0,$$

従つてこの場合は

$$v_r=V_r\left(\frac{2z}{h}-\frac{z^2}{h^2}\right)$$

とおくことができるから流量Qは

$$Q=2\pi r \int_0^h v_r dz = \frac{4}{3}\pi r h V_r, \quad \therefore V_r=3Q/4\pi r h,$$

となる。又速度分布を第3図の如く仮定すると境界条件は

$$z=0 \quad v_r=v_\theta=0, \quad z=h \quad v_r=0 \quad \left[\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]=\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]=0,$$

となるから速度分布の仮定は

$$v_r=V_r z(h-z)$$

となる。この場合の流量Qは前と同様にして

$$Q=2\pi r \int_0^h v_r dz = \frac{1}{3}\pi r h^3 V_r, \quad \therefore V_r=3Q/\pi r h^3,$$

となる。又流線傾度が線型に変化すると仮定すると，正確な解が得られる。以下各々の場合について考察する。

§ 5 第2図の速度分布の場合

連続方程式に v_r をかけて積分すると

$$\int_0^h v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dz + \int_0^h \frac{v_r^2}{r} dz + \int_0^h v_r \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = 0 \quad (4)$$

となる。第2項は前と同様にして省略される。又一方

$$\int_0^h v_r \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = V_r v_z - \int_0^h v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} dz \quad (5)$$

(4), (5)を考へて，(1)を更に積分して変形すると

$$\begin{aligned} \int_0^h v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dz + \int_0^h \frac{v_r^2}{r} dz + 2\omega \int_0^h (v_z \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \sin\varphi) dz &= -gh \frac{dh}{dr} - \nu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]_{z=0} \\ 2 \int_0^h v_r \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + V_r v_z + 2\omega \int_0^h (v_z \cos\varphi \cos\theta - v_\theta \sin\varphi) dz &= -gh \frac{dh}{dr} - \nu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]_{z=0} \end{aligned}$$

となる。 v_z は地面，境界層表面で0，厚さ h の中では δ の程度で省略できるから，結局上の式は

$$\frac{dh}{dr} \int_0^h v_r^2 dz - 2\omega \int_0^h v_\theta \sin\varphi dz = -gh \frac{dh}{dr} - \nu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]_{z=0} \quad (5)$$

となる。又(2)を更に z について積分すれば

$$\int_0^h v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} dz + \int_0^h v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} dz + 2\omega \int_0^h (-v_z \cos \varphi \sin \theta + v_r \sin \varphi) dz = -\nu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]_{z=0}$$

となるが、部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_0^h v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} dz &= v_\theta v_r - \int_0^h v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial r} dz, \quad \int_0^h v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} dz = v_\theta v_z - \int_0^h v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \\ \therefore \int_0^h v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} dz + \int_0^h v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} dz &= v_\theta (v_r + v_z) - \left\{ \int_0^h v_\theta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz \right\} \\ &= v_\theta (v_r + v_z) - \int_0^h v_\theta \left(-\frac{v_r}{r} \right) dz = v_\theta (v_r + v_z) \end{aligned}$$

を得る。従つて運動方程式(2)は次の如く変形される

$$v_\theta (v_r + v_z) + 2\omega \sin \varphi \int_0^h v_r dz = -\nu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]_{z=0}$$

これより粘性項の地表における値が得られる。又(2)を0から適当な高さ z 迄積分すると、

$$\{v_\theta (v_r + v_z)\}_z + 2\omega \int_0^z (-v_z \cos \varphi \sin \theta + v_r \sin \varphi) dz = -\nu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]_{z=0}$$

となる。これを(6)を用いて変形し、 v_θ の微分方程式に直すと次の如くなる ($v_z \sim \delta$ のorder項省略)

$$\nu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] - v_\theta v_r + v_\theta v_z + 2\omega \sin \varphi \int_z^h v_r dz = 0$$

これは線型一次方程式であるから容易に次の解を得る。

$$\nu v_\theta = -e^{\int_z^h v_r dz} \left\{ \int_z^h \left\{ v_\theta v_r + 2\omega \sin \varphi v_r \left(\frac{2}{3}h - \left[\frac{z^2}{h} - \frac{z^3}{3h^2} \right] \right) \right\} e^{-\int_z^h v_r dz} dz + C(r) \right\}$$

境界条件より、 $C(r) = 0$ 従つて解は

$$v_\theta = -\frac{1}{\nu} \exp \left(\frac{v_r}{h} - \frac{v_z^2}{3h^2} \right) v_r \int_z^h \left\{ v_\theta v_r + 2\omega \sin \varphi v_r \left(\frac{2}{3}h - \left[\frac{z^2}{h} - \frac{z^3}{3h^2} \right] \right) \right\} \exp \left\{ -v_r \left(\frac{z^2}{h} - \frac{z^3}{3h^2} \right) \right\} dz$$

である。この v_θ の計算は近似的に次の如くなる

$$v_\theta = \frac{v_r}{\nu} \left\{ \frac{z^2}{h} - \frac{z^3}{3h^2} + 2\omega \sin \varphi \left[\frac{2}{3}h z - \frac{2}{3}z^2 v_r - \frac{z^3}{3h} + \frac{2}{3} \frac{z^3}{h} v_r + O\left(\frac{z^4}{h^2}\right) \right] \right\} \quad (7)$$

又(5)を流量 Q を用いて書直し、 $\frac{dh}{dr}$ の式を導くと、

$$\frac{dh}{dr} = \left(\frac{5\pi\nu}{Q} \right) r^2 - h + 2\omega \sin \varphi \int_0^h v_\theta dz / r - (10\pi^2 \gamma / 3Q^2) r^3 h^3$$

でこの v_θ の項に(7)を入れて計算すればよい

$$\frac{dh}{dr} = \frac{P(h, r)}{Q(h, r)}$$

の形になるが、 $P(h, r) = 0$ 、 $Q(h, r) = 0$ などの線をひくことにより、等傾度線法で轉移層迄の距離が求められる

§6 第3図の速度分布の仮定

この場合も同様にして、(1)を積分した形を変形して、まとめた結果は

$$\frac{d}{dr} \int_0^h v_r^2 dz + \int_0^h \frac{v_r^2}{r} dz - 2\omega \sin \varphi \int_0^h v_\theta dz = -gh \frac{dh}{dr} - \nu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} \right]_z \quad (8)$$

で又、(2)を積分することにより

$$2\omega \sin \varphi \int_0^h v_r dz = -\nu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (9)$$

を得る。(8)の左辺第2項は省略してよい。(8)より前と同様にして、 $\frac{dh}{dr}$ の式を導入すれば流量を入れて次の如き関係となる

$$\frac{dh}{dr} = \frac{Q}{\pi r} \left(\frac{3Q}{5\pi^2 h} - \nu \frac{Q}{h} \right) + 2\omega \sin \varphi \int_0^h v_\theta dz / \frac{Q}{2\delta} \left(\frac{Q}{\pi r h} \right)^2 + gh \quad (10)$$

又、 U_0 の微分方程式を解くことにより、

$$U_0 = \frac{1}{\rho} e^{\int U_r dz} \left[\int (2\omega \sin \varphi) \int_{\frac{1}{\rho}} U_r dz \exp\left\{\int U_r dz\right\} dz + C(r) \right]$$

となる。 $C(r)$ は同様にして0である。これを(10)に代入することにより、 $\frac{dh}{dr}$ の計算ができる。第1の場合と同様にして流線追跡をすると轉移層迄の距離が求められる。

その数値計算は次の報告で述べるが、 $\nu = 10^{10} \text{ cm}^2/\text{sec}$, $h = 2 \times 10^3 \text{ m}$, $U_r = 4 \text{ m/sec}$, $\varphi = 30^\circ$, $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ /sec}$, $Q = 55.5 \times 10^9 \text{ m}^3$ として、轉移層迄の距離即ち、下降氣流域の中心から前線帯内側迄の距離を求めると、前の速度分布の仮定で $r = 2.8 \times 10^6 \text{ m}$, 後の速度分布の仮定で $2.3 \times 10^6 \text{ m}$ の程度で大略実際と合っている。これはこの如き高氣圧モデルが、あてはまるものとして注意すべきことであると思われる。

§7 流線傾度が一次形の場合

境界条件は第1の場合と同様とし、唯速度分布の仮定で流線傾度が線型であるとする。その比例係数は表面で $\frac{dh}{dr}$ であるから、

$$\frac{U_r}{U_r} = \frac{dh}{dr} \frac{z}{h}$$

となる。このときは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial z} &= -h\omega / \frac{dh}{dr} z^2 + h \frac{\partial \omega}{\partial z} / z \frac{dh}{dr} = -h\omega / \frac{dh}{dr} z^2 + h \frac{dh}{dr} \frac{U_r}{h} / \frac{dh}{dr} z \\ &= -\frac{h}{dh} \frac{1}{z^2} \frac{dh}{dr} \frac{z}{h} U_r - \frac{U_r}{z} = \frac{U_r}{z} - \frac{U_r}{z} = 0 \end{aligned}$$

となり、 $U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0$ でこれは $U_r \frac{\partial U_r}{\partial r}$ と $U_z \frac{\partial U_r}{\partial z}$ が同程度という仮定に反するので、あまり妥当な仮定でないが、この場合の解を近似的に考察して参考にしたい。

このとき、(1)の運動方程式は

$$\nu \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{U_r^2}{h} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} \right) + 2\omega \sin \varphi U_0 = g \frac{dh}{dr}$$

となる。これはこのまゝではとけない。前にも述べたように U_0 , U_r の間には関係があるのであるが、ここでその関係を

$$U_0 = f(U_r) = aU_r + \frac{b}{h} U_r^2$$

と近似化し(勿論これに常数を加えても構わないがこれ以上次数が高くなると解けなくなる。谷一郎氏の場合は $U_0 = U_r$ で極めて簡単な場合である。)これを上式に入れると

$$\nu \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{U_r^2}{h} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b \right) + 2a\omega \sin \varphi U_r = g \frac{dh}{dr}$$

これを解くために

$$U_r' = U_r + \frac{a\omega \sin \varphi}{\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b}$$

と書きかえると上の方程式は次の如くなる。

$$\frac{\partial^2 U_r'}{\partial z^2} + \frac{1}{h\nu} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b \right) U_r'^2 = \frac{1}{h\nu} \left\{ \frac{(a\omega \sin \varphi)^2}{\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b} + g \frac{dh}{dr} \right\}$$

この解は明らかにワイエルストラスの $\wp$ 一関数で得られる。途中の計算は省略し、解を示すと次の如くなる

$$v_r' = 6 \varphi(Z) / -\frac{1}{\kappa \nu} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b \right)$$

$$\therefore v_r = \frac{6 \varphi}{-\frac{1}{\kappa \nu} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b \right)} - \frac{a \omega \sin \varphi}{\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b}$$

で但し,

$$\varphi(Z) = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{20} g_2 Z^2 + \dots$$

$$g_2 = -\frac{1}{\kappa \nu} \left\{ \frac{-(a \omega \sin \varphi)^2}{\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b} + g h \frac{dh}{dr} \right\} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b \right) / \frac{6 h \nu}{\frac{dh}{dr} + \frac{h}{r} + b}$$

である。なおこの場合の流量 Q は

$$Q = 2\pi r \int_0^h v_r dz = 2\pi r h \int_0^h \frac{v_r}{Z} dz / \frac{dh}{dr},$$

であるが、これらより、 $\frac{dh}{dr}$ を求めることができるが、極めて複雑である上に、上述の如く近似度が悪いので数値計算は省略した

§ 8 結 論

境界層理論の一応用として解いたのであるが、改善すべき点が多々あるものと思われる。併しこのような模型も或る程度可能なことは流体力学的に極めて重大な結果であることを指示し大方の御批判を願う次第である

終りに御指導をいただいた東京大学理学部助教授今井功博士、理論気象研究室小河原正己氏および討論していただいた長尾隆学兄に厚く御礼申しあげる