天空紫外線分布に於ける高次散乱の問題

関 原 彊*

On the Effect of Multiple Scattering to the Angular Distribution of Ultraviolet Sky Radiation

By K. Sekihara

Meteorological Research Institute, Tokyo

(Manuscript received 9 July 1955)

Abstract

The intensities of sky radiation from varying zenith angles in the sun's vertical plane were calculated using the two methods, that is, the method of integro-differential equation developed by Chandrasekhar and the method of direct integration developed by Chapman, Hammad and the present author. The theoretical distributions were compared with those observed of ultraviolet sky radiation of two kinds of wave-length, the longer one about 3500–3700 Å and the shorter one about 3100–3300 Å. As to the distribution between $\theta=0^\circ$ and 60° (θ : zenith angle) in the sun's opposite side at the sun's altitude of 30° the theoretical values obtained by Chandrasekhar's method showed satisfactory agreement with observed data whereas those obtained by the process of direct integration did not, because the scattered light higher than the second which amounted to as much as 30–40% in the shorter wave-length region played an essential role in the distribution.

The distribution observed at the sun's altitude of 60° showed a marked deviation from both of the theoretical ones presumably because a non-Rayleigh scattering due to large particles in the air would be an indispensable factor.

An approximate method of calculation of the scattered light higher than the second where we assumed the linear extrapolation to the decrease of the subsequent scattered light intensity was examined, using the primary and secondary scattered light on Rayleigh's law which were previously computed by this author. In the visible region these results showed a good agreement with correct ones within a error of few percent in contrast with Bernhardt's results which gave a marked deviation because the scattering law was incorrect. However, in the ultraviolet region our results also gave errors greater than 10% especially in the direction of large zenith angles.

According to the results of calculation in the visible range the scattered light higher than the second does not exceed at most several percent. And consequently, regarding the polarization of the sunlit sky, the better result of Hammad than that of Chandrasekhar, which was obtained neglecting the scattered light higher than the second and taking into account the molecular anisotropy of air molecules was justified to some extent in the visible range of wave-length.

§ 1. 緒 言

空からの紫外線については医学的な目的を兼ねてこれまで二、三の実測⁽¹⁾⁽²⁾があるが、之に対する地球物理学的な理論は最近の J. Lenoble⁽³⁾のものに到るまであまり見かけない。其の主な理由は多重散乱の計算が困難であつたからである。

空の光の理論は最近十年間位に著しい進歩を見て居り、現在の所 Chapman⁽⁴⁾, Hammad^{(5),(6),(7)} 及

び筆者⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾ が扱つた直接積分による二次散乱までの理論、及び Chandrasekhar⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾ が発見した散乱大気に於ける輻射平衡理論がある。特に後者は最も強力な手段を与えるものとして多くの学者の認める所で現在までに Chandrasekhar 自身に依る空の偏光の説明⁽¹⁶⁾⁽²³⁾。Sekera, Deirmendjian⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾ Ashburn⁽¹⁹⁾ 等による星及び夜光の観測に関連した計算及び地球輻射の計算に用いられている。しかし可視領域の現象に対しては前

* 気象研究所

二方法共に或る程度満足な結果を与えて居り、**Hamad**⁽⁶⁾⁽⁷⁾ は空気分子の光学的異方性を考慮することにより、**Chandrasekhar**⁽¹⁶⁾ は地面からの反射光を考慮することにより、共に **Tichanowsky**⁽²⁰⁾ による空の偏光の実測を説明している。

今回の計算の目的は **Chandrasekhar** の理論を用いて空の紫外線強度分布の定量論を行うことであるが、可視域から紫外域にかけての前二方法の結果を比較して直接積分の方法の有効範囲を知ることにもう一つの目的がある。

§ 2. 輻射平衡理論の概要

Chandrasekhar により創始された散乱大気に於ける輻射平衡理論は彼の著書 “Radiative Transfer”⁽¹⁶⁾ に剩す所なく述べられている。今ここに其のあらすじを記して見る。

はじめの問題は光の性質をどの様に表現するかということである。光には強度、偏光面の方向、偏光度の三つの基本性質があるが之をそのまま用いては不便である。そこで 1852 年に **Stokes** により導入された表現法に立返る。即ち光の進行方向に垂直な平面内の互に垂直な二方向 I, r に於ける強度を夫々 I_l, I_r とすれば、 l 方向から右廻りに ϕ の角度をなす方向に於ける強度は

$$I(\phi) = I_l \cos^2 \phi + I_r \sin^2 \phi + \frac{1}{2} U \sin 2\phi \quad (1)$$

で表わされ、此の時偏光面が l 方向となす角度 χ と偏光度 δ は

$$\tan 2\chi = U/(I_l - I_r) \quad (2)$$

及び

$$\delta = (I_l - I_r) \sec 2\chi / (I_l + I_r) \quad (3)$$

で表わされる。此の時 I_l, I_r, U を **Stokes** パラメーターという。此の表現に於いては二つの部分偏光した光の混合は単に (1) 式のパラメーターの和として表わされる。元来の **Stokes** パラメーターは実は多少之と異なる形式のものであつたが、とにかく偉大なる **Chandrasekhar** の再発見により以下の取扱いが可能になるのである。

$$P^{(2)}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 \cos 2(\varphi' - \varphi) & -\mu^2 \cos 2(\varphi' - \varphi) & \mu^2 \mu' \sin 2(\varphi' - \varphi) \\ -\mu'^2 \cos 2(\varphi' - \varphi) & \cos 2(\varphi' - \varphi) & -\mu' \sin 2(\varphi' - \varphi) \\ -\mu \mu'^2 \sin 2(\varphi' - \varphi) & \mu \sin 2(\varphi' - \varphi) & \mu \mu' \cos 2(\varphi' - \varphi) \end{pmatrix} \quad (10)$$

(4) 式の解の満足すべき境界条件は

Stokes パラメーターによれば散乱現象はパラメーターの一次変換となり、従つてマトリックスで表わされる。そこで光の強度 I を成分 I_l, I_r, U をもつたベクトルと考え、散乱光の角度分布を表わす函数を位相マトリックス P で表わせば散乱大気中の輻射平衡の方程式は次の如くかける。 (l, r) は此の場合光の進行方向を含む子午面に平行及び直角な方向とする)

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \varphi) - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \times I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' - \frac{1}{4} e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) F \quad (4)$$

$$\text{ここに } F = (F_l, F_r, F_U) \quad (5)$$

は大気に $(-\mu_0, \varphi_0)$ の方向から入射した平行光線の (**Stokes**) ベクトルを表わし、 $\pi F_l, \pi F_r, \pi F_U$ が三つの Parameter についての単位垂直断面積あたりの光束を表わす。 τ は大気の光学的深さで、大気上限で $\tau=0$ 、地表面で $\tau=\tau_1$ である。 μ, φ は夫々鉛直方向との角度の余弦及び方位角である。**Rayleigh** 散乱に於いては位相マトリックスは次の如き形をとる。

$$P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = Q[P^{(0)}(\mu, \mu') + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}} P^{(1)}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') + P^{(2)}(\mu, \varphi; \mu', \varphi')] \quad (6)$$

但し

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$P^{(0)}(\mu, \mu') = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2(1-\mu^2)(1-\mu'^2) + \mu^2 \mu'^2 & \mu^2 & 0 \\ \mu'^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$P^{(1)}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \frac{3}{4} \times \begin{pmatrix} 4\mu\mu' \cos(\varphi' - \varphi) & 0 & 2\mu \sin(\varphi' - \varphi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\mu' \sin(\varphi' - \varphi) & 0 & \cos(\varphi' - \varphi) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} I(0, -\mu, \varphi) &\equiv 0 \quad (0 < \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ I(\tau_1, +\mu, \varphi) &\equiv 0 \quad (0 < \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

今地表に於ける光の強度 I と

$$I(\tau_1; -\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\mu} T(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F \quad (12)$$

の如き関係を有する透過マトリックス (Transmission Matrix) を定義すると、之は

$$\begin{aligned} T(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= Q \left[\frac{3}{4} T^{(0)}(\mu; \mu_0) \right. \\ &\quad + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} (1-\mu_0^2)^{\frac{1}{2}} \times T^{(1)}(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \\ &\quad \left. + T^{(2)}(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

とおく事により、位相マトリックスと同様な、 φ に無関係の項、 $(\varphi_0 - \varphi)$ の三角函数のみを含む項、 $2(\varphi_0 - \varphi)$ の三角函数のみを含む項として別々に取扱かう事が出来る。更に驚ろくべき事は、之等の透過マトリックスは不変の原理 (Principle of Invariance) と称する数学的技巧を用いる事により何れも次の如き積分方程式を満足する 1 対の函数 $X(\mu)$ 及び $Y(\mu)$ と関係づけられるのである。其の積分方程式は

$$X(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{\phi(\mu')}{\mu + \mu'} [X(\mu)X(\mu') - Y(\mu)Y(\mu')] d\mu' \quad (14)$$

及び

$$\begin{aligned} Y(\mu) &= e^{-\tau_1/\mu} \\ &\quad + \mu \int_0^1 \frac{\phi(\mu')}{\mu - \mu'} [Y(\mu)X(\mu') - X(\mu)Y(\mu')] d\mu' \end{aligned} \quad (15)$$

ここに特性函数 $\phi(\mu)$ は μ の偶数幂多項式で次の四通りの場合がある。

$$\phi_i(\mu) = \frac{3}{4}(1-\mu^2)$$

$$\phi_r(\mu) = \frac{3}{8}(1-\mu^2)$$

$$\begin{aligned} I(\tau_1; -\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= \frac{3}{32} [\{ \phi(\mu_0) + \chi(\mu_0) \} \xi(\mu) + 2\{ \phi(\mu_0) + \zeta(\mu_0) \} \eta(\mu) - \{ \xi(\mu_0) + \sigma(\mu_0) \} \psi(\mu) \\ &\quad - 2\{ \theta(\mu_0) + \eta(\mu_0) \} \phi(\mu) + 4\mu\mu_0(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu_0^2)^{\frac{1}{2}} \{ X^{(1)}(\mu_0)Y^{(1)}(\mu) - Y^{(1)}(\mu_0)X^{(1)}(\mu) \} \cos(\varphi_0 - \varphi) \\ &\quad - \mu^2(1-\mu_0^2) \{ X^{(2)}(\mu_0)Y^{(2)}(\mu) - Y^{(2)}(\mu_0)X^{(2)}(\mu) \} \cos 2(\varphi_0 - \varphi)] - \frac{F\mu}{\mu - \mu_0} \end{aligned}$$

$$\phi^{(1)}(\mu) = \frac{3}{8}(1-\mu^2)(1+2\mu^2) \quad (16)$$

$$\phi^{(2)}(\mu) = \frac{3}{16}(1+\mu^2)^2$$

従つて特性函数の種類により夫々四対の函数 $X_i, Y_i; X_r, Y_r; X^{(1)}, Y^{(1)}; X^{(2)}, Y^{(2)}$ が定まり、之等により透過マトリックスが表わされる事になるのである。但し ϕ_i の場合に限り特に此の函数が一意的にきまらない事情が生ずるが之は更に

$\int_0^1 X(\mu)\phi(\mu)d\mu = 1, \int_0^1 Y(\mu)\phi(\mu)d\mu = 0$ という附加条件により決定する。さて透過マトリックスの表現形式は φ を含む項は比較的簡単で

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) T^{(i)} &= [Y^{(i)}(\mu)X^{(i)}(\mu_0) - X^{(i)}(\mu)Y^{(i)}(\mu_0)] \\ &\quad \times P^{(i)}(-\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

φ を含まない項については

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) T^{(0)}(\mu; \mu_0) &= \begin{pmatrix} \xi(\mu) & 2^{\frac{1}{2}}\eta(\mu) & 0 \\ \sigma(\mu) & 2^{\frac{1}{2}}\theta(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(\mu_0) & \chi(\mu_0) & 0 \\ 2^{\frac{1}{2}}\phi(\mu_0) & 2^{\frac{1}{2}}\zeta(\mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \phi(\mu) & 2^{\frac{1}{2}}\phi(\mu) & 0 \\ \chi(\mu) & 2^{\frac{1}{2}}\zeta(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(\mu_0) & \sigma(\mu_0) & 0 \\ 2^{\frac{1}{2}}\eta(\mu_0) & 2^{\frac{1}{2}}\theta(\mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに $\phi, \chi, \dots$ は $X_i, Y_i; X_r, Y_r$ の代数的組合せで表わされる函数であるが其の式はかなり複雑でここでは省略する。(Radiative Transfer 269 頁参照)

さて空の光の場合には入射光は自然光であるとして $F_i = F_r = \frac{1}{2}F, F_\sigma = 0$ とおき (17), (18), (13), (9), (10), (12) により地上に達する空の光の強度として最後の次式が得られる。

$$\begin{aligned}
I_r(\tau_1; -\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= \frac{3}{32} \{ \{ \phi(\mu_0) + \chi(\mu_0) \} \sigma(\mu) + 2 \{ \phi(\mu_0) + \zeta(\mu_0) \} \theta(\mu) - \{ \xi(\mu_0) + \sigma(\mu_0) \} \chi(\mu) \\
&\quad - 2 \{ \theta(\mu_0) + \eta(\mu_0) \} \zeta(\mu) + (1 - \mu_0^2) \{ X^{(2)}(\mu_0) Y^{(2)}(\mu) - Y^{(2)}(\mu_0) X^{(2)}(\mu) \} \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \} \frac{F \mu_0}{\mu - \mu_0} \\
U(\tau_1; -\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) &= \frac{3}{16} [2(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}} \mu_0 \{ X^{(1)}(\mu_0) Y^{(1)}(\mu) - Y^{(1)}(\mu_0) X^{(1)}(\mu) \} \sin(\mu_0 - \varphi) \\
&\quad - \mu(1 - \mu_0^2) \{ X^{(2)}(\mu_0) Y^{(2)}(\mu) - Y^{(2)}(\mu_0) X^{(2)}(\mu) \} \sin 2(\varphi_0 - \varphi)] \frac{F \mu_0}{\mu - \mu_0} \quad (19)
\end{aligned}$$

§ 3. 数値計算について

問題は基本的な積分方程式 (14), (15) の数値解法に帰する。“Radiative Transfer” には其の第二近似の解に更に補正を加えた公式があげられて居り (202-206 頁), *Astrophysical Journal* に必要な数値表⁽²¹⁾⁽²²⁾が与えられているが, 此の計算の有効範囲は τ_1 の値として 0.2 程度までの比較的大気の薄い可視域に限られ, $\tau_1 = 1.0$ 程度までの紫外領域に計算の範囲をのばすためには更に逐次代入法による近似度を高めなければならない。此の仕事は最近に Chandrasekhar 自身により電子計算機の力をかりて遂行され $X^{(1)}, Y^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(2)}, \phi, \phi, \chi, \zeta, \xi, \eta, \lambda, \theta$ の 12 種の函数の $\tau_1 = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.50, 1.0$ に於ける数値表

として発表された⁽²³⁾。筆者は幸に同教授の厚意により数値被の寄贈を受ける事が出来たので, 之を用い (19) 式から計算を行なつたのである。

計算の条件としては太陽高度 30° 及び 60° に於ける太陽鉛直面内太陽と反対側に於ける天頂角 0° より 60° までの 10° 間隔の方向の強度を求めるために $\mu_0 = 0.86$ 及び 0.5 ; $\mu = 1.0, 0.98, 0.94, 0.86, 0.76, 0.64$ 及び 0.5 ; $\varphi_0 - \varphi = \pi$ として $I_l + I_r$ を計算した。採用された μ の値は正確に天頂角 $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ 及び 60° と一致するものではないが大体に於いて 1° 以内の誤差で之等と一致した天頂角の方向に相当する。直射光を単位にとつた (即ち $\pi F = 1$ とした) 各方向からの散乱光強度を第一表にかかげる。

Table 1. Intensities of sky light calculated by the method of radiative equilibrium ($\pi F = 1$)

μ_0	τ_1	$\mu = \cos \theta$							
		θ : zenith angle							
		(μ) 1.0	0.98	0.94	0.86	0.76	0.64	0.5	
		(θ) 0°	$11^\circ 27'$	$19^\circ 57'$	$30^\circ 41'$	$40^\circ 32'$	$50^\circ 12'$	60°	
0.86	0.2	0.0213	0.0195	0.0184	0.0177	0.0179	0.0195	0.0235	
	0.25	0.0265	0.0242	0.0229	0.0220	0.0222	0.0240	0.0288	
	0.5	0.0495	0.0454	0.0429	0.0411	0.0414	0.0441	0.0506	
	1.0	0.0818	0.0756	0.0720	0.0689	0.0684	0.0704	0.0752	
0.5	0.2	0.0145	0.0131	0.0128	0.0136	0.0158	0.0199	0.0273	
	0.25	0.0177	0.0160	0.0157	0.0167	0.0194	0.0242	0.0328	
	0.5	0.0310	0.0283	0.0278	0.0294	0.0335	0.0405	0.0518	
	1.0	0.0460	0.0427	0.0421	0.0437	0.0478	0.0542	0.0619	

§ 4. 直接積分の方法

此の方法は前述の微分方程式よりはむしろ King⁽²⁴⁾ により導入された積分方程式*を出発点とする。即ち之を前述の記号で表わせば

* 微分方程式の形の輻射平衡式の解が此の種の積分方程式を満足する事は Jackson⁽²⁵⁾ により証明されている。

$$\begin{aligned}
I(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{1}{4} e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) F \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\tau_1} P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau', \mu', \varphi') e^{-\int_{\tau'}^{\tau} \frac{d\tau'}{\mu'}} \\
&\quad \times \frac{d\tau'}{\mu'} d\varphi' d\mu' \quad (20)
\end{aligned}$$

此の式を近似的に解くのに大気の光学的厚さが薄い場合には直射光が到る所最も強く右辺に於い

て第 1 項が主要項となる。そこで此の第 1 項を第 2 項の $I(\tau', \mu', \phi')$ に代入して $I(\tau, \mu, \phi)$ を求めることにすれば散乱光の評価は一次及び二次散乱光を求める単なる積分計算に帰する。

Chandrasekhar により与えられた位相マトリックス $\mathbf{P}$ は著しく一般的でこれまで我々が通常 Rayleigh 散乱に用いて来た形式との一致が必ずしも明瞭でないが、それは次の如くにして明らかになる。(第 1 図参照) 直角座標 x, y, z 系を考

Fig. 1. An illustrative diagram of light scattering

え今 x 方向から進行する z 方向への平面偏光が原点に於いて散乱をうけるものとする。散乱光の

方向余弦を (α, β, γ) とした場合其の強度と偏光面 (之は再び平面偏光となる) の方向を考える。我々の直接積分の場合* では単位の入射光に対する単位立体角あたりの散乱光強度は $\frac{3\sigma}{8\pi}(1-\gamma^2)$ で其

の偏光面の方向余弦は $\left(\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)$ となる。之を輻射平衡に於けるベクトル表現で書き表わせば (1) 式以下の表現に於いて $I_l=1, I_r=U=0, \mu'=\phi'=0, \mu=\gamma$ であるが ϕ については若干の計算により $\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ となる。之等を用いて散乱光強度 I_s と

して $I_s = \frac{\sigma}{4\pi} \mathbf{P} \mathbf{I}$ (σ は散乱係数) であることを考慮

すれば (6) 式以下により $I_s = \left(\frac{3\sigma}{8\pi}(1-\gamma^2), 0, 0\right)$ となる。即ち強度は前述のものと全く一致し、更に偏光面については、 I_s の成分は l 方向即ち I_s を含む子午面の方向のみとなり、其の方向余弦は簡単な計算により $\left(\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, -\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)$ となつてこれまた前と一致する。直接積分による計算結果を第 2 表にあげる。**

Table 2. Intensities of sky light due to primary and secondary scattering calculated by direct integration

z	τ_1	θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
30°	0.2		0.0205	0.0189	0.0176	0.0169	0.0169	0.0182	0.0219
	0.4		0.0363	0.0334	0.0310	0.0295	0.0292	0.0308	0.0357
	0.6		0.0468	0.0431	0.0399	0.0375	0.0365	0.0381	0.0425
	0.8		0.0530	0.0487	0.0449	0.0421	0.0406	0.0412	0.0444
	1.0		0.0557	0.0512	0.0473	0.0440	0.0421	0.0417	0.0431
60°	0.2		0.0136	0.0124	0.0120	0.0126	0.0146	0.0184	0.0253
	0.4		0.0225	0.0205	0.0198	0.0206	0.0223	0.0287	0.0378
	0.6		0.0272	0.0248	0.0238	0.0246	0.0274	0.0327	0.0412
	0.8		0.0287	0.0261	0.0249	0.0255	0.0279	0.0327	0.0391
	1.0		0.0283	0.0257	0.0246	0.0244	0.0262	0.0298	0.0346

($\cos z = \mu_0$)

§ 5. 紫外線分布の実測

紫外線の実測は之まで Dorno⁽¹⁾, Eckel⁽²⁾等ヨーロッパの学者がカドミウム光電管により之を行な

っている。しかし之による測定の波長領域は 3200 Å 附近の比較的短かい所に限られて居り、同じ紫外線でも波長別に分けて分布を測つた例はあまり

* 特に論文 II⁽⁹⁾ を参照

** 論文 V⁽¹²⁾ より引用

見受けない。尤も天頂からくる紫外線についてはオゾン観測の目的により分光器を用いた非常に精密な測定が行なわれている。此の場合の解析には一次散乱光のみを以て事を処しているが元来紫外線に於ける多重散乱は非常に大きな部分を占めて居り、此の問題は是非解決しなくてはならないのである。

筆者は光電管を適当なフィルターの組合わせに

より主として $3100\sim 3300\text{\AA}$ 附近と $3500\sim 3700\text{\AA}$ 附近の二種類の紫外線について天空分布を測定し、既に其の一部を発表した⁽²⁶⁾。ここではそのうち比較の対象となる太陽高度 30° 及び 60° に於ける鉛直面内太陽と反対側の分布を示す。(第3表参照)何れも東京に於ける晴天の日の同時測定によるものである。

Table 3. Observed distributions of ultraviolet sky radiation (in the principal meridian plane)

a) $z=31^\circ$ ($h=59^\circ$)						
May 15, 1952; Tokyo						
$\lambda(\text{\AA}) \backslash \theta$	0°	15°	30°	45°	60°	
3100-3300	1.00	0.81	0.71	0.61	0.62	
3500-3700	1.00	0.78	0.70	0.71	0.76	

b) $z=60^\circ$ ($h=30^\circ$)							
Sept. 26, 1953; Tokyo							
$\lambda(\text{\AA}) \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
3100-3300	1.00	0.93	0.91	0.95	1.05	1.16	1.30
3500-3700	1.00	0.91	0.91	0.95	1.10	1.29	1.54

§ 6. 理論実測の比較

はじめに輻射平衡の計算と直接積分の計算の結果が波長によりどのような差異を示すかを見るために天頂に於ける強度の τ_1 による変化に注目して見る。(第2図参照)之によれば三次以上の散乱光の寄与は $\tau_1=0.2$ ($\lambda=4660\text{\AA}$) では何れの太陽高度でも高々数% であるが $\tau_1=1.0$ ($\lambda=3115\text{\AA}$)* に於いては太陽高度 60° で約 30%, 30° で約 40% に達する。(更に第4図参照)

そこで此の様な高次散乱光が紫外線分布に如何に影響するかを見るために第1表、第2表の結果を天頂を単位にとつた相対強度分布として実測と比較して見る。第4表、第5表に其の計算値を示す。実測の波長領域としては短波長は $\tau_1=1.0$ 、長波長は $\tau_1=0.5$ 附近と見做されるが、輻射平衡による理論値を実測と対比させて図示して見る。(第3図参照、図が繁雑になるので直接積分の場合は図示しなかつた。第5表と対比して見られたい。)太陽高度 30° に於ける分布に注目すると之は測定の波長領域が広い割合には非常によい一致が理論と実測の間に見られる。直接積分による方は之に

* オゾン吸収の考慮はなされていない。大気オゾンの垂直分布から推して τ_1 に対して 0.1 以内の変動を与えたと考えられる。

Fig. 2. Calculated intensities of zenith scattered light at the sun's zenith distance of 30° and 60°

I_T : Total intensity calculated from radiative equilibrium

I_{1+2} : Primary and secondary scattered light calculated from direct integration

(Direct sunlight flux is taken as unit intensity)

対しあまりよい一致を示さない。のみならず傾向として一致の可能性がない。というのは実測に於

Table 4. Theoretical distribution of ultraviolet sky radiation (from radiative equilibrium)

μ_0	$\tau_1 \backslash \mu$	1.0	0.98	0.94	0.86	0.76	0.64	0.5
0.86	0.2	1.000	0.912	0.860	0.828	0.838	0.912	1.100
	0.25	1.000	0.912	0.863	0.828	0.838	0.907	1.086
	0.5	1.000	0.917	0.866	0.830	0.836	0.891	1.022
	1.0	1.000	0.925	0.880	0.843	0.836	0.861	0.919
0.5	0.2	1.000	0.905	0.887	0.943	1.095	1.378	1.891
	0.25	1.000	0.907	0.890	0.946	1.095	1.371	1.855
	0.5	1.000	0.915	0.899	0.951	1.082	1.307	1.674
	1.0	1.000	0.929	0.915	0.950	1.039	1.178	1.346

Table 5. Theoretical distribution of ultraviolet sky radiation (from direct integration)

z	$\tau_1 \backslash \theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
30°	0.2	1.000	0.922	0.856	0.820	0.823	0.877	1.066
	0.4	1.000	0.922	0.855	0.813	0.805	0.850	0.983
	0.6	1.000	0.921	0.852	0.802	0.780	0.814	0.909
	0.8	1.000	0.919	0.848	0.794	0.766	0.778	0.837
	1.0	1.000	0.918	0.845	0.790	0.756	0.748	0.772
60°	0.2	1.000	0.910	0.880	0.926	1.066	1.345	1.851
	0.4	1.000	0.910	0.877	0.914	1.036	1.272	1.675
	0.6	1.000	0.910	0.876	0.904	1.006	1.204	1.515
	0.8	1.000	0.909	0.869	0.888	0.973	1.140	1.361
	1.0	1.000	0.909	0.869	0.864	0.921	1.053	1.224

Fig. 3. Theoretical and observed distribution of ultraviolet sky radiation; full lines denote theoretical curves and dashed lines denote observed ones.
a) $z=30^\circ$, ($\mu_0=0.86$)

Fig. 3. b) $z=60^\circ$, ($\mu_0=0.5$)

いては短波長域の分布は長波長域に比し天頂附近(天頂角 10°)の相対値が大きくなり天頂角 40° 以上では之が小となっているが、天頂附近の相対値増加の傾向は第4表、第5表に明らかな如く、輻

射平衡の取扱いにのみ見られ、直接積分による方では之が見られない。むしろ後者に於いては常に

τ_1 の増加と共に減少の傾向を示している。

次に太陽高度 60° の分布では天頂角 30° 附近を境にして長短両波長の相対値の關係が逆転している事は理論、実測共に見られる所であるが、実測の曲線は著しく急勾配で、何れの理論値とも一致しない。此の理由は non-Rayleigh 散乱の寄与のために天頂附近に著しく強い光が加わっているためと考えられる。

§ 7. 高次散乱光評価の簡便法について

Lonoble⁽³⁾, Bernhardt⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾ 等は何れも一次及び二次散乱光強度の割合をそのまま直線的に三次以上の高次散乱光にまで延長し、全強度を無限等比級数の和として求めている。但し Lenoble の場合は散乱の方向性が球対称に簡略化されて居り、

Bernhardt は散乱の方向性として所謂 Rayleigh の位相函数 (Phase Function) を用い、偏光現象を無視している。最近 Deirmendjian⁽¹⁸⁾ 等は天空全輻射につき Bernhardt の方法と輻射平衡による結果を比較して議論しているが、其の結果は可視領域に於いて既にかなり顕著で約 20% 以上の誤差を示している。偏光現象が二次散乱の強度に及ぼす影響が決して小さくない事は筆者の指摘したことであるが⁽⁹⁾、正しい二次散乱の理論につき此の直線的延長の仮定が成立つかどうかは一応たしかめる必要がある。そこで既に得られた一次及び二次散乱光強度を基にして直線的延長による見全強度を求め、輻射平衡式による値と比較した。第 6 表は其の結果で、 τ_1 として 0.2 と

Table 6. Intensities calculated approximately and their errors

z	τ_1	θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
30°	0.2	I_1	0.0169	0.0155	0.0144	0.0137	0.0136	0.0146	0.0174
		a	0.219	0.219	0.222	0.234	0.243	0.247	0.247
		I_{app}	0.0216	0.0199	0.0185	0.0179	0.0180	0.0194	0.0231
		error(%)	+1.4	+2.0	+0.5	+1.1	+0.6	-0.5	-1.7
	1.0	I_1	0.0356	0.0325	0.0296	0.0272	0.0254	0.0248	0.0254
		a	0.567	0.575	0.598	0.621	0.657	0.677	0.697
		I_{app}	0.0822	0.0765	0.0736	0.0718	0.0741	0.0768	0.0838
		error(%)	+0.5	+1.2	+2.2	+4.2	+8.3	+9.1	+11.3
60°	0.2	I_1	0.0111	0.0100	0.0097	0.0101	0.0115	0.0145	0.0200
		a	0.234	0.240	0.247	0.257	0.261	0.262	0.265
		I_{app}	0.0145	0.0132	0.0129	0.0136	0.0156	0.0196	0.0272
		error(%)	0	+0.7	+0.8	0	-1.3	-2.0	-0.4
	1.0	I_1	0.0174	0.0156	0.0149	0.0147	0.0157	0.0177	0.0202
		a	0.626	0.647	0.651	0.667	0.669	0.684	0.713
		I_{app}	0.0465	0.0442	0.0427	0.0441	0.0474	0.0560	0.0704
		error(%)	+1.3	+3.5	+1.4	+0.9	-0.8	+3.3	+13.7

where; $a = I_2/I_1$; $I_{app} = I_1/(1-a)$

Error; $(I_{app} - I_T)/I_T \times 100$

I_1 : Intensity of primary scattering

I_2 : Intensity of secondary scattering

I_T : Total intensity calculated from radiative equilibrium

1.0 とを例にとつた。第 4 図 a), b) にこれらの近似値と輻射平衡式による値、直接積分による二次散乱までの値とを図示した。即ち、これらによれば、 $\tau_1 = 0.2$ では各方向共に、又 30° , 60° 何れの太陽高度でも、近似値は 2~3% 以内でよく一致するが、 $\tau_1 = 1.0$ では二つの太陽高度何れ

も、大きな天頂角の方向で 10% 以上の誤差を示している。

§ 8. 空の偏光についての二つの理論

Chandrasekhar の理論がはじめて実際問題に適用されて大きな成果を認められたのは空の偏光の

 a) $\tau_1 = 0.2$

Fig. 4. The theoretical intensities calculated by means of integro-differential equation (I_T), direct integration (I_{1+2}) and approximate summation from I_1 and I_2 (I_{app}) respectively. (The suffix numbers denote the zenith angle of the sun in degree)

 b) $\tau_1 = 1.0$

問題に関してである⁽¹⁶⁾。空の光は一般に部分偏光しているが太陽鉛直面上に三種類の偏光しない方向のあることが古くから知られ、Babinet, Brewster, Arago の中立点と名づけられている。これ

らの点は太陽鉛直面以外に於いては偏光面が子午面と 45° をなす点と結びつき所謂 Bush のレムニスケートと称せられる中立線を形成する。其の形状は太陽高度の変化と共に独特の変化を示す事が Dorno の精緻な観測により知られている。これは恐らく二次以上の散乱光に基くものであろうとは定性的に想像されていたが、それ以上の満足な理論が与えられなかつた。所が Chandrasekhar の計算結果はこれらの事実を驚ろくべき見事な一致で説明してしまつたのである。

これにより直接積分による二次散乱までの理論は色褪せてしまう感があつたが Hammad⁽⁷⁾ は 1953 年直接積分によつても同様の結果が得られる(尤も太陽鉛直面内の現象に限られた計算ではあつたが)ことを示した。又更に Titchanowsky⁽²⁰⁾ の実測した天頂に於ける偏光度の一日変化に対して空気分子の光学的異方性を考慮に入れることにより非常によい定量的説明を与えた。(天頂の最大偏光度の実測 0.77 に対して理論値 0.78 である) Chandrasekhar は此の問題に対して地面の反射を考慮して説明を試みているが、此の場合は地面の反射率 0.25 で天頂の最大偏光度がやつと 0.9 程度である。

こうなると可視領域では高次散乱光はあまり重要な役割を占めていないであろうことが想像されるが筆者の此の度の計算で事情は明らかである。第 2 図で見る如く $\tau_1 = 0.2$ ($\lambda = 4660 \text{ \AA}$) で三次以上の散乱光は高々数%, もつと長波長の可視領域では更に其の寄与が少なくなることは明らかである。即ち直接積分の方法も可視領域に於いては殆ど同様に有効であると見做し得る。更に此の方法は形式が比較的簡単であり、今後複雑な大気の状態を取入れ易いという利点を保有するであろう。* 勿論これにより輻射平衡理論の価値は少しも減殺されるものでなく、直接積分では到底攻撃不可能の紫外領域に於いて其の偉力を遺憾なく発揮したこと上述の通りである。

§ 9. 結 言

太陽鉛直面内太陽と反対側に於ける天空紫外線

* 二次散乱に対する日食並びに吸収度の影響の導入は既に筆者により試みられた所である。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹³⁾

方向分布を Rayleigh 散乱大気中の輻射平衡理論並びに直接積分の二つの方法により算出し、実測と比較した。

実測は光電管とフィルターにより比較的長波長の $3500\sim 3700\text{\AA}$ 附近と短波長の $3100\sim 3300\text{\AA}$ 附近の二つの領域につき行われたものである。

太陽高度 30° に於ける分布は両波長共に輻射平衡理論により完全に説明出来るが直接積分によるものには全く其の望みがない。其の大きな相異点は波長領域が長波長にうつる時に三次以上の散乱光の寄与により現われると見られる天頂附近の勾配の緩やかになる傾向が直接積分では表わし得ない点にある。太陽高度 60° では non-Rayleigh 散乱の影響が顕著である。

Lenoble, Bernhardt により試みられた直接的延長による高次散乱光の近似計算を偏光を考慮した二次散乱理論をもとにして吟味した。此の方法は正しい二次散乱理論を基に用いると可視領域ではかなりよい精度で有効であることが示された。しかし紫外領域では天頂角の大きな方向に 10% 以上の誤差を生ずる。

三次以上の散乱光強度は可視領域では高々全強度の数%であるが、紫外領域の短波長側では 30~40% に達する。従つて可視領域では直接積分による二次散乱の理論が充分に有効であると見られる。

おわりに此の研究を終始温情を以て援助された気象研究所長島山久尚博士に厚く感謝の意を表します。又此の研究を寛大に許可された地球化学研究室長三宅泰雄博士に感謝致します。更に、有効適切な助言を賜った東京天文台長萩原雄祐博士、東北大学教授山本義一博士、シカゴ大学教授チャンドラセカール博士に厚く感謝の意を表します。

References

1. Dorno, C. and Lindholm, F. (1929): Helligkeitsverteilung über den Himmel im Ultraviolet, *Met. Z.* **46**, 281-292.
2. Eckel, O. (1934): Die Verteilung der Ultravioletstrahlung über das Himmelsgewölbe, *Met. Z.* **51**, 180-188.
3. Lenoble, J. (1954): Contribution a l'Etude du Rayonnement Ultraviolet Solaire de sa Diffusion dans l'Atmosphère et de sa Pénétration dans la Mer, *Ann. de Geophys. t.* **10**, 117-147.
4. Chapman, S. and Hammad, A. (1939): The Primary and Secondary Scattering of Sunlight in a Plane-stratified Atmosphere of Uniform Composition, *Phil. Mag.* **28**, 99-110.
5. Hammad, A. (1947): Ibid. II, III, *Phil. Mag.* **38**, 527.
6. Hammad, A. (1948): *Astrophys. J.* **108** 338.
7. Hammad, A. (1953): Calculation of the Polarization of a Sunlit Sky Composed of Pure Air Molecules, *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 184-187.
8. Sekihara, K. and Kawamura, K. (1950): Studies of the Distribution of Ultraviolet Sky Radiation I, *Geophys. Mag.* **22**, 21-28.
「天空紫外線分布観測に於ける二次散乱の問題」高層気象台報 第5巻 第1号 (昭和26年3月) 65-75
9. Sekihara, K. (1951): Studies of the Distribution of Ultraviolet Sky Radiation II, *Pap. Met. Geophys. Met. Res. Inst. Vol. II*, 158-167.
10. Sekihara, K. (1952): Ibid. III. Vol. III, 94-103.
11. Sekihara, K. (1953): Ibid. IV. Vol. III, 183-194.
12. Sekihara, K. (1953): Ibid. V. Vol. III, 217-285.
「天空紫外線分布と大気の光響の厚さとの関係について」気象集誌 Vol. 31, No. 4. (1953) pp. 117-124
13. Sekihara, K. (1953): Ibid. VI. Vol. VI, 97-103.
14. Chandrasekhar, S. (1944-1948): On the Radiative Equilibrium in a Stellar Atmosphere, I-XXIV, **100-108**.
15. Chandrasekhar, S. (1950): Radiative Transfer, Oxford.
16. Chandrasekhar, S. and Elbert, D. (1951): Polarization of the Sunlit Sky, *Nature*, **167**, 51-55.
17. Deirmendjian, D. and Sekera, Z. (1953): Quantitative Evaluation of Multiply Scattered and Diffusely Reflected Light in the Direction of a Stellar Source in a Rayleigh Atmosphere, *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 1158-1163.
18. Deirmendjian, D. and Sekera, Z. (1954): Global Radiation Resulting from Multiple Scattering in a Rayleigh Atmosphere, *Tellus*, Vol. 6, 382-398.
19. Ashburn, E. V. (1954): The Effect of Atmospheric Scattering and Ground Reflection upon the Determination of the Height of the Night Airglow, *J. Geophys. Res.* **59**, 67-70.
20. Tichanowsky, J. J. (1924): Polarisation des Himmelslichtes und Sonnenhöhe, *Met. Z.* **41**, 352-357.
21. Chandrasekhar, S. and Breen, F. (1948): On the Radiative Equilibrium of a Stellar Atmosphere XXIV, Appendix, *Astrophys. J.* **108**, 100-111.
22. Chandrasekhar, S. (1949): The Functions $G_{n,m}(\tau)$ and $G'_{n,m}(\tau)$ order 6 ($m=6$ $m \geq n$), *Astrophys. J.* **109**, 555.
23. Chandrasekhar, S. (1954): The Illumination and Polarization of the Sunlit Sky on Rayleigh Scattering, *Trans. Amer. Phil. Soc. New Series*, **44**, 643-728.

24. King, L. V. (1913): On the Scattering and Absorption of Light in Gaseous Media, with Application to the Intensity of Sky Radiation, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **212**, 375-433.
25. Jackson, W. H. (1910): The Solution of an Integral Equation occurring in the Theory of Radiation, *Bull. Am. Math. Soc.* Vol. XVI, 473-475.
26. Sekihara, K. (1954): Observation of the Distribution of Ultraviolet Sky Radiation at Comparatively Low Altitude of the Sun, *J. Met. Soc. Japan, Series II*, **32**, 317-324.
27. Bernhardt, F. (1952): Die sekundär diffuse Strahlung in einer Rayleigh Atmosphäre I, *Z. f. Met.* **6**, 257-271.
28. Bernhardt, F. (1953): Die sekundär diffuse Strahlung in einer Rayleigh Atmosphäre II, *Ibid.* **7**, 78-85.