静止大気中を落下する紙片の姿勢に就いて

雪片の落下姿勢の研究

佐 粧 純 男

気象研究所

On the Analysis of Motion of Falling Paper Fragment

On the study of falling snow

By Y. Sasyo

Meteorological Research Institute, Tokyo

(Manuscript received 11 March 1960)

Abstracts

It will be necessary to determine the hydrodynamical forces which affect falling snow or snowflake, and to look their falling position, falling trajectory etc. in order to study the collision efficiency between them.

In this paper, for preliminary investigation, the method of analysis of these forces and their falling position were shown.

1. 序

雪の結晶及び雪片の落下姿勢とか、その周りの気流の状態を知ることは、これらの衝突過程の基礎的研究として重要であるにも拘わらず、現在迄のところ、著者の知る限りでは、孫野⁽¹⁾、今井・市村⁽²⁾、高橋・徳植⁽³⁾、などの観測があるに過ぎ

ない。著者はこの問題の予備研究として、静止大気中を落下する紙片の運動をストロボフラッシュを用いた立体撮影から解析した。詳しい結果は追って報告することにし一応その方法及び解析例の一、二を示す。

2. 実験方法

方法は第1図(a), (b)に示す様に2台のカメ

(a)

(b)

第1図 実験装置平面図

(a)

(b)

第 2 図

- (a) $2 \times 2 \text{ cm}^2$ の紙片の落下の状態のストロボ瞬間像, $\times$ 印はフィルム面上の光軸重錘の像は鉛直線を見るためにつるしてある。
- (b) $0.5 \times 0.5 \text{ cm}^2$ 以下の紙片を沢山同時に落したときスポットライト併用の像で, 落下軌跡の上にストロボ瞬間像が重なっている。又落下軌跡の縞模様は紙片の廻転などの落ち方を示している。カメラは平行においた。

第3図 フィルム面の光軸の位置及び座標

カメラ1,2を正確に直角又は平行に置き、落下紙片の瞬間々々の像を撮影する。実験は暗い室内で行なうのであるが、このとき300W位のスポットライトで撮影範囲を常時照らしておくと、落下軌跡の上にストロボ像が重なり、タイムチェツクの役をする。この様にすると紙片の落下状態も大雑把に見当が付くし自然の降雪の状態や、浮遊物を飛ばして細い乱流の測定をするときの様に同時に沢山の粒子が視野に入る場合粒子の対応が簡単につくので便利である。第2図(a),(b),はこの様に撮つた写真で(a)はストロボ閃光だけ。(b)は300Wのスポットライトを並用したものである。これらの像の位置と実際の空間の位置は次の様な関係から求まる。即ち、カメラを直角に置いた場

合、空間の任意の点 $P(x, y, z)$ は

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{xf}{L_1+y-f}, & \zeta_1 &= \frac{z_1f}{L_1+y-f} \\ \eta &= \frac{yf}{L_2+x-f}, & \zeta_2 &= \frac{z_2f}{L_2+x-f} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

又は上式を x, y, z に就いて解き

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\{(L_1-f)f + (L_2-f)\eta\}}{f^2 - \xi\eta} \xi \equiv \sigma_1 \xi, \\ y &= \frac{\{(L_1-f)\xi + (L_2-f)f\}}{f^2 - \xi\eta} \eta \equiv \sigma_2 \eta, \\ z_1 &= \sigma_1 \zeta_1 \\ z_2 &= \sigma_2 \zeta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

但し空間座標の原点は第1図(a), に示す様に、双方のカメラの光軸の交点 O とし、 $\xi, \zeta_1, \eta, \zeta_2$

は夫々のカメラで撮影した像の光軸からの距離である。(第3図(a)), 又カメラを平行に置いた場合は, 光軸間の距離を X とし, カメラ 1, の光軸を y 軸にとれば

$$\xi_1 = \frac{fx}{y-f}$$

$$\xi_2 = \frac{f(x-X)}{y-f}$$

$$\zeta_1 = \frac{fz_1}{y-f}$$

$$\zeta_2 = \frac{fz_2}{y-f}$$

(3)

あるいは x, y, z について

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_1 - \xi_2} X$$

$$y = \frac{f}{\xi_1 - \xi_2} X + f$$

$$z_1 = \frac{\zeta_1}{\xi_1 - \xi_2} X$$

$$z_2 = \frac{\zeta_2}{\xi_1 - \xi_2} X$$

(4)

で表わされる (第3図(b)参照)。夫々の場合カメラ 1, 2, の高さが完全に等しければ (2) 又は (4) 式で z_1, z_2 , は一致するはずであるが, 相対距離だけを問題にする限り, カメラの高さに若干の差があつても差支ない。又フィルム面上の光軸の位

第 4 図

置は、像の中心と云ふ意味からフィルム感光部の対角線の交点とした（正確には感光部の形は直角四辺形でなかつたが誤差の範囲として許した）。 L_1, L_2, X などは実験を行なう前にあらかじめ既知の長さの物体を写し上式から逆算して求めた。

3. 運動の解析例

種々の大きさ、形の紙片を落下させ、各瞬間々の像の位置から、紙片の空間の位置即ち、重心の位置及び傾き、更にそれらの時間的变化から、重心の運動、重心を中心とした廻転、振動、などを求めた。落下させた紙片は 1cm^2 が 8.8mg 。位の方眼紙を用ひ、紙片の隅の坐標（少なくとも3点）を求めた。用いる式がレンズ像の倍率の式であるために、フィルム面での読取りの誤差が結果に大きく出るので読取りはコンパレーターを用いた。現在迄解析を終えたものは $2\times 2\text{cm}^2$, $3\times 3\text{cm}^2$ の正方形のもの各1例ずつで、一般的な結論は今後更に多くの例に就いて解析した後でなければ云えないが解析例を示す意味で結果を簡単に示す。

(i) 重心の運動

紙片を水平にして静かに落すと、 $3\times 3\text{cm}^2$ 以下の正方紙片の殆んどは、落下後 1m 。前後振動し乍ら落ちて行く、併しこの運動は非常に不安定で直ぐ廻転落下に変わろうとするが重心の水平変位が余り大きくなく、望むところに落下させられる

ので、ストロボの光量が弱い場合（閃光間隔 $\frac{1}{50}\text{sec}$ ）でも、ストロボの近くに落下させて鮮明な像が得られる。一方廻転落下を始めると水平変位が大きくなり相当広範囲の照射が必要になり強い光量を出さねばならず、吾々の用いたストロボでは閃光間隔が $\frac{1}{20}\text{sec}$ 以上に限られるので運動の解析には不充分である。従つて今回は主に振動落下をしらべた。紙片は 30cm 位落下してからカメラの視野に入り後 $70\sim 80\text{cm}$ 位の状態で $10\sim 15$ 点位入った。重心の位置は紙片の対角距離の中点から求めた、このとき2組の対角距離から求めた値は、 $\frac{2}{100}\sim \frac{3}{100}\text{cm}$ 位で一致したので両者の平均を使った。この様にして相隣る像の重心間の距離から落下速度を求めた結果を第1表にまとめてある。

第1表 重心の運動

		$2\times 2\text{cm}^2$	$3\times 3\text{cm}^2$	
		振 動	振 動	廻 転
落下速度	最大	cm/sec 250	cm/sec 310	cm/sec 275
	最小	200	206	167
	平均	223	271	212
水平速度	最大	75	122	120
	最小	10	10	40
	平均	32	43	90

尚廻転落下の場合は、上述の理由から閃光間隔が $\frac{1}{20}\text{sec}$ 。で、5点位の像しかとれなかつたものである。この例に関する限り平均落下速度は大体一定

第5図

紙片の大きさ $0.5\times 0.32\text{cm}$ 位

大きい黒丸の間の $\frac{1}{20}\text{sec}$

落下距離約 35cm

第2図(b)のA軌跡

第 6 図

3×3cm²の紙片について慣性主軸の方向余弦の時間的变化

と見て良いようである、中谷⁽⁴⁾その他によつても自然雪の落下速度は、余りその質量や大きさに関係しないことが指摘されて居る。これらを考え合わせると板状の物体の落下は重心の運動と重心を中心とする運動とが互に関係し或る大きさ又は質量の決まつた範囲では落下速度が一定になる様な

或る種の調節作用が行なわれて居る様に思われる。この点に関して更に吟味をする必要があらう。次に重心の水平運動を少し詳しく見るために2×2 cm²のものに就いて第4図を作つて見た、縦軸にy方向の重心の位置の時間変化、その第一次差分、第二次差分を夫々実線、点線、鎖線で示した、第一

第 7 図

$2 \times 2 \text{ cm}^2$ の紙片の角速度の空間座標成分

次差分は $\frac{1}{50} \text{ sec}$ 間の平均速度，第二次差分は同じく平均加速度又は力に相当する量である。横軸には x 方向の全く同じ量が画いてある。これらは大体週期変化をして居ると見られ，従つて $x-y$ 平面に対する重心の落下軌跡の射影は一種のリサージュ

の図形の様な変化をする， $3 \times 3 \text{ cm}^2$ の場合にもこれほど，はつきりした週期変化は示さなかつたが，カメラの視野の下でスパイラル状の落下をしたことから，この場合も遂には同じ傾向の落下になると思われる。この様なスパイラル状の落下は，

第 8 図

紙片に作用した偶力の時間的变化

第 2 表
廻転速度の空間座標成分

	2×2cm ²	3×3cm ²
$ \omega_x $	rad./sec. 18.6	rad./sec. 7.3
$ \omega_y $	10.4	5.4
$ \omega_z $	3.1	3.4
$\Omega = \sqrt{\sum_{xyz} \omega_i^2}$	22.3	11.0

第 3 表
偶力の慣性主軸方向の成分

	2×2cm ²	3×3cm ²
$ N_x' $	dyn. cm. 10.57	dyn. cm. 18.85
$ N_y' $	4.99	26.16
$ N_z' $	5.77	27.24

廻転落下の場合更に顕著になる、第 5 図は、前出第 2 図 (b) の軌跡の $x-y$ 面への投影であるが見事な楕円を作つて居る。この様な水平移動のために落下中の通過距離が長くなることは自然雪の場合にも当然起つて居ると思われ、衝突過程には重要な事柄であろう。

ii) 重心の周りの運動

紙片の重心を通る慣性主軸 (x', y', z') の空間坐

標に対する方向余弦を (l_1, m_1, n_1) , (l_2, m_2, n_2) , (l_3, m_3, n_3) として、この時間的变化を求めた。1 例が第 6 図であり、これから大体の運動が想像出来る、例へば l_1 がだんだん 0 から増加して行くことは、始め空間坐標 y と殆んど平行にあつた慣性主軸 x' が次第に x 軸の方向に近づくような廻転を、又夫々の慣性主軸 x', y', z' の空間坐標 z 軸となす方向余弦 n_1, n_2, n_3 のすべてが周期変化をして居る

ことから紙片の振動が予想され更にこの振動の軸は n_1, n_2 の位相が等しいことから $(+y', -x')$, $(-y', +x')$ の象限を通ることも知られる, 勿論これらは廻転の場合 2π , 振動の場合は振動角度の整数倍の不定はあるが, この場合の振動はそれほど早くない, $2 \times 2\text{cm}^2$ の場合は振動週期は殆んど同じであつたが, 振巾ははるかに大きかつた。これは両者の慣性の大きさから考えて当然のことと思われる。次にこれらの方向余弦の時間変化から紙片の角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \sum_k m_k \frac{dn_k}{dt} = -\sum n_k \frac{dm_k}{dt} \\ \omega_y &= \sum_k n_k \frac{dl_k}{dt} = -\sum l_k \frac{dn_k}{dt} \\ \omega_z &= \sum l_k \frac{dm_k}{dt} = -\sum m_k \frac{dl_k}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を差分の形にして求めた, 第2項と第3項から求めた。 ω は $\frac{1}{10}$ 迄一致したので両者の平均をとつた。第7図は $2 \times 2\text{cm}^2$ のものに就いてこの値を図示したもので, 夫々の時刻の ω の平均値を第2表にまとめてある。この表を見ると ω_z , 即ち z 軸の周りの角速度は, $2 \times 2\text{cm}^2$, $3 \times 3\text{cm}^2$ の紙片の場合でも殆んど同じであるにも拘わらず, ω_x, ω_y の前者の値は後者の約倍になつて居り, 恐らく偶然ではあろうが, 質量に逆比例している。

次に Euer の式

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_{x'}}{dt} - (B-C) \omega_{y'} \omega_{z'} &= N_{x'} \\ B \frac{d\omega_{y'}}{dt} - (C-A) \omega_{z'} \omega_{x'} &= N_{y'} \\ C \frac{d\omega_{z'}}{dt} - (A-B) \omega_{x'} \omega_{y'} &= N_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

から各主軸に対する偶力の成分を求め同じく第8図及び第3表に示してある。但し A, B, C , は紙片の各主軸 x', y', z' , に関する慣性能率で正方紙方の場合 $A=B, C=2A$ で, $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ は角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, の慣性主軸方向の成分である。

以上単に2例だけの解析結果で一般的な結論は何も云えないが今後多くの解析により, これらの運動と周りの気流との関係を求めたいと思つてゐる。

尚この方法から求めた力は二次の差分から求めるために精度の点に問題があり, 誤差の評価なども詳しく論じるべきであるがすべて次の機会に譲ることにした。

最後にこの仕事に対して種々理解ある御指導を頂いた物理気象研究部長高橋喜彦先生並びに高層気象研究部長今井一郎先生に対して厚く御礼申し上げると共に, 実験を手伝つて下さつた, 徳植弘, 塚田清両氏に感謝致します。

文 献

- 1.
2. いずれも日本気象学会昭和33年春発表。
- 3.
4. 中谷宇吉郎：雪の研究 昭和24年岩波書店