確率有限要素法の磁界解析への応用

Application of Stochastic Finite Element Method to the Analysis of Magnetic Field

榎園正人・青木雅昭

大分大学工学部電気工学科, 大分市旦野原 700 (〒870-11)

M. Enokizono and M. Aoki

Faculty of Engng., Oita Univ., 700, Dannoharu, Oita, 870-11

This paper presents the application of the stochastic finite element method to a magnetic field analysis. The dimensions or the material constants of a magnetic device are considered as probable ones and treated in the space-stochastic process. When magnetic permeability provides uncertain distribution on the surface or in the body of the magnetic material, the uncertainty can be taken into account. In order to obtain the effect of the deviation, a number of repeated calculations are necessary with the conventional finite element method. The present stochastic finite element method, however, needs no repetition, so that computing time can thus be considerably reduced. The calculated standard deviation makes it possible to evaluate the reliability of magnetic materials or power apparatus.

1. ま え が き

本解析手法は材料特性, 境界条件など種々の不確かさを考慮した確率有限要素法¹⁾を磁界解析に適用したものである。すなわち, 従来の有限要素法(確定的有限要素法と呼ぶことにする)は材料特性, 幾何学的特性を確定的なものとして取り扱ってきた。ところが, 実際の磁性材料には種々の不確定要素が存在し, さらに, 機器に組み込んだ場合も特性が変化する。そこで, このような特性の変化を統計的確率量として解析を進めることができれば好都合である。確定的有限要素法を用いて不確かさの

影響を統計量として求めようとすれば, 各要素ごとに材料定数をわずかに変化させて多量の計算をせねばならず, 膨大な演算時間が必要となり, 非現実的である。これに対し確率有限要素法によれば, 数回の反復計算で解が統計量として得られ, 通常の有限要素法とほぼ同じだけの計算機記憶容量とわずかな計算時間の増加で済ませることが可能であるという特徴を有している。

本論文は, 透磁率 μ が均質であるが, その大きさが一次元および二次元空間確率過程として変動する簡単なモデルについて確率有限要素法を適用し, 従来の確定的有限要素法と比較検討したので, その結果について報告す

Fig. 1 Flow chart.

Fig. 2 Distribution of potential fluctuation.

る。

2. 定式化

不確定性を考慮した解析を行うには、Fig. 1 (a) に示すように、母集団から無作為にサンプリングされた W 個の標本すべてについて解析を行い、それらの出力標本群から統計量を計算するというのが通常である。ところが、このような手法では反復計算が非常に多く必要で実用的でない。そこである出力標本が得られた場合、その背後にある確率過程を想定し、有限要素法という系を通じて実現されたものであるという統計的性質を考える必要がある。

例えば、磁界系に含まれる透磁率が不確かである場合一次元または二次元の空間確率過程として取り扱われ、これは換言すると、入出力間の相似則に基づき、有限個の透磁率の相関がある相関関数により与えるということにはかならない。すなわち、本手法によれば Fig. 1 (b) に示すように反復計算なく統計量が求められる。

まず簡単な問題として、透磁率が均質な二次元空間確率過程として変動する磁界下における無限鋼板群を想定し、その各々の無限板の一部分、 $L \times L$ の正方形板について統計量を解析する。Fig. 2 に標本であるモデルの概念図を示す。これは正方形板の一边にベクトルポテンシャル $A=0$ 、またその対辺に $A=1$ を与え透磁率が二次元的に変動した時のポテンシャル値の変動 δA を示したものである。

ここで、分割された要素 k における透磁率を次式で与えることにする。

$$\mu_k = \mu^0 \{1 + \alpha(x_k, y_k)\} \equiv \mu^0 (1 + \alpha_k) \quad (1)$$

ただし、 μ^0 は $\mu(x, y)$ の期待値、 α_k は期待値 0 の微小確率変数、 (x_k, y_k) は第 k 要素の重心座標である。これより第 k 要素の要素係数マトリックスは (2) 式の形

に表される。

$$k = k^0 + k^1 \alpha_k \quad (2)$$

これを全要素について重ね合わせば、(3) 式の全体係数マトリックスが得られる。

$$K = K^0 + \sum_{k=1}^n K_k^1 \alpha_k \quad (3)$$

ただし、 n は解析領域に含まれる確率変数の個数（要素数）である。ここでは簡単のため、二次以上の項を省略した一次摂動法を適用すると、未知ベクトルポテンシャルについても (4) 式が仮定できる。

$$A = A^0 + \sum_{k=1}^n A_k^1 \alpha_k \quad (4)$$

(3), (4) 式を通常の有限要素法の式 $KA = F$ に代入すると

$$K^0 A^0 + \sum_{k=1}^n (K_k^1 A^0 + K^0 A_k^1) \alpha_k = F \quad (5)$$

となり、(6), (7) 式のように確定項と一次変動率が求められる。

$$A^0 = (K^0)^{-1} F \quad (6)$$

$$A_k^1 = -(K^0)^{-1} K_k^1 A^0 \quad (7)$$

このように、一次変動率は確定項の全体係数マトリックスの逆行列 $(K^0)^{-1}$ を基に計算される。ところが、有限要素では K^0 はスパースなバンドマトリックスであるが、 $(K^0)^{-1}$ はバンドマトリックスを構成せずフルマトリックスになる。そこで、ある一つの要素について分散を評価する場合には、その要素に関与する節点 i, j, k の $(K^0)^{-1}$ を求めるだけで良い。例えば Fig. 3 のように右辺の第 i 行のみ 1、他を 0 をすることによりバンドマトリックス法が適用でき、その解ベクトルは $(K^0)^{-1}$ の第 i 列を与える。同様に他の節点についても計算すると、その要素についての $(K^0)^{-1}$ が効率良く求まるわけである。

本解析では二次元場を仮定し、離散化には三角形一次要素を用いることにする。そうすると、要素 k における磁束密度 B_k はその面積を A 、各節点の座標を (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 、ポテンシャルを A_1, A_2, A_3 とおく

Fig. 3 Partial inverse matrix method.

と次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k &= \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_2 & y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

さらに(8)式は(9)のように簡単に表すことができる。

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{A}_k$$

ただし

$$\mathbf{D}_k = \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_2 & y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

したがって、 $\mathbf{D}_k$ を用いて(4)式は(10)式のように変形できる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k I \alpha_k \quad (10)$$

一次近似を用いると $\mathbf{B}$ の期待値が、(11)、(12)式のように得られる。

$$E[\mathbf{B}] = \mathbf{B}^0 \quad (11)$$

$$V_{ar}[\mathbf{B}] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \text{diag}[\mathbf{B}_k \mathbf{B}_l^T] E[\alpha_k \alpha_l] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad E[\alpha_k \alpha_l] &= R(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= R(x_1 - x_k, y_1 - y_k) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{diag}[\mathbf{B}_k \mathbf{B}_l^T]$ は B_x, B_y を対角成分とする 2×2 のマトリックスで、 R は $\alpha(x, y)$ の自己相関関数であり均質な空間確率過程では、引数 λ_1, λ_2 は座標の差のみの関数となる。

3. 解の妥当性の検討

本解析手法の妥当性を示すために、従来の確定的有限要素法との比較を行う。 $L \times L$ の正方形鋼板を有限要素に分割し、各要素に(13)式で示される透磁率分布を与える。

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \mu^0 \{1 + \bar{\alpha} \cos(2\pi x/\hat{L}) \cos(2\pi y/\hat{L})\} \\ (\hat{L} &= L/3) \quad (13) \end{aligned}$$

種々の確率変数のパラメータ $\bar{\alpha}$ に対し確定的有限要素法を通して得られた中央部のベクトルポテンシャル解をFig. 4に黒丸で示す。それに対し、実線は(1)式と(13)式との対応関係

$$\alpha_k = \bar{\alpha} \cos(2\pi x_k/\hat{L}) \cos(2\pi y_k/\hat{L}) \quad (14)$$

を(4)式に代入して得られた確率有限要素法による変動率解

$$A = 0.5 + 9.7411765 \times 10^{-3} \bar{\alpha} \quad (15)$$

Fig. 4 Comparison between conventional FEM and stochastic FEM.

である。両者は広範囲に一致し、ポテンシャルの一次変動率 $A_k I$ が正しく求められたことが確認できる。

4. 要素分割数および自己相関関数に対する解の検討

まず、(12)式の自己相関関数として(16)式で示す対称性 $R(\lambda_1, \lambda_2) = R(-\lambda_1, \lambda_2)$ のある材料定数自己相関関数を与えた。

$$\begin{aligned} E[\alpha_k \alpha_l] &= R(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= C^2 \cos(2\pi \lambda_1/\hat{L}) \cos(2\pi \lambda_2/\hat{L}) \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、 C は透磁率変動を表す $\alpha(x, y)$ の標準偏差である。Fig. 5に中央要素における C で規準化された磁束密度の標準偏差を入力自己相関関数の波数 $L/\hat{L}$ との関係で示す。また、図中の数字は一辺の節点の数である。

y 軸方向成分に関して、波数が小さければ境界の影響を受けるが、 $L/\hat{L}$ が1.5~2以上になると無限板の問題に近づき標準偏差が一定に保たれる傾向を示している。それはまた、分割数による差は小さい。それに対し x 軸方向成分は、分割数による差が大きい。これは透磁率を階段状に近似しているためであるが、波数が大きい場合にはそれに見合うだけの分割が必要であることを示している。

次に、等方性のある材料定数自己相関関数(17)式を入力として与えた。

$$\begin{aligned} E[\alpha_k \alpha_l] &= R(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= C^2 \exp\{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/D^2\} \quad (17) \end{aligned}$$

(a) B_x

(b) B_y

Fig. 5 Relationship between standard deviation of magnetic flux density and wave number for eq.(16)

(a) B_x

(b) B_y

Fig. 6 Relationship between standard deviation of magnetic flux density and wave number for eq.(17)

Fig. 6 に種々の自己相関関数のパラメータ D に対して得られた x 軸, y 軸方向の磁束密度の標準偏差を示す. $1/D$ が大きくなると, R に高調波成分が増加し標準偏差は一定値に保たれる傾向がある. また磁性材が等方性であるにもかかわらず, B_x , B_y その結果が若干異なるのは分割によるものである.

次に, 種々の長方形板に対して検討を行うことにする. ただし, 自己相関関数としては δ 式を与えた. Fig. 7 に図中に示す形状の中央要素における磁束密度の標準偏差を示した. これより, 長くなった方向はそれだけ境界の影響が小さくなり, 入出力間の相似則が成立

するようになって, その方向の磁束密度の標準偏差は一定値を示す傾向にあることがわかる.

4. 解析例

Fig. 8 に示すモデルにおいて, 中央の帯状磁性体の透磁率が均質であるがその大きさが一次元空間確率過程として変動するものと仮定し, この磁性体について確率有限要素法を適用した. この磁性体の比透磁率の期待値を 5 とし, コイルに 1×10^7 (A/m²) の電流を流すものとして, 磁束密度の統計量の解析を行った. Fig. 9 は期待透磁率における磁束分布である.

Fig. 7 Relationship between standard deviation of magnetic flux density in oblong plates.

透磁率変動の自己相関関数を (18) 式の形に仮定し入力として与えた。

$$\begin{aligned} E[\alpha_k \alpha_l] &= R(x_l - x_k) \\ &= C^2 \cos \{2\pi (x_l - x_k) / \hat{L}\} \end{aligned} \quad (18)$$

Fig. 10 に図中示す方向の各要素における磁束密度の標準偏差を示す。ただし $L/\hat{L}=3$, $L=3.6(\text{cm})$ である。

ここで、透磁率分布を

$$\mu_k(x) = \mu^0 \{1 + \bar{\alpha} \cos(2\pi x / L + \theta)\} \quad (19)$$

のように仮定し、種々の θ 値に対して確定的有限要素法を通して得られた磁束密度の x 軸方向成分の変動分布を Fig. 11 に示す。ただし $\bar{\alpha}=0.1$ とした。この分布において、変動の大きな部分は、Fig. 10 の確率有限要素法から得られた標準偏差の大きな部分に対応しており、本手法の妥当性を示唆するものである。

Fig. 8 Model under examination.

Fig. 9 Flux distribution.

Fig. 10 Standard deviation of magnetic flux density in horizontal section.

(a) $\theta = \pi/12$

(b) $\theta = \pi/6$

(c) $\theta = \pi/3$

Fig. 11 Distribution of fluctuation of magnetic flux density, by conventional FEM using correlation function given by eq.(19)

Fig. 12 Single phase transformer.

(a) Horizontal section.

(b) Vertical section.

Fig. 13 Standard deviation of magnetic flux density.

次に確率有限要素法を Fig. 12 のような単相変圧器に適用した。ここでは全領域に対し、透磁率が均質で二次

(a) B_x (b) B_y

Fig. 14 Distribution of fluctuation of magnetic flux density, by conventional FEM using correlation function given by eq.(13).

元確率過程として変動する鋼板を想定し、(10)式に示す自己相関関数を入力として与えた。Fig. 13 に図中示す方向での磁束密度の標準偏差を示す。ここでも同様に種類の $\bar{\alpha}$ 値に確率的有限要素法により磁束密度の変動を求めた。Fig. 14 に $\bar{\alpha}=0.2$ の時の変動分布を示したが、他の $\bar{\alpha}$ 値に対しても確率有限要素法解とよく一致している。

5. あとがき

本論文では簡単なモデルについて、透磁率が一次元または二次元空間確率過程として変動する問題に確率有限要素法の磁界解析への適用を試みた。本手法からは期待値に加え、標準偏差 σ が得られ、その値を利用し信頼区間を評価することも可能であろう。また、変動する値は透磁率に限らず、座標が変動するものと考えられれば形状の不確かさを考慮して解析できる。

確率有限要素法固有の入力データは材料特有の自己相関関数であり、これだけですべての確率過程が表現できるわけではない。したがって実際のモデルの磁界解析に本手法を適用する場合には入力データとなる透磁率などの材料物性値の空間的な分布が知らなければならない。これらは現実の多数回の計測で得られた測定データなどから得られるはずであり、この点の問題はまだ残されたままである。

文 献

- 1) 中桐, 久田: 確率有限要素法入門, 培風館(1985)

1985年12月26日受理, 1986年2月27日採録