逆問題手法による磁気抵抗率の推定に関する一手法

A Method of Estimating Magnetic Reluctivity by Inverse Problems

山田外史・別所一夫*

金沢大学工学部電気・情報工学科, 金沢市小立野 2-40-20 (〒920)

*金沢大学工学部電気エネルギー変換実験施設, 金沢市小立野 2-40-20 (〒920)

S. Yamada and K. Bessho*

Dept. of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Technology, Kanazawa Univ.,
40-20, Kodatsuno 2-chome, Kanazawa 920

*Electrical Energy Conversion Laboratory, Faculty of Technology, Kanazawa Univ.,
40-20, Kodatsuno 2-chome, Kanazawa 920

We propose a method of estimating magnetic reluctivity for application in nondestructive testing and medical electronics. The combination of the finite element method and the measured data, one of the inverse problems, makes it possible to estimate magnetic reluctivity. Formulations for the estimation and the accuracy of the estimated value are reported. According to numerical experiments using these equations, we investigate the possibility of estimating the reluctivity of magnetic materials.

1. はじめに

磁気抵抗率の測定においては、被測定物の形状、励磁などの測定状態が測定に影響を与える。たとえば、反磁界係数による補正は形状の影響を考慮した例である。この問題に対して、測定状態の境界数値解析と測定値を結合し測定状態を詳細に考慮することにより、新しい磁気特性の測定が考えられる。よって、測定物の形状を直接考慮できるため測定物を加工せず測定が可能となり、磁気抵抗率からは非破壊検査などへの応用につながるものと思われる。

以上の目的に対して、著者らは有限要素法を逆問題に適用して、均質な物質の磁気抵抗率を計測する一手法を提案した。この方法は、物質外での磁束、磁束密度の測定値と有限要素法による境界計算を結合して磁気抵抗率を推定する方法である¹⁾。本手法では、測定値には誤差が含まれ、それから推定する値には誤差を伴う。この誤差を検討することにより、本手法の可能性を判断することができる。以下においては、誤差の定式化と被測定物の磁気抵抗率の大きさまた磁心の形状に対する本手法の適用の可能性を検討した。

2. 磁気抵抗率の推定の定式化

2.1 磁気抵抗率の推定

定式化の簡単化のために、Fig. 1 に示すような無限大の誘磁率の磁性体で囲まれた円筒空間内に未知の磁気抵抗率を持つ均質な円柱状被測定体および励磁コイルのある場合を対象とする。これより軸対称 3 次元場かつ静磁界の場合を取り扱う。

有限要素法に従い、系のシステム方程式を次式とする。

$$[H(\nu_s)]\{A\} = \{G\} \quad (1)$$

(1) 式には未知のベクトルポテンシャル $\{A\}$ と 1 個の未知の磁気抵抗率 ν_s が含まれている。(1) 式においては通常の境界計算に対し未知の変数を 1 個多く含み、そこで測定値を表す式を加える。たとえば、有限要素法の任意の要素 e での磁束密度の測定値 (B_r^e, B_z^e)、または Fig. 1 に示す半径 r_0 の円を横切る磁束 ϕ^s が測定可能であり、一般に測定値 C とベクトルポテンシャル $\{A\}$ との関係は

$$\{M\}^T \{A\} = C \quad (2)$$

Fig. 1 Apparatus with the axially symmetrical structure for the estimation of magnetic reluctivity.

と表される²⁾。{M} は座標の値にて定まる値である。

(1)式において{H}に未知の比磁気抵抗率が含まれるので、ニュートン・ラプソン法を用いて線形化する。すなわち、ベクトルポテンシャルならびに比磁気抵抗率の真値を

$$\begin{aligned} A_i &= A_i^{k-1} + \delta \nu_s^k \\ \nu_s &= \nu_s^{k-1} + \delta \nu_s^k \end{aligned} \quad (3)$$

と表す。ここで、 A_i^{k-1} および ν_s^{k-1} は(k-1)回目の繰返しでの近似値を示す。また、最も少ない観測値にて推定することとし、(1)式に加えて1個の(2)式を用いる。以上の式に対して線形化を施すと

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} H(\nu_s^{k-1}) & \frac{\partial \{ \sum H(\nu_s) A^{k-1} \}}{\partial \nu_s} \\ \hline \{M\}^T & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A^k \\ \nu_s^k \end{array} \right] \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \left\{ G \right\} - \left[H(\nu_s^{k-1}) \right] \left\{ A^{k-1} \right\} \\ \hline C - \{M\}^T \left\{ A^{k-1} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。(4)式にはいわゆる縁付きバンド行列が含まれる。解は、減速緩和などを考慮して繰返し計算により求める。

(4)式を用いて磁気抵抗率の推定の数値実験を行った。解析領域は、Fig. 2に示すモデル装置の1/4の領域とした。領域は1716個の1次三角要素にて分割し、総節点数918である。以上に基づいて倍精度演算を行って得た

Fig. 2 The domain under investigation.

Table 1 Estimation of magnetic reluctivity

No	Measured value B_r, B_z	Number of iterations	Estimated inverse relative reluctivity
1	B_r	4	50.0000000000241
2	B_z	4	49.9999999999819
3	B_r	4	50.00000000001220
4	B_z	4	50.00000000001115

計算結果を Table 1 に示す。この計算において測定値は磁界解析結果を用い、推定のための測定値を与えた位置を Fig. 2 に示す。

2.2 推定値の精度

逆問題に用いる測定値の磁束または磁束密度には誤差が含まれる。現在の磁気測定の精度からするとその有効けたは3けたが現実的な数値である。この不確さを含む測定値から比磁気抵抗率 ν_s を推定する場合、その推定値に与える誤差を明確にすることにより本手法による測定の可能性を判断することができる。そのために摂動法に基づき推定値の誤差を求める式を導く³⁾。

まず、(1)式および(2)式をまとめて

$$[D]\{T\} = \{G_0\} \quad (5)$$

と表す。ここで

$$[D] = \left[\begin{array}{c|c} H(\nu_s) & 0 \\ \hline \{M\}^T & 0 \end{array} \right] \quad (6a)$$

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \{A\} \\ \nu_s \end{array} \right\} \quad (6b)$$

$$\{G_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \{G\} \\ C \end{array} \right\} \quad (6c)$$

摂動法に従い、(5)式を測定値の期待値 $\bar{C}$ のまわりのずれをパラメータ $\varepsilon (= C - \bar{C})$ として展開する。その結果、推定値の確定項 $\{\bar{T}\}$ 、一次変動率 $\{\bar{T}'\}$ はそれぞれ

$$\{\bar{T}\} = [\bar{D}]^{-1} \{\bar{G}_0\} \quad (7)$$

$$\{\bar{T}'\} = [\bar{D}']^{-1} \{0 \mid 1\}^T \quad (8)$$

として得られ、ここで $[\bar{D}']$ は次式に示す。

$$[\bar{D}'] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{H}(\nu_s) & \frac{\partial}{\partial \nu_s} [H(\nu_s)] \{\bar{A}\} \\ \hline \{M\}^T & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

測定値の変化に対する磁気抵抗率の変化を感度 β と定義すると、すなわち

$$\beta = \left(\frac{\nu_s - \bar{\nu}_s}{C - \bar{C}} \right) / (\bar{\nu}_s / \bar{C}) = \nu_s' / (\bar{\nu}_s / \bar{C}) \quad (10)$$

また、推定値の比磁気抵抗率ならびにベクトルポテンシャルの期待値 $E[T_i]$ 、分散 $\text{Var}[T_i]$ は以下のように得られる。

$$E[T_i] = E[\bar{T}_i + T_i' \varepsilon] = \bar{T}_i + T_i' E[\varepsilon] \quad (11)$$

$$\text{Var}[T_i] = E[(T_i')^2 \varepsilon^2] = (T_i')^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon^2] \quad (12)$$

もし確率変数 ε が正規分布すると仮定すると、すなわち

$$E[\varepsilon] = 0, \quad \text{Var}[\varepsilon] = \sigma^2 \quad (13)$$

その時、推定値の比磁気抵抗率の期待値および分散は

$$E[\nu_s] = \bar{\nu}_s, \quad \text{Var}[\nu_s] = (\nu_s')^2 \cdot \sigma^2 \quad (14)$$

となる。この分散値より推定値の精度、また手法の可能性を判断することができる。

3. 誤差の評価からの推定法の可能性

3.1 比磁気抵抗率の値に対する誤差評価

推定値の誤差評価のために、(10)式で与える感度をFig. 2に示す演算領域において求めた。まず、比磁気抵抗率 $\bar{\mu}_s = 1/50$ の被測定物と仮定した時、磁束と関係するベクトルポテンシャル A ならびに磁束密度 B_r , B_z に対する感度をその測定値を得た位置での $(1/\beta)$ の分布を求めた。参考のためFig. 3に磁束分布を示すベクトルポテンシャルの等高線を示し、Fig. 4(a), (b) ならびに (c) には感度の分布を図示した。これらの結果からは被測定物に近いところでの感度 β の値が小さく推定値の分散は小さい。すなわち確度の高い推定値を得るための測定場所を決定することができる。感度 β は測定値の変化に対する推定値の変動の大きさを与えるものであり、測定する磁束ならびに磁束密度の値の大きさには関係しない。

Fig. 5 および Fig. 6 は、比磁気抵抗率が $\bar{\mu}_s = 1/5$, $1/500$ とした場合のベクトルポテンシャル A に対する感度を比較したものである。この結果、比磁気抵抗率が小さくなると感度 β が大きくなる。たとえば、Fig. 6 において $1/\beta = 0.025$ となる位置での観測値の分散が 1.0% であるとき、測定値の分散は 40% となり推定値の確度は低い。以上より、提案した方式は比磁気抵抗率の大きい磁性体の測定に適用すると思われる。ただし、Fig. 4 から Fig. 6 の結果は Fig. 1 に示す反磁界が比較的大きなモデル装置での結果であり、装置の形状を変化させ空隙の少ない構成とすることにより感度 β は大きくなる。Fig. 7 はギャップ長を $1/7$ としたときの場合であり、このように磁心の特性を配慮することにより、比磁気抵抗率の小さな場合であっても推定を可能にすることができる。

3.2 磁心形状による比磁気抵抗率の誤差評価

本手法による磁気抵抗率の推定では磁心形状が与えられていればいかなる形状（ただし、本論文では回転対称な磁心を対象とする）に対しても可能である。一例とし

Fig. 3 Distribution.

て、その長さおよび径はFig. 3と同じく円柱状の磁心端を楕円状にした場合を対象にする。Fig. 8 は、この場合におけるベクトルポテンシャルの分布を示す。

Fig. 9(a), (b) は、ベクトルポテンシャル A ならびに磁束密度 B_r に対する感度 $(1/\beta)$ の分布であり、Fig. 3の結果とを比較すると感度はいくぶん小さくなってはいるがいずれの場合も推定の誤差を判定する上では大差はないものと解釈することができる。

これらの結果より、本手法では被測定物に何らの加工を施さずに形状を与えることにより磁気抵抗率の測定が可能である。ただし、本論文では回転対称な形状を対象としたが、3次元静磁場解析を導入すれば任意の形状について可能となる。

(a) The measured data is flux (vector potential).

(b) The measured data is flux density B_r .

(c) The measured data is flux density B_z .

Fig. 4 Distribution of the sensitivity $1/\beta$ as the relative reluctivity of core is $1/50$.

Fig. 5 Distribution of the sensitivity $1/\beta$ as the relative reluctivity of a core is $1/5$.

Fig. 8 Distribution.

Fig. 6 Distribution of the sensitivity $1/\beta$ as the relative reluctivity of a core is $1/500$.

(a) The measured data is flux (vector potential).

Fig. 7 Distribution of the sensitivity $1/\beta$ as the shape of a core changes and $\bar{\mu}_0 = 1/500$.

(b) The measured data is flux density B_z .

Fig. 9 Distribution of the sensitivity $1/\beta$ as the a core is ellipsoid.

4. ま と め

有限要素法を利用した逆問題の手法により被測定物の磁気抵抗率の推定する手法を示した。本手法の可能性を検討するため推定値の誤差を評価した。

本手法による磁気抵抗率の測定は磁気抵抗率の高い場合の測定に適することが明らかになった。また、開磁路の状態により測定できることにより、任意の形状の被測定物に適用可能であり、磁気抵抗率からの非破壊検査、探査に応用することを検討したい。

文 献

- 1) 山田, 沢田, 別所: 日本シミュレーション学会計算電気工学シンポジウム, II-30 (1988).
- 2) 中田, 高橋: 電気工学の有限要素法, p. 73, 森北出版, 東京 (1982).
- 3) 中桐, 久田: 確率有限要素法入門, 1 章, 培風館, 東京 (1985).

1988 年 11 月 21 日受理, 1989 年 2 月 10 日採録