パラメトリック発振における異常振動の解析

An Analysis of Abnormal Behavior in Parametric Oscillations

田所睦雄・永田広充・竜田藤男

東京電機大学, 東京都千代田区神田錦町 2-2 (〒101)

M. Tadokoro, H. Nagata and F. Tatsuta

Tokyo Denki University, 2-2, Kanda-Nishikicho, Chiyoda-ku, Tokyo 101

Parametric oscillations which occur in nonlinear magnetic circuits have wide applications in devices such as phase converters, parametric transformers, and parametric motors. When such devices operate under a light load, the parametric oscillations come to a state of fluctuations and quasi-periodic oscillations, and the device cannot maintain normal operation. This paper deals with an analysis of an outbreak of this abnormal behavior and regions in which the phenomena occur.

Key words: parametric oscillation, abnormal behavior, voltage fluctuation, phase plane, stability criterion

1. ま え が き

非線形磁気回路を応用した装置の開発や研究の中で、回路の非線形性によるパラメトリック発振現象を利用した相変換器、電動機、変圧器などの実用化についての研究が多数報告されている^{1)~3)}。これらの研究によれば、このパラメトリック発振は概して安定であるが、軽負荷時において揺らぎや概周期振動などの異常振動を生じ、装置の安全運転の障害となることがある^{4), 5)}。

一般に、単相非線形磁気回路のパラメトリック発振は、回路の非線形素子の特性を多項式で近似し、これを用いて導出される Mathieu 型の回路方程式に基づいて解析することができる。この回路方程式によれば、発振電圧は、ある条件により跳躍的に発生し、安定した電圧として確立する。しかし、この電圧は一次側回路の抵抗の値により、異常振動となる場合がある。

本論文においては、電力供給回路の回路抵抗を考慮した方程式と二次側の発振回路の方程式により、この異常振動の発生機構を解析するとともに、実験によりこれを実証した。

2. 基本回路

電力用パラメトリック発振回路の等価回路を Fig. 1 に示す。パラメトリック発振を応用した装置の形態は多

様であるが、回路方程式を誘導すると、この等価回路となる場合が多い。

ここで、 C_0 , G_0 は各々キャパシタンス、コンダクタンスであり、 r は巻線抵抗を含めた一次側の回路抵抗とする。また、解析に際して、 v_a , v_b は互いに 180° の位相を有する二相電源で、電源電圧を構成するものとする。 e_a , e_b は各々リアクトル A, B の一次巻線にかかる相電圧である。図の a-b 端子間電圧のある範囲で、c-d 端子間にパラメトリック発振が起こる。二相回路理論⁶⁾によれば、Fig. 1 の一次側は第二回路、二次側は第一回路と呼ばれるものである。

この回路で、第二回路の抵抗 r が無い場合、正弦波交流電圧を a-b 端子間に印加すれば、第一回路についての回路方程式は Mathieu 型の非線形微分方程式となる。従来は、この回路方程式により、パラメトリック発振電圧の発生機構について解析していた。

しかし、回路の異常振動の解析には、第二回路の抵抗が重要な役割を果たしている。つまり、パラメトリック発振は第一回路に発生し、パラメトリック発振の異常振動には第二回路の抵抗が関与していると考えられる。

3. 回路方程式

回路方程式を導出するためには、非線形リアクトルの励磁特性を適当な式で近似する必要があるが、精度の高い近似式を用いると、導出した回路方程式が複雑となり、解析が困難となる。今回は、異常振動の定性的解析

Fig. 1 Circuit diagram.

を主目的とするため、次のような三次式近似を用いた。

$$\left. \begin{aligned} n_1 i_a - n_2 i_0 &= \alpha \varphi_a + \beta \varphi_a^3 \\ n_1 i_b - n_2 i_0 &= \alpha \varphi_b + \beta \varphi_b^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

各リアクトルの磁束は、第一回路の磁束 x_0 と第二回路の磁束 φ_1 から次のように構成される。

$$\varphi_a = x_0 + \varphi_1, \quad \varphi_b = x_0 - \varphi_1 \quad (2)$$

さらに、電源電圧 v_a, v_b を次式とする。

$$v_a = E \cos \omega t, \quad v_b = E \cos(\omega t - \pi) \quad (3)$$

以上の仮定より、各回路方程式を求めると次式となる。

(a) 第一回路方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \left(\frac{G_0}{C_0} \right) \frac{dx_0}{dt} \\ + \frac{1}{2n_2^2 C_0} \{ \alpha x_0 + \beta (3x_0 \varphi_1^2 + x_0^3) \} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(b) 第二回路方程式

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{r}{n_1^2} \{ \alpha \varphi_1 + \beta (3\varphi_1 x_0^2 + \varphi_1^3) \} = \frac{E}{n_1} \cos \omega t \quad (5)$$

いま、非線形リアクトルと回路の実効容量との鉄共振電圧に相当する磁束を M と表せば、 M は次式となる⁷⁾。

$$M = \sqrt{\frac{4X}{3\beta_0}} \quad (6)$$

ここに、

$$X = 2\omega C_0 - \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha}{\omega n_2^2}, \quad \beta_0 = \frac{\beta}{\omega n_2^2}$$

M を磁束の基準値として、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= Mx, \quad \varphi_1 = My, \quad \left(\frac{NE}{\omega n_2} \right) = MZ, \quad N = \frac{n_2}{n_1} \\ \tau &= N^2 r X, \quad m = \frac{2\omega C_0}{\alpha_0}, \quad P = \frac{2G_0}{X} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

に従って、式(4)、式(5)の規格化を行い、 ωt を規格化された時間として改めて t とおくと次式を得る。

(a) 第一回路方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + P \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{1}{m} x \\ + \frac{4}{3} \left(\frac{m-1}{m} \right) (3xy^2 + x^3) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(b) 第二回路方程式

$$\frac{dy}{dt} + \tau \left\{ \left(\frac{1}{m-1} \right) y + \frac{4}{3} (3yx^2 + y^3) \right\} = Z \cos t \quad (9)$$

第二回路の抵抗 r を無視した場合には、

$$y = Z \sin t$$

となり、第一回路方程式のみとなり次式を得る。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_0 \frac{dx}{dt} + (K_1 + k_2 \cos 2t)x + k_3 x^3 = 0 \quad (10)$$

Fig. 2 Z-Y curves.

ここに、

$$k_0 = \left(\frac{m-1}{m} \right) P, \quad k_1 = 2Z^2 \left(\frac{m-1}{m} \right) + \frac{1}{m}$$

$$k_2 = -2Z^2 \left(\frac{m-1}{m} \right), \quad k_3 = \frac{4}{3} \left(\frac{m-1}{m} \right)$$

この x はある条件で跳躍するが、これは Fig. 1 の v_0 の跳躍に相当し、パラメトリック発振の確立を意味する。

ここで、 x の解の高調波成分を無視し、

$$x = Y \sin(t + \delta) \quad (11)$$

と仮定して、調平衡法を適用すれば、式(10)の近似解として次式が得られる。

$$Y^2 + 2Z^2 - 1 \pm \sqrt{Z^4 - P^2} = 0 \quad (12)$$

式(12)の符号の正は安定解、負は不安定解となる。

Fig. 2 に P をパラメータとした Z と Y の関係を示す。

4. 異常振動

Fig. 1 のパラメトリック発振電圧 v_0 は C_0 が十分大きければ、高調波の成分は少なく正弦波に近い波形となる。異常振動が発生しない場合には、式(11)のように正弦波近似で解を求めることもできるが、異常振動発生時には v_0 は種々の調波を含むので、ここでは、直接回路の微分方程式を数値計算して異常振動の発生領域を求めた。

4.1 $m = \infty$ の場合

式(8)、式(9)中の m は回路の容量サセプタンスと非線形リアクトルの線形部の等価サセプタンスの比を表す。したがって、リアクトルの励磁特性を式(1)のように近似する場合、回路の容量サセプタンスが十分大きいときには m は非常に大きい値となるため、 $m = \infty$ とみなせば、回路方程式は次式となる。

Fig. 3 Regions of the abnormal behavior in Z vs. P plane.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + \frac{4}{3}(3xy^2 + x^3) &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{4}{3}\tau(3yx^2 + y^3) &= Z \cos t \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)をRunge-Kutta法により計算し、時間が十分経過後の x と dx/dt の軌跡をこの平面上に描かせるとFig. 3(a)のような位相平面が得られる。解が安定した周期解であれば、軌跡は一周期で閉じるが、揺らぎや概周期振動の状態になると位相平面上の軌跡が単一の曲線とならない。位相平面上のこの軌跡の揺らぎにより異常振動と判定し、その領域をFig. 3(b)中に実線で示した。ここで、 P と Z の平面上における曲線の内部が異常振動の発生領域である。

4.2 $m=5$ の場合

この場合は、回路のキャパシタンスが比較的小さく、リアクトルの飽和が浅いところで発振が起こっている。回路方程式は次式となり、 $m=\infty$ の場合と比較すると、 x と y の項が付加されている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{5}P \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x + \frac{16}{15}(3xy^2 + x^3) &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \tau \left\{ \frac{1}{4}y + \frac{4}{3}(3yx^2 + y^3) \right\} &= Z \cos t \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Fig. 4 An example of the calculated result.

式(14)の異常振動発生領域をFig. 3(b)中に破線で示す。いずれの m の値でも τ の値が大きくなると、異常振動領域が広がることが分かる。

さらにFig. 4(a), (b)に $P=0.005$, $\tau=0.010$, $Z=0.79$ の場合のパラメトリック発振時の dx/dt の波形と位相平面を示す。

5. 異常振動発生条件

異常振動発生領域は、 τ と P の値によって規定される。この τ は第二回路の抵抗 r に関係した値であり、この r と異常振動とは密接な関係があるといえる。 $m=\infty$ の場合の r と異常振動の関係を求めるために、ここでは τ と Z の平面上の異常振動領域を安定判別により求める。

r を無視した場合には、電源が正弦波関数であるならば φ_1 も正弦波関数となるが、 r を考慮すると高調波成分を含むことになる。しかし、 r が小さい場合には高調波成分は少ないと考えてよい。また、パラメトリック発振電圧も m が十分大きい場合にはほぼ正弦波となる。以上を考慮すると x と y は次のように仮定できる。

$$\left. \begin{aligned} x &= (X_0 + x_1)\cos t + (X_3 + x_2)\sin t \\ y &= (Y_0 + y_3)\cos t + (Y_3 + x_4)\sin t \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに、 X_0, X_3, Y_0, Y_3 は各々定常解であり、 x_1, x_2, x_3, x_4 は各定常解の摂動を意味する。

式(15)を式(8)、式(9)に代入して、高次の摂動項を無視すると次の形式を得る。

$$\frac{d}{dt} X = AX + F \quad (16)$$

ここに、

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$F = [F_1, F_2, F_3, F_4]^T$$

A, F は各々 X_0, X_3, Y_0, Y_3 により構成される行列とベクトルである。 $F=0$ から定常解が得られ、 A の特性根の実数部の正負により、解の安定判別ができる。

第二回路の抵抗と異常振動の関係を τ - Z 平面としてFig. 5に示す。ここで、図中の曲線内部が異常振動領域

Fig. 5 Regions of the abnormal behavior in Z vs. τ plane with parameter P .

である。

6. 実験

Fig. 1 の二次側キャパシタンス C_0 をパラメータとした一次電圧に対する二次電圧の関係を Fig. 6 に示す。ここで、横軸が一次電圧、縦軸が二次電圧である。図の一点鎖線の部分で跳躍が発生し、点線部分で異常振動が現れる。例えば、 $C_0=70\mu\text{F}$ では一次電圧 V_1 を上昇させると、A 点で二次電圧 V_0 は跳躍を起こし、B 点に至る。さらに、 V_1 を上昇させると V_0 は C 点まで降下した後、D 点で小さく跳躍し、E 点に至る。2 回目の小さな跳躍は、この解析では考慮していない回路の不均衡によるものであり、完全に平衡した回路においては本来現れないものである⁸⁾。逆に E 点から V_1 を降下させると、 V_0 は F 点まで上昇し、再び跳躍を起こし零となる。

異常振動の例として、Fig. 7(a), (b) に $C_0=70\mu\text{F}$, $V_1=100\text{V}$ の場合の二次電圧波形と位相平面を示す。

7. むすび

パラメトリック発振回路の解析に用いられる回路方程式として Mathieu 型の式がある。この式は二相非線形磁気回路の第一回路より導出され、この回路のパラメトリック発振電圧の跳躍現象の解析に利用されている。

この発振電圧は回路のコンダクタンスが小さい場合には、揺らぎや概周期振動などの異常振動を生ずるが、この振動は、三相非線形磁気回路の場合^{3), 7)}と同様に電力供給側としての第二回路の巻線抵抗などの散逸項が重要な働きをしていることが、本研究により明らかになっ

Fig. 6 The primary voltage V_1 vs. the secondary voltage V_0 curves obtained in the experiment.

Fig. 7 An example of the experimental result.

た。

さらに、非線形磁気回路方程式についての新提案の規格化を用いた回路方程式により、これらの回路に発生する異常振動には、揺らぎや概周期振動の領域があることが明らかになり、実験においてこれを確認し得た。

本研究は東京電機大学総合研究所の助成により行われたことを付記するとともに、前研究所所長東京電機大学教授穂坂衛先生および同所長山本善之先生の御助言に感謝するものである。

文 献

- 1) 一ノ倉, 上野, 前田, 高橋, 村上: 日本応用磁気学会誌, 11, 355 (1987).
- 2) 坂本, 三浦, 井出, 一ノ倉, 渡辺, 村上: 日本応用磁気学会誌, 11, 395 (1987).
- 3) 田所, 山崎, 小森: 日本応用磁気学会誌, 12, 351 (1988).
- 4) 田所: 電学誌, 86, 1305 (1966).
- 5) 松本, 平井, 原田: 電学誌, 105, 1017 (1985).
- 6) 小池: 送配電工学, p. 194, 養賢堂 (1986).
- 7) 田所, 竜田, 永田, 新保: 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-73 (1989).
- 8) 田所: 電学誌, 86, 1580 (1966).

1990 年 1 月 8 日受理, 1990 年 3 月 13 日採録