有限要素法に基づく磁気抵抗法

Magnetic Resistance Analysis Based on the Finite Element Method

藪並隼人・早野誠治

法政大学大学院, 東京都小金井市梶野町 3-7-2 (〒184-8584)

H. Yabunami and S. Hayano

Graduate School of Engineering, Hosei University, 3-7-2 Kajino-cho, Koganei, Tokyo 184-8584

As is well known, conventional magnetic circuit theory makes it possible to analyze three-dimensional magnetic fields, even though the theoretical background is based on engineering experience. On the other hand, finite element method has a firm theoretical background but it is too computationally expensive to implement three-dimensional analysis of them. To carry out three-dimensional magnetic field analysis in the most efficient manner, we propose the theory of modern magnetic circuits based on finite element method. This makes it possible to implement quasi-three-dimensional magnetic field computations quite efficiently. A simple example demonstrates not only the usefulness but also the efficiency of our new methodology.

Key words: finite element method, magnetic circuit theory, quasi-three-dimensional analysis, Riemann integral

1. はじめに

近年のデジタル計算機の高性能化と小型化, ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし, いわゆる, デジタル計算機がパーソナルコンピュータ (以下, PC と略記) と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった. このため, 有限要素法や境界要素法で代表される電磁界の数値解析は, PC で実行可能な環境になり, この意味で, 既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている[1].

しかしながら, 現実問題として, 汎用パッケージで実用的な電磁機器の解析が容易に行え, その結果が実際の設計へ反映されているであろうか. 実際は, 極めて単純な例を除き, 定性的な電磁界分布の傾向を把握する程度の実用性しか期待できないであろう. この理由は大きく二つの問題点へ集約できるであろう. 最初は, 現実の電磁機器は必ず三次元的形状をもつことに起因する. いかにも強力な計算能力をもつに至った PC であっても, 三次元の電磁界解析を厳密に可能とするほど強力ではない. 次は, 材料特性のモデルに起因する. 従来の解析的な計算では不可能であった解析が数値解析で可能になったとは言え, 材料の構成方程式が未知である限り実際の電磁機器の厳密な電磁界解析は困難である.

これは, 数値解析技術の開発が材料の特性を勘案する余裕が無く, または解析上都合の良い特性だけ勘案して行われた結果であり, 現時点での数値解析技術の直面する最大の課題である. すなわち, 古典的な解析や現代の解析においても, 材料の特性を導入する最も現実的に重要な課題を

避けた側面は否めない. 逆にどのように材料の構成方程式を定式化するか, そして, どのように構成方程式を解析へ導入するかなどの問題点が正攻法で解決されていない.

以上の問題点を踏まえ, 実際の電磁機器の電磁界解析を行う方法は以下に示す二方法が考えられる.

第一は磁気抵抗法による磁気回路解析ある[2]. 古典的な磁界分布解析の工学的近似手法である磁気抵抗法は, 平均的であれ, 現実の非線形磁気装置の解析を可能とし, 装置の設計に寄与している. 磁気抵抗法は, 技術者の経験的要素に基づくため, その数学的根拠に疑問の余地がある. しかし, 実用的な結果を与える現実的方法である. 第二は有限要素法に代表される数値解析法である. 有限要素法などの数値解析法は, 数学的根拠が明確である反面, 現実の設計に生かされにくい側面をもつ.

本論文は, このような現状を踏まえ, 有限要素法と磁気抵抗法の接点を見出し, 数学的背景が明確な磁気抵抗法を確立する一方途を模索するものである. 具体的には, 有限要素法では容易に解析可能な問題である反面, 従来の磁気抵抗法ではモデル化が困難な例題を通して, 有限要素法と磁気抵抗法の接点を見出し, 磁気抵抗法で使われる技術者の経験的要素を有限要素法へ導入して, 実用的な電磁機器の設計へ寄与できる現代磁気回路理論を提案する.

2. 現代磁気回路理論

2.1 二次元現代磁気回路理論

まず, 磁気抵抗法を有限要素法で置き換えることを考える. Fig. 1(b)は Fig. 1(a)の有限要素法の離散化したメッシュを磁気抵抗法による磁気回路で表現したものである. 有限要素法は, Fig. 1(a)に示すように各節点に電流が均等に振り分けられているものとして, それぞれの節点に対する磁束のループ方程式を解くことにより, 各節点ポテンシャルを求めることを意味する. 他方, 磁気抵抗法による磁気回路解析は Fig. 1(b)に示すように, 各節点を取り囲む直列の磁気回

Fig. 1 Mesh system using the FEM and magnetic circuit theory.

路を連立して解くことにより、磁束分布を求めることを意味する。磁束はベクトルポテンシャルを線積分して得られるから、磁気回路方程式は数学的背景が明確な三角形一次有限要素法から導かれる。この考え方に基づき、数学的背景が不明確な磁気抵抗法による磁気回路解析を数学的背景が明確な有限要素法で置き換えて解析する方法が、二次元の現代磁気回路理論の基本的な考え方である。

2.2 準三次元的な現代磁気回路理論

Fig. 2の左図に示す立方体形状において、左から右方向に通る磁束は、Fig. 2の右図に示すように二次元の平行面のスライスに分割した形状の磁気抵抗を考えることにより、容易に計算することができる。これは最も簡単な場合であるが、この考え方を一般化し、本論文で提唱する有限要素法に基づく現代磁気回路理論は準三次元的な磁気回路へ一般化することを試みる。

ここで、Fig. 3に示す中空部分を持つ立体形状の磁気回路を考える。まず、この立体形状はFig. 4に示すように四個の同一形状の台形に分割することができる。さらに、Fig. 5に示すように分割された各々の台形を対角線面に沿って二個の五面体に分割した後、それぞれの五面体を水平方向に m 個の平行面状スライスに分割する。 m 個の平行面状スライスに分割された全体の磁気抵抗、すなわち、Fig. 5の右側に示す五面体の水平方向の磁気抵抗は、Fig. 6に示すように m 個の磁気抵抗を並列接続することで計算される。(1)式はFig. 6に示す合成の磁気抵抗値を与える。

$$R_{\frac{1}{8}} = \frac{C}{\mu B \log \left(\frac{A - 2C + 2C^2}{A - 2C} \right)} \quad (1)$$

(1)式は四個に分割された台形をさらに二分割して得られた五面体の磁気抵抗である。したがって、台形全体としての磁気抵抗は(1)式の磁気抵抗を二個直列に接続したものであり、これを図式的に示せばFig. 7のようになる。他の台

Fig. 2 Subdivisions of a square cubic solid.

Fig. 3 Square cubic solid with a hollow part.

Fig. 4 Subdivision into four trapezoids.

Fig. 5 Subdivisions along with a diagonal surface.

Fig. 6 Magnetic resistances connected in parallel.

Fig. 7 Magnetic resistance of the whole trapezoid.

形についても同様に磁気抵抗が計算され、最終的に Fig. 3に示す中空部分を有する立体形の全磁気抵抗は、(1)式の磁気抵抗を直列に八個接続したものであり、(2)式で与えられる。

$$R_{\text{whole}} = 8 \times R_{\frac{1}{8}} \quad (2)$$

(2)式は、Fig. 3に示すような中空4角形の磁気抵抗を現代磁気回路理論から計算した。ここでは、中空4角形を中空 n 角形へ拡張する。

まず、Figs. 3,4に示したように4角形の中空部分を有する4角柱は四個の同一形状の台形に分割することができることから、中空 n 角形は n 個の同一形状の台形に分割できる。この n 個の台形を、4角形の場合と同様に、対角線面に沿って二個の五面体に分割し、それぞれの五面体の磁気抵抗を計算する中空 n 角形に対する一般式は(3)式となる。

$$R_{n-5} = \frac{1}{\int_C \left[\frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan \left[\frac{(n-2)\pi}{2n} \right]} \right] + \left[\frac{2A}{n} - \frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan \left[\frac{(n-2)\pi}{2n} \right]} \right] x} \mu B \, dx \quad (3)$$

(3)式から、中空 n 角形の全磁気抵抗は(4)式となる。

$$R_{n\text{-total}} = R_{n-5} \times 2 \times n \quad (4)$$

2.3 中空 n 角形の磁気抵抗の評価

ここで、(2)式から磁気抵抗の単位を考えると、磁気抵抗の単位はインダクタンスの逆数、すなわち、 $1/H$ もしくは、 A/Wb である。ここでは、現代磁気回路理論による磁気抵抗から計算されるインダクタンスと、解析的に求まるインダクタンスを比較することにより、準三次元磁気抵抗の評価を行う。中空部分を有する立体形状において、外径0.5m、長さ1mで一定とし、内径を0.4mから0.01mまで変化し、さらに、角数を4から512まで変化させた場合のインダクタンスの変化をFig. 8に示す。

Fig. 8から、長さ1m、外径0.5m、内径0.01mの中空512角形のインダクタンスは最大の32.2541mHとなる。また、外径1m、内径0.1mで、角数の如何にかかわらず、インダクタンスはほぼ32mHで一定値となる。(5)式は、半径0.5mの円形断面をもつ、透磁率 μ の無限長導体において、電流が断面を均様な密度で流れている場合の単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解である。

Fig. 8 Convergent process of the inductance.

$$L = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right\} = 39.8087 \text{ mH}. \quad (5)$$

この半径 0.5m の円形断面をもつ、単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解 39.8087mH と、外径 0.5m, 内径 0.01m, 高さ 1m の 512 角柱に対する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求めたインダクタンス 32.2541mH を比較すると、かなりの精度で一致し、その誤差は 512 角柱の中空部分に起因するものと思われる[3].

3. 現代磁気回路理論の応用例

3.1 供試材料および複素透磁率の測定

第 2 章で導出した現代磁気回路理論による磁気抵抗の計算式を用いて、実際のフェライトコアの磁気抵抗を算出する。まず、磁気抵抗を計算する一般式に導入するコア材の複素透磁率の周波数特性を実験で測定する。

複素透磁率の周波数特性を測定した試料は Mn-Zn 系のトロイダル状フェライトコアである H5A(TDK 社製)を用いた。Table 1 に供試材料の寸法等を記す。また、入力正弦波交流電圧で、励振周波数 10kHz で測定した。

抵抗 r に流れる電流から算出した磁界 H を Fig. 9 に、サーチコイルの誘起電圧を数値積分することにより求めた磁束密度 B を Fig. 10, さらに磁界 H と磁束密度 B から求めた B - H ループを Fig. 11 にそれぞれ示す。これらの結果から、磁界 H と磁束密度 B はほぼ正弦波状に変化し、Fig. 11 の B - H ループは楕円形となり、磁気飽和は無視できることがわかる。

磁化特性は静的な磁区状態を表す構成方程式(6)式と動的な磁区状態を表す構成方程式(7)式の和で表される。

$$H_s = \frac{1}{\mu} B. \quad (6)$$

$$H_d = \frac{1}{s} \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right). \quad (7)$$

すなわち、静的な磁区状態と動的な磁区状態の両者を包括した構成方程式は(8),(9)式で表される。

$$H = H_s + H_d \quad (8)$$

Table 1 Specifications of the ferrite core.

Cross-sectional area [m ²]	20.86×10 ⁻⁶
Average magnetic flux path [m]	54×10 ⁻³

Fig. 9 Wave form of H.

Fig. 10 Wave form of B.

Fig. 11 B-H loop.

Table 2 Chua parameters.

μ [H/m]	2.258×10 ⁻³
μ_r [H/m]	1.298×10 ⁻³
s [Ω/m]	0.233×10 ³

Fig. 12 Complex permeability.

Solid line: real part; broken line: imaginary part.

$$= \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left(\frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right). \quad (9)$$

磁気飽和が無視することができる線形領域を前提とした場合、磁化特性モデルのパラメータ μ, μ_r, s は一定値となる。よって正弦波定常状態を前提として、複素記号法 $d/dt \rightarrow j\omega$ を(9)式に適用し、変形すると線形磁化特性モデルは(10)式で表される。

$$(1 + j\omega \frac{\mu_r}{s}) \hat{H} = \left(\frac{1}{\mu} + j\omega \frac{1}{s} \right) \hat{B}. \quad (10)$$

ここで、 $\hat{}$ はフェーザを表す。(10)式から複素透磁率 $\mu(\omega)$ は、

$$\mu(\omega) = \frac{\hat{B}}{\hat{H}} = \mu \left\{ \frac{s^2 + \omega^2 \mu \mu_r}{s^2 + (\omega \mu)^2} - j \frac{\omega(\mu - \mu_r)s}{s^2 + (\omega \mu)^2} \right\} \\ = \mu_r(\omega) - j \cdot \mu_i(\omega). \quad (11)$$

となる。(11)式より、線形化磁化特性モデルの各パラメータ値は次式のように決定される。

$$\mu = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mu_r(\omega), \quad (12)$$

$$\mu_r = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu_r(\omega). \quad (13)$$

線形化磁化特性モデルのパラメータ s を決定するには、 $\mu_i(\omega)$ の周波数特性から、 $\mu_i(\omega)$ が最大となる点、すなわち傾きが 0 になる点より、

$$s = 2\pi f_i \mu. \quad (14)$$

となる。ここで、 f_i は $\mu_i(\omega)$ が最大となる周波数とする。(12) - (14) 式に基づいて求めた線形化磁化特性モデルの各パラメータ値を Table 2 に記す。また、求めたパラメータを(11)式へ代入して複素透磁率の周波数特性を Fig. 12 に示す。Fig. 12 から、10kHz 付近で損失が最大になることがわかる[4].

3.2 磁気抵抗の算出

Fig. 12 において、10kHz で駆動時の複素透磁率を(3),(4)式に代入し、フェライトコアの磁気抵抗を計算し、その逆数から得られたインダクタンスを Table 3 に示す。このインダクタンスにおいては、実数部がインダクタンス、虚数部が鉄損に対応する。なお、これらの計算は円形のコアを

Table 3 Magnetic resistance and inductance.

Complex permeability [mH/m]	1.99834-j0.426439
Magnetic resistance [1/H]	1398.88+j298.516
Inductance [mH]	0.683723-j0.145904

512 角形に近似して行った。

3.3 電流プローブの磁界解析への応用

ここでは3.2節で計算したフェライトコアの磁気抵抗を用いて、電流プローブの磁界解析を行うことを考える。

電流プローブは、Fig. 13 に示すように、測定電流に起因するコア内の磁束をサーチコイルに誘起電圧から電流値を得る原理に基づく。3.2 節で磁気抵抗を算出したフェライトコアを用いて電流プローブを実装した実験装置に印加した電流波形を Fig. 14 に、測定したサーチコイルの誘起電圧波形を Fig. 15 にそれぞれ示す。また、この電流プローブにおいて、電流の流れている導体内、導体-コア間、コア内、コア外の 4 部分をそれぞれ 64 層の合計 256 層に分割して、その各層に流れる磁束を計算することにより求めた断面の磁束分布を Fig. 16 に示す。

導体内、導体-コア間、コア内、コア外の 4 部分をそれぞれ 64 層の合計 256 層に分割した電流プローブの各層の磁気抵抗を並列接続して合成磁気抵抗を計算し、その逆数であるインダクタンスの周波数特性の計算値を Fig. 17 に示す。Fig. 17 において、太線がインダクタンスの実数部（インダクタンス）、破線がインダクタンスの虚数部（鉄損）、細線がインダクタンスの絶対値（インピーダンス）に対応している。

また、インピーダンスアナライザを用いて、この電流プローブを実装した実験装置のインダクタンスを測定した結果を Fig. 18 に示す。

Fig. 17 のインダクタンスは、Fig. 12 に示したコアの複素透磁率のグラフと同一周波数特性を持つことがわかる。また、Fig. 18 に示す実験により測定したインダクタンスは、大きさは異なるものの、Fig.17 のインダクタンスとほぼ同様な傾向の周波数特性であることがわかる。コア内に集中しなかった漏れ磁束が、定量的な誤差の原因と考えられる。

Fig. 13 Principle of electric current probe.

Fig. 14 Input current.

Fig. 15 Induced voltage.

Fig. 16 Magnetic flux distribution.

Fig. 17 Calculated frequency characteristics of the inductance.

Solid line: real part (inductance).

Broken line: imaginary part (loss).

Thin line: Absolute value (impedance).

Fig. 18 Experimental inductance.

4. まとめ

本論文では、数学的背景を有限要素法とする現代磁気回路理論を提案した。具体的には、三角形 1 次要素を用いた有限要素法から 2 次元の現代磁気回路理論を導き、次に、積分を用いて 2 次元磁気抵抗を準 3 次元へ拡張した。得られた準三次元磁気抵抗の妥当性を吟味するため、簡単な例題を通してインダクタンスの計算し、その妥当性を検証した。さらに、準三次元手法を実際のフェライトコアの磁気抵抗計算へ適用し、電流プローブを実装した。その結果、定性的であるが電流プローブの周波数特性が電流プローブを構成する磁性材料の周波数特性へ対応することを明らかにした。

文献

- 1) P.P Silvester and Ferrari, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press (1990).
- 2) Y.Saito, "Three - dimensional analysis of nonlinear magnetodynamic fields in a saturable reactor," Comp.Meths.Appl.Mech.Eng,Vol.22,No.3,(1980).
- 3) 藪並隼人, 早野誠治, 斎藤兆古:「有限要素法に基づく磁気回路解析法—準三次元問題への拡張—」, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-00-253,(2000).
- 4) 鳴田知和, 遠藤久, 早野誠治, 斎藤兆古:「Chua 型磁化特性モデルのパラメータ測定に関する考察」, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-01-227,(2001).

2002 年 10 月 7 日受理, 2003 年 1 月 17 日採録