Magnetic Field Analysis for Levitation of an Iron Ball in Midair

Y. Ishii, Y. Sugihara, K. Yoshi, and T. Morita

Hakodate National College of Technology, Tokura 14-1, Hakodate 042-8501, Japan

Sasaki et al. observed an iron ball suspended in midair below five iron balls, in a plastic box attracted by a permanent magnet [*J. Appl. Phys.* **95**, No.4, 2090 (2004)]. The magnetic field exerted by the permanent magnet and five iron balls is analyzed theoretically and experimentally. The position of the suspended iron ball is also calculated from the field, and the results agree well with experimental findings. Without a plastic box, however, an iron ball is found to move away along the magnet ring axis, which is consistent with Earnshaw's theorem.

Key words: magnetic field analysis, magnetic levitation, magnetic force, Earnshaw's theorem

永久磁石による鉄球浮上に関する磁界解析

石井 良博・杉原 裕樹・吉 一 仁・森田 孝

函館工業高等専門学校, 函館市戸倉町 14-1 (〒042- 8501)

1. はじめに

Sasaki ら¹⁾は 2004 年, 永久磁石と永久磁石の引力によってプラスチック・ケースの天井に吸着した 5 個の鉄球により, 1 個の鉄球を空中に安定に浮上させたとの実験結果を報告している. 静磁界だけで強磁性体が安定に浮上することは Earnshaw の定理²⁾によって不可能とされているが, 彼等は磁界の測定や解析を行ってはいない.

本研究では Sasaki らの浮上実験を再現し, 永久磁石と吸着鉄球による磁界を理論と実験によって解析し, 浮上鉄球に働く力を計算することにより, その鉄球が浮上することを理論的にも確認する. さらに, Earnshaw の定理に照らして, 安定浮上の矛盾について調べる.

この現象は, 密閉容器内の磁性体をごく微小な制御力によって空中に安定させて移動させたり, 吸着ガスによる質量の変化の測定などに応用できる可能性がある.

2. 磁界 および浮上鉄球に作用する力の計算と測定

2.1 リング型のネオジウム磁石による磁界

リング型のネオジウム磁石と鉄球を Fig. 1 のように配置した場合の磁界を解析する. ただし, リング磁石は $-z$ 方向に磁化しているとする. また, 図の中の数字は mm を単位とする寸法を表している.

最初に, リング磁石による磁束密度を計算するために, リング磁石のみによる磁位 φ_m を計算する. リング磁石の内半径と外半径および厚さをそれぞれ a , b , $2d$ とし, 表面の磁極密度は一定で σ_m とする. z 軸と平行な側面には磁極が現れないと仮定する. 座標 z と z 軸からの距離が r で表される P 点の φ_m は次式で表される³⁾.

$$\varphi_m = \frac{\sigma_m}{4\pi\mu_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) r_0 d\phi dr_0, \quad (1)$$

ただし, μ_0 は真空の透磁率, l_1 , l_2 はそれぞれ, 磁石の表と裏の面における, (r_0, ϕ) で表される位置と P 点の間の距離で, 次式で表される.

$$l_1 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi + (z-d)^2}, \quad (2)$$

$$l_2 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi + (z+d)^2}.$$

(2)式を(1)式に代入して, ϕ についての積分を実行すると, φ_m は次式となる.

$$\varphi_m = \frac{\sigma_m}{\pi\mu_0} \int_a^b \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r+r_0)^2 + (z-d)^2}} K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z-d)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{(r+r_0)^2 + (z+d)^2}} K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z+d)^2}} \right) \right\} r_0 dr_0, \quad (3)$$

ここで, $K(k)$ は第一種完全楕円積分関数である.

磁束密度 B は φ_m から次のように得られる.

$$B = -\mu_0 \nabla \varphi_m. \quad (4)$$

対称性から, x 軸上における磁束密度 B は z 成分のみを有する. (4)式を用いて, 磁束密度の z 成分 B_z は次式で表される.

Fig. 1 Schematic illustration of a magnet and iron balls system.

$$\begin{aligned}
B_z = -\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) = \frac{\sigma_m}{\pi} \int_a^b & \left[\frac{z-d}{\left\{ (r+r_0)^2 + (z-d)^2 \right\}^{3/2}} \right. \\
& \times K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z-d)^2}} \right) + \frac{4rr_0(z-d)}{\left\{ (r+r_0)^2 + (z-d)^2 \right\}^{5/2}} \\
& \times \left\{ E \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z-d)^2}} \right) / x_1 (1-x_1) \right. \\
& \left. \left. - K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z-d)^2}} \right) / x_1 \right\} \right] - \\
& \left[\frac{z+d}{\left\{ (r+r_0)^2 + (z+d)^2 \right\}^{3/2}} K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z+d)^2}} \right) \right. \\
& + \frac{4rr_0(z+d)}{\left\{ (r+r_0)^2 + (z+d)^2 \right\}^{5/2}} \left\{ E \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z+d)^2}} \right) \right. \\
& \left. \left. / x_2 (1-x_2) - K \left(\sqrt{\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z+d)^2}} \right) / x_2 \right\} \right] r_0 dr_0. \quad (5)
\end{aligned}$$

(5)式を用いて計算した磁束密度の z 成分 B_z が、吸着鉄球の表面からの x 軸上の位置までの距離 h によって変化する様子をFig. 2に曲線で示す。リング型永久磁石のみによる磁界は、磁石から離れるにしたがって、単調に減少している。また同図に測定結果を黒丸で示す。 σ_m を公称値からわずかに調整し、 $\sigma_m=1.17 \text{ Wb/m}^2$ とすることによって、計算結果を測定結果に合わせるようにしたが、Fig. 2に示す範囲全体で両者が非常によく一致していることがわかる。

2.2 吸着鉄球による磁界

次にケースの天井に吸着している5個の鉄球による磁界を計算する。吸着している鉄球は一樣に磁化していると仮定することにより、 i 番目の鉄球が作る磁界は鉄球の中心に

位置する双極子モーメント $J_i V$ による磁界として計算することができる。ただし、 J_i は i 番目の鉄球の磁化、 $V=\pi D^3/6$ および D は鉄球の体積と直径である。対称性を利用して、中心から1, 2, 3番目の球の磁化は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned}
J_1 &= \chi \left\{ H_1 - \frac{NJ_1}{\mu_0} - 2 \times \frac{J_2 V}{4\pi\mu_0 D^3} - 2 \times \frac{J_3 V}{4\pi\mu_0 (2D)^3} \right\}, \\
J_2 &= \chi \left\{ H_2 - \frac{NJ_2}{\mu_0} - \frac{J_1 V}{4\pi\mu_0 D^3} - \frac{J_3 V}{4\pi\mu_0 D^3} - \frac{J_2 V}{4\pi\mu_0 (2D)^3} - \frac{J_3 V}{4\pi\mu_0 (3D)^3} \right\}, \\
J_3 &= \chi \left\{ H_3 - \frac{NJ_3}{\mu_0} - \frac{J_2 V}{4\pi\mu_0 D^3} - \frac{J_1 V}{4\pi\mu_0 (2D)^3} - \frac{J_2 V}{4\pi\mu_0 (3D)^3} - \frac{J_3 V}{4\pi\mu_0 (4D)^3} \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

ただし、 χ は鉄球の磁化率であり、括弧の中は鉄球の内部の磁界を表している、すなわち H_i はリング磁石による i 番目の鉄球の中心の位置の磁界、2項目は反磁界で $N=1/3$ は球の反磁界係数、3項目以降は他の鉄球による磁界で、その球の中心に置いた磁気双極子による磁界と同じである。(6)式を連立方程式として解くことにより J_i が得られる。

吸着鉄球による磁束密度をリング磁石による磁束密度と加え合わせた計算結果を測定結果とともに、Fig. 2に曲線と黒丸で、それぞれ示す。 $\chi_r = \chi/\mu_0 = 6.76$ としたことによって、計算結果は測定結果と非常によく一致した。リング磁石と鉄球による磁束密度は $h = 3 \text{ mm}$ の付近にピークを有し、この辺りで鉄球を浮上させる可能性を示している。

2.3 浮上鉄球に作用する力

Fig. 2に示した磁界の計算結果を用いて、次式により浮上鉄球に作用する力を計算した。

$$F = 2 \left(1 - \frac{N}{2} \frac{\chi_r}{1 + N\chi_r} \right) \frac{\mu_0 \chi_r V}{1 + N\chi_r} H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (7)$$

ここで $H = B_z/\mu_0$ は、浮上鉄球の中心の位置におけるFig. 2に示した磁界である。(7)式の導出については

Fig. 2 Flux density B_z as a function of h . The upper curve shows B_z due to the permanent magnet only, and the lower curve shows B_z due to the permanent magnet and five iron balls.

Fig. 3 Force exerted on an iron ball as a function of h .

付録に示す。

浮上鉄球に作用する力を(7)式を用いて計算し、その結果を Fig. 3 に示す。ただし、浮上鉄球も吸着鉄球と同じものを使用していることから、浮上鉄球の磁化率を吸着鉄球と同じとした。同図において、引力 F を負の値で示している。 $h = 7.5 \text{ mm}$ の付近で引力が最大となっている。 5.5 g の鉄球に作用する重力 mg を破線で示している。 $F=mg$ となる位置で、鉄球は安定して浮上するので、 Fig. 3 より $h=6.9 \text{ mm}$ となることがわかる。実験により得た結果は 7 mm であり、計算結果は測定結果と非常によく一致することがわかった。

3. 浮上鉄球の安定性

Earnshaw の定理²⁾ は、永久磁石のような静磁界だけで強磁性体を安定に浮上させることを禁じている。したがって、鉄球が浮上している位置における、磁束密度の z 成分 B_z の y および z による変化を調べ、浮上鉄球の安定性を検討する。

Fig. 4 Change in flux density as a function of y .

Fig. 5 Change in flux density as a function of z .

Fig. 3 より鉄球が浮上すると予測された位置から y 方向に沿って変位したときの B_z の変化を Fig. 4 に示す。 Fig. 4 より $y=0$ すなわち x 軸上で磁束密度が最大となり、鉄球は x 軸上に安定して留まることがわかる。

次に同じ位置から z 方向に沿って変位したときの磁束密度の z 成分 B_z の変化を Fig. 5 に示す。この場合は、 x 軸上 ($z=0$) で磁束密度は z 成分のみを有するが、 x 軸から離れると x 成分は 0 ではなくなる。しかし、 Fig. 5 から B_z は x 軸上で最小であり、 x 成分も加えると磁束密度は z の増大によってさらに大きく変化する。このことから鉄球は x 軸上に安定して留まることはできないことがわかる。したがって、本実験の系では Earnshaw の定理が成立していることが確認された。 Fig. 5 において、磁界が非対称でピークに約 4% の差が現れており、これは吸着した鉄球の位置が $z=0$ の位置からわずかにずれていることが原因と考えられるが、磁束密度が x 軸上で最小であることは明確である。

Sasaki ら¹⁾ は浮上している鉄球がプラスチックのケースに接触せずに安定していると主張している。また、その理由としてプラスチックのケースが反磁性体であることから、その反発力の可能性を示唆している。

本研究では、 Fig. 6 に示すように、 x 軸から z だけ変位し

Fig. 6 An iron ball and its images.

Fig. 7 Flux density due to iron ball images as a function of z .

た鉄球の鏡像を考える．鉄球の磁気モーメントを M とするとき，鏡像の磁気モーメント M_i は次式で与えられる⁴⁾．

$$M_i = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} M = -\frac{\chi_r}{2} M, \quad (8)$$

ここで， μ および χ_r はプラスチックケースの透磁率と比磁化率である． $\mu = \mu_0(1 + \chi_r)$ ，さらに $\chi_r \ll 1$ の関係を用いた．鏡像による鉄球の中心の位置の磁束密度は次式で表される．

$$B_i = (M_i / 2\pi) \left[(w/2 + z)^{-3} + (w/2 - z)^{-3} \right] \quad (9)$$

VSM で測定したプラスチックケースの比磁化率 $\chi_r = 9.37 \times 10^{-6}$ を用いて，(8)，(9)式により計算した B_i の結果を Fig. 7 に示す．同図から明らかなように，鏡像による磁束密度は，Fig. 5 に示す磁束密度の変化に対して非常に小さく，鉄球を z 方向に束縛できるものではないことがわかった．鉄球が浮上している様子を y 軸の方向から見た写真を Fig. 8 に示す．同図では，右側の壁と鉄球の間にも隙間があるように見えるが，薄い紙を挿入しようとするとき鉄球が紙に触れて回転することから，鉄球が非常に弱い力で壁に接触していることが確認された．

4. まとめ

本研究では，リング型永久磁石と吸着している鉄球による磁界を理論と実験により解析し，浮上している鉄球に作用する磁気的な力について調べた．さらに Earnshaw の定理に関連して，浮上鉄球の安定性について調べた．その結果，次のことがわかった．

- (1) リング型磁石による磁界，吸着鉄球による磁界の両者とも，理論と実験による磁界の値は非常によく一致した．このことから，磁界の理論曲線から力を計算することは妥当であると考えられる．
- (2) x 方向および y 方向に対しては，鉄球が安定に浮上することを確認した．
- (3) 磁界から予測された鉄球の安定して浮上する位置が，測定した結果と非常によく一致した．
- (4) しかし，浮上した鉄球は，磁界による力だけでは z 方向には安定しないことがわかった．このことから，Sasaki らの実験および本実験は，Earnshaw の定理が禁じている「磁界だけによる安定浮上」ではないことがわかった．
- (5) Sasaki らが示唆したような，プラスチックケースの反磁性による反発力は非常に微小であり，この反発力によって鉄球がケースに接触せずに安定して浮上させることは不可能であることがわかった．鉄球を z 方向に安定する程度に反磁性による反発力が大きい場合は，鏡像 M_i の磁界によって鉄球の位置の磁界が小さくなり，Fig. 2 または Fig. 4 のような磁束密度のピークがなくなり，やはり鉄球は安定浮上できなくなる．

しかし，本研究では鉄球とプラスチックケースの間の静

Fig. 8 An iron ball suspended in a plastic box. View along y -axis.

電力など，磁気力以外の力については考慮していない．

References

- 1) S.Sasaki, I.Yagi, and M.Murakami: *J.Appl.Phys.*, **95**, 2090 (2004).
- 2) S.Earnshaw: *Trans.Cambridge Philos.Soc.*, **7**, 97 (1842).
- 3) K.Ohta: *Jikikogaku no kiso*, Vol. 1 (Kyoritsu Shuppan, Tokyo, 1973). (in Japanese)
- 4) Y.Kotsuka: *Denkijikigaku*, (Morikita Shuppan, Tokyo, 1998). (in Japanese)

付録

鉄球を磁界 H の中に置くととき，鉄球の磁化 J は次式で表される．

$$J = \chi_r H_i, \quad (A-1)$$

ただし， H_i は鉄球の内部の磁界で，反磁界 H_d と次の関係にある．

$$H_i = H - H_d = H - NJ / \mu_0. \quad (A-2)$$

(A-1)，(A-2)式より， H_i と H の関係が得られる．

$$H_i = H / (1 + N\chi_r). \quad (A-3)$$

このときの鉄球の磁気エネルギー W は反磁界エネルギーとゼーマンエネルギーの和として，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} W &= (NJ^2 / 2\mu_0) V - MH = \left[(NJ^2 / 2\mu_0) - JH \right] V \\ &= - \left(1 - \frac{N}{2} \frac{\chi_r}{1 + N\chi_r} \right) \frac{\mu_0 \chi_r H^2}{1 + N\chi_r} V. \end{aligned} \quad (A-4)$$

(A-4) 式より，鉄球に作用する力が得られる．

$$\begin{aligned} F &= - \frac{\partial W}{\partial x} \\ &= \left(1 - \frac{N}{2} \frac{\chi_r}{1 + N\chi_r} \right) \frac{\mu_0 \chi_r}{1 + N\chi_r} V \times 2H \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (A-5)$$

2006年9月23日受理，2007年1月23日採録