展望

磁界計算 (1)

磁界計算における 有限要素法と積分方程式法 Finite Element Method and Integral Equation Method in the Calculation of the Magnetic Field

中村史朗・野村達衛 三菱電機㈱中央研究所
Shiro Nakamura and Tatsuei Nomura

Central Research Lab. Mitsubishi Electric Corp.

It is important to choose the method of solution to calculate a magnetic field problem. Recently numerical methods are expanding widely in their applications instead of analytical methods.

In this paper some of the recent applications of numerical methods to the analysis of electrical engineering problems, particularly a finite element method and an integral equation method, are reviewed. In addition a comparison of features of above two methods and their problems for practical use are described.

1. ま え が き

磁界計算法は大別して理論解析法と数値計算法にわけられる。近年の電子計算機の高性能化の中で数値計算法が一般的に用いられるようになり、最近ではかなり複雑な問題も容易に解が得られるようになっている。有限要素法は当初は主として構造解析の分野で発展したものであるが、電界や磁界問題などの場の問題に対してもその形状適合性などが認められて幅広く用いられるようになり、最近では磁界の数値計算法の代表的な存在である。

一方、磁界問題に対する積分方程式法の適用は有限要素法や差分法に代表される微分形解法とは対照をなすもので、主として完全三次元問題の計算法として注目されている。すなわち、有限要素法は二次元あるいは軸対称三次元問題には極めて有効であるものの、完全三次元問題への拡張と適用には計算時間およびデータの入出力の面になお問題がある。積分方程式法は領域に存在する磁性体のたとえば磁気モーメントを未知量とするもので要素分割が磁性体に限定されるという特徴により三次元問題への適用が容易である点や、外部境界を設定する必要がないという利点が着目されている。

以下、これら磁界の数値計算法の代表とみなされる有

図1 磁界計算法の分類。
Classification of methods for magnetic fields calculation.

限要素法と積分方程式法について、一般的特徴および代表的な計算法、ならびに幾つかの適用の実例を対比しながら紹介する。

なお参考までに、代表的な磁界計算法の分類の一例を図1に示した。

2. 有限要素法と積分方程式法

有限要素法および積分方程式法の概要とそれらの特徴を述べる。

有限要素法はこの10年間、電子・電気工学における電磁界計算の分野で著しく進歩し、その応用は導波管の電磁波解析から各種の電磁石、変圧器、回転機などの電気機器の電磁界計算まで多岐にわたっている¹⁾。このように応用分野が広がってきた背景には、電子計算機の高性能化により大規模な計算が短時間に処理できるようになったという面もある一方、有限要素法が複雑な形状に対し適合しやすいなどの幾つかの特徴を有し、磁気応用機器の特性解析や設計における手段として極めて有効であることが認識されてきたものと考えられる。

一方、積分方程式法は主として高エネルギー物理関係の電磁石設計の分野で活発な研究が行われてきた²⁾。

表1 有限要素法と積分方程式法の特徴.

The features of finite element method and integral equation method.

項 目	有 限 要 素 法	積 分 方 程 式 法
基 礎 方 程 式 未 知 数 係数マトリクス構造 外 部 境 界	微分方程式 ベクトル (スカラー) ・ポテンシャル 一般的には対称スパース・マトリクス 必 要	積分方程式 磁性体の磁気モーメント他 非対称密マトリクス 不 要
磁気飽和の取り扱い 永久磁石の取り扱い 渦電流の取り扱い 三次元問題への適用	可 能 可 能 可 能 理論的には可能, 実用上の問題多い	可 能 可 能 不可能 可能, 実用的な計算が可能
要素分割・データ数 計 算 時 間 汎 用 化 適 用 性	全領域の分割, 三次元では膨大になる 二次元では短時間, 三次元では膨大になる 容 易 極めて高い, 広汎な適用分野	磁性体のみ分割, 三次元も二次元と同程度 三次元も実用レベルの計算時間 容 易 適用分野が限定される

この方法は三次元静磁界問題の解法として有効であり, 電気機器への適用ではリレーの磁気回路解析³⁾, また近年では発電機や変圧器の磁界計算^{4,5)}に発展している. 積分方程式法は, 開放領域の計算が可能である点と要素分割を磁性体に限定できるという点の特徴であり, 有限要素法と大きく異なる点である.

表1に両計算法の特徴を対比して示す. ただし, 本表においては極く一般的な特徴に対する比較を示している. 近年, いずれの計算法も意欲的な適用研究が盛んであり, 解析技術自体も種々の方法が論じられてきており, 本表のように抱括的にその特徴を比較することは正確でない面がある. たとえば, 積分方程式法でも渦電流問題を取り扱った例^{6,7)}や, 有限要素法を三次元問題へ適用した例^{8,9)}もある.

3. 計 算 法

3.1 有限要素法

(I) 二次元静磁界計算法

基礎方程式 Maxwell の方程式から二次元静磁界問題に対して導かれる基礎微分方程式は次式である.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -i \quad (1)$$

ここに, A と i は z 方向のベクトルでそれぞれ磁気ベクトル・ポテンシャルと電流密度, μ は透磁率である.

この方程式の解は, 定義領域 R 内の積分である次の汎関数の停留値問題の解として得られる.

$$F = \iint_R \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - Ai \right] dx dy \quad (2)$$

すなわち, (2)式の変分が零という条件 ($\delta F = 0$) から解が求められる.

補間関数 数値計算の際には定義領域を多数の要素に分割し, それぞれの要素内のポテンシャル分布を設定する未知数の位置(節点)とその数で定まる補間関数で表現する. 通常3節点一次三角要素が広く用いられているが, 6節点二次三角要素などの高次要素の適用例も多い.

透磁率の分布近似 領域内の磁性体の透磁率は磁束密度で定まり, 磁束密度は

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3)$$

で求められる. この値は3節点一次三角要素では一様分布, また6節点二次三角要素では一次分布である. これに対応し透磁率の分布を3節点要素では一様に, 6節点要素では一次分布に近似する.

多元連立一次方程式の設定 補間関数で表現されたポテンシャルを式(2)に代入し汎関数の積分を行なう. $\delta F = 0$ の条件より任意の節点 l のポテンシャルに対し

$$\frac{\partial F}{\partial A_l} = 0 \quad (4)$$

が成立する. これより求められる式は, 節点 l に関する一次方程式である. 各節点についてこれを行なえば, 最終的には全節点に関する連立一次方程式が得られる.

連立方程式の解法と透磁率の反復修正 連立方程式の数値計算法には反復法と直接法の2種がある. 反復法は透磁率の反復修正を並行して行なえるので効果的な手法といえるが, 収束性に難がある. 一方, 直接法は非線形問題では透磁率の修正の度に連立式を解く必要があり, そのままでは膨大な計算時間を要する. Silvester 氏は Newton-Raphson 反復公式を適用して直接法の改善を行っている¹⁰⁾. 筆者らは直接法計算をはじめに実施した後, SOR を行なう方式で計算時間の短縮をはかっている¹¹⁾. この場合の透磁率の反復修正法は, 磁界強度 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の両方から修正値を求める方法を用いた.

(II) 有限要素法における渦電流計算法

有限要素法の特徴の一つは、容易に渦電流問題を解析することが可能な点である。これは電気機器の設計や特性検討の中で温度上昇の原因となる渦電流の定量評価などに大きな成果を挙げている。ここでは誘導電動機の二次側導体の表皮効果の解析¹²⁾を例にして、その定式化を示す。

渦電流が存在する場合の基礎方程式は、電磁諸量を複素数で表現すれば次式で表わせる。

$$\operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \vec{A}) \right\} = \vec{i}_0 - j s \omega \sigma (\vec{A} - \vec{A}_0) \quad (5)$$

ここに $s\omega$ は角周波数、 $\vec{i}_0$ は導体中の平均電流密度、 $\vec{A}_0$ は導体中の $\vec{A}$ の平均値 (平均ベクトル・ポテンシャル) である。

上式の右辺第二項が渦電流に対応する。この解析の場合、渦電流を含む導体が唯一つであることから

$$\operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \vec{A}') \right\} = -j s \omega \sigma \vec{A}' \quad (6)$$

を解く。次に

$$\vec{A} = j \vec{i}_0 (\vec{A}' - \vec{A}_0') / s \omega \sigma \vec{A}_0' \quad (7)$$

とすれば任意のポテンシャル基準で解くことができる。

平均電流 $\vec{i}_0$ を実数とすると領域内の電流と磁界の分布は

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_0 + s \omega \sigma \vec{A}_j \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}_r, \text{ ただし } \vec{A} = \vec{A}_r + j \vec{A}_j \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

として求められる。

通常の渦電流問題ではこのポテンシャル基準の取り扱いが解析を複雑にしている。すなわち、領域内の独立な導体中での渦電流の総和がゼロとなる解を得る必要があり、反復により真値を得ていく反復処理法と、連立式設定の段階で直接、ポテンシャル基準に関する条件式を含ませる直接処理法が考えられている¹³⁾。前者の場合は収束に関する問題を有し、後者の場合は1回の計算で解が得られるが係数マトリクスが密構造になるという欠点をもつが、いずれも本質的な問題ではない。

さらに、以上の説明では諸量は時間に対し正弦波状の変化を仮定し複素数を用いたが、たとえば磁性体のジュール損失を求める場合などには、磁気飽和による歪波形を扱う必要が生じ複素数の適用は注意を要する。

3.2 積分方程式法

(I) 磁気モーメント法²⁾

磁界の積分形表現 導体が透磁率 μ_0 で一様な場中存在する場合の磁界分布は Biot-Savart 式から求められる。

磁性体が存在する場合にはさらにその磁気モーメント $\vec{M}$ の寄与を考慮する必要がある。導体による磁界を $\vec{H}_c$ 、 $\vec{M}$

による磁界を $\vec{H}_m$ とすると、任意の点の磁界強度 $\vec{H}$ は、 $\vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_m$ と表わせる。 $\vec{H}_m$ は転回のない界であり、 $\vec{M}$ により作られるスカラー・ポテンシャル ϕ の負勾配として求められる。

$$\vec{H}_m = -\operatorname{grad} \phi \quad (9)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} dv \quad (10)$$

任意の点の磁界 $\vec{H}$ は、 $\vec{M}$ の分布が求められれば上式より容易に求められる。

磁気モーメントの計算法 $\vec{M}$ の分布は (9), (10) 式と磁性体中の関係式

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (11)$$

とから次の積分方程式を満足する。 χ は磁化率である。

$$\frac{\vec{M}}{\chi} = \vec{H}_c - \frac{1}{4\pi} \int_v \operatorname{grad} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} dv \quad (12)$$

上式を数値計算により解くために磁性体を多数の要素 (N 個) に分割し、各要素中で $\vec{M}$ は一定と仮定すれば、 i 番目要素における磁界は

$$\vec{H}_{m,i} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \vec{M}_j \quad (13)$$

と表現される。 C_{ij} は (9), (10) 式から求められる形状、配置にのみ依存する係数で、 3×3 のテンソルである。これを式 (12) に代入すると、

$$\frac{\vec{M}_i}{\chi} = \vec{H}_{c,i} + \sum_{j=1}^N C_{ij} \vec{M}_j \quad (14)$$

が得られる。これを全要素について組み合わせると、次の連立一次方程式が得られる。

$$[C] \begin{pmatrix} \vec{M} \end{pmatrix} - \frac{1}{\chi} \begin{pmatrix} \vec{M} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{H}_c \end{pmatrix} \quad (15)$$

磁化率が一定の場合には上式を一回計算すれば $\vec{M}$ が求められるが、磁気飽和問題の場合には有限要素法における同様の反復修正法を適用することができる。

(II) 表面電流法⁴⁾

表面電流法は磁気モーメントを磁性体の表面における等価電流で表現するものである。

$$\vec{i} = \operatorname{rot} \vec{M}, \quad \vec{K} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (16)$$

(等価体積電流) (等価表面電流)

ここに $\vec{n}$ は磁性体の表面の法線方向単位ベクトル。磁化率が磁性体内で一様であれば $\vec{i}$ は零であり、 $\vec{K}$ のみで磁界を求めることができる。すなわち

$$\vec{H}_m = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\vec{K} \times \vec{n}}{r^3} ds \quad (17)$$

である。上式と磁性体表面の次の関係式より $\vec{K}$ に関する積分方程式が得られる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_a) \quad (18)$$

i: 磁性体, a: 空間

得られた積分方程式の数値解法は磁気モーメント法と同様である。

(Ⅲ) 表面磁荷法⁵⁾

表面磁荷法は磁気モーメントを磁性体表面における等価表面磁荷で表現し積分方程式を解く方法である。Div を表面発散を表わす記号とすれば

$$\sigma = -\mu_0 \text{Div } \mathbf{M} \quad (19)$$

(等価表面磁荷密度)

である。表面電流法と同様に χ が一様でない場合には体積磁荷が現われるが、 χ 一様の問題に対する適用に限定する。磁荷 σ に基づく磁界は

$$\mathbf{H}_m = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int_s \text{grad } \frac{\sigma}{r} ds \quad (20)$$

これと境界面上の次の関係式

$$\sigma = \mu_0 (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n} \quad (21)$$

とから、次の積分方程式をたてることができる。

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\chi} \right) \sigma = \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_s \text{grad } \frac{\sigma}{r} ds \cdot \mathbf{n} \quad (22)$$

この後の数値解法は先の場合と同様である。

以上(I)～(Ⅲ)に三種の積分方程式法の計算法を紹介したが、いずれも要素分割は磁性体に対してのみ行なえばよい。磁気モーメント法では体積要素(四面体や六面体)、表面電流および表面磁荷法では磁性体の表面のみ分割すればよい。特に表面磁荷法は、取り扱う未知数がスカラー量である点で他の方法と比べ最終的な連立式が極めてコンパクトになる。線形静磁界問題(特に三次元)への適用は効果的と考えられる。

図2 直流機の磁束分布。
Magnetic flux distribution in a d. c. generator on load.

図3 タービン発電機の磁束分布。
Magnetic flux distribution in a turbine generator.

4. 適用例

有限要素法と積分方程式法を実際の電磁界計算に適用した例を幾つか紹介する。

4.1 有限要素法による計算例

回転機の磁界計算 ここでは二次元静磁界問題への適用例として、磁気ベクトル・ポテンシャルを用いた各種回転機の磁気回路の計算例を示す。図2は直流機の一極分の断面に対し負荷時の磁束分布を求めたもので、3節点一次三角要素を使用した例である。図3はタービン発電機の無負荷飽和特性解析の際に行なった磁界計算例である。この例では6節点二次要素が使用されている。これらの計算はいずれも磁気回路として用いられている磁性体の磁気飽和現象を厳密に把握することを目的としたものである。

渦電流解析 超電導発電機の実用・インピーダンスの解析の際に行なわれた変形スカラー・ポテンシャルによる▼電流解析の結果の一部を図4に示す。構造的には軸対称であるが、電磁界が非軸対称の三次元問題に有限要素法を適用した例である。詳細は文献14)を参照されたい。

4.2 積分方程式法による計算例

超電導発電機の三次元静磁界計算⁴⁾

超電導発電機は磁気回路の主要部に磁性体を用いない空心構造が特徴であり、その磁界分布の計算は三次元計算によらざるを得ない。図5は磁界計算に関する部分を示す断面図である。この問題に対し、前述の磁気モーメント法が適用された例を図6に示す。図は計算時に用いられたインプット形状を示すものである。

この問題に対し、表面電流法を適用した例を図7に示

図4
超電導発電機の実用・インピーダンスの解析例。
Magnetic field calculation in a superconducting generator for an analysis of operational impedance.

図5
超電導発電機の断面。
Cross-section of superconducting generator showing windings and an iron shield.

図6
磁気モーメント法における分割モデル。
Model for magnetization integral equation.

図8
外鉄形変圧器の概略構造。
Schematic view of shell type transformer.

図9
表面要素分割。
System of surface elements.

図7 表面電流法による計算結果。
(a) コイル電流に基づく成分 (b) 鉄シールドに基づく成分
Distribution of magnetic field for equivalent surface current integral equation method.

す。図は磁性体に基づく磁界成分 H_m と電流に基づく磁界成分 H_e を個々に示したものである。

変圧器の三次元磁界計算⁵⁾

変圧器の漏れ磁界分布を詳細計算した例を紹介する。図8は解析対象の外鉄形変圧器の構造を模式的に示したものである。鉄心窓内の磁界分布は二次元計算を行なうことで近似的に求められるが、近年の機器の高密度化の傾向に伴い窓内のみならず窓外も含めた詳細な漏れ磁界分布の把握が要求されている。

この計算例は表面磁荷法を適用して漏れ磁界を完全三次元問題として求めたものである。図9に鉄心表面に対して行なった要素分割を示す。このとき上下、左右の対称性を考慮して未知数を鉄心の全表面の四分の一に限定している。図10は計算の結果得られた鉄心中央脚部の表面磁荷分布である。図中の $\mu_0 H_e$ は巻線電流が単独に作る磁界成分で、この二倍を差し引いたものが他の面上の磁荷の寄与分である(式(22)参照)。

図11は各部の磁界分布であり、二次元計算では求めることができない鉄心窓外の磁界が求められている。実測値と計算値は良好に一致しており、積分方程式法の有効性を示している。

図10 表面磁荷の分布。
Distribution of surface charge at the center core leg.

図11 鉄心窓外の磁界分布。
Distribution of magnetic field outside the window.

5. む す び

以上、磁界の数値計算法としてよく知られている有限要素法と積分方程式法について、一部の適用例を含め紹介した。有限要素法はその広汎な適用性が、積分方程式法は三次元問題への適用性が多くの計算で確かめられている。今後これらの計算法はさらに高度な磁界計算の分野への適用研究が盛んになるものと予想される。

なお、最近の話題として三次元の非線形問題を計算する有限要素法のプログラムが発表されている⁹⁾。これは、two-scalar potential に基づいて静磁界計算を行なうもので、精度や計算時間の面もかなり改善されているようであり注目されている。

〔参考文献〕

- 1) たとえば、第2回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム論文集 (1980)。
- 2) M. J. Newman, C. W. Trowbridge: Proc. 4th Int. Conf. Magnet Tech. (1972)。
- 3) N. Tsuya, Y. Yamazaki: Int. Conf. on Electromagnetic Relays (1963)。
- 4) 野村, 河面: 電気学会回転機研究会資料 RM-78-17 (1978)。
- 5) 中村, 野村, 岩本: 電学誌 **96**, 443 (1976)。
- 6) C. S. Biddlecombe *et al.*: Proc. COMPUMAG (1976)。
- 7) 武智, 黒田: 電気学会回転機・静止器研究会資料 RM-81-19 (1981)。
- 8) M. V. K. Chari *et al.*: IEEE PES Winter Meeting 81, WM 175-9 (1981)。
- 9) J. Simkin *et al.*: IEE Proc., Vol. 127, Pt. B, No. 6 (1980)。
- 10) P. Silvester *et al.*: IEEE Trans. PAS 70, TP-130-PWR (1970)。
- 11) 野村, 中村, 河面: 電気学会情報処理研究会資料 IP-76-25 (1976)。
- 12) 中村, 野村: 電気学会全国大会 No. 869 (1977)。
- 13) たとえば, 古崎, 小倉: 文献1) No. 19 (1980)。
- 14) 野村: 電気学会情報処理研究会資料 IP-80-21 (1980)。

展望

磁界計算 (2)

電子計算機と有限要素法 The Computational Performance in the Finite Element Method

村田健郎 日立中央研究所
Kenro Murata Central Research Lab. Hitachi Ltd.

Computational aspects of the F.E.M Solutions of the convective transport equations:

$\partial_t u + \nabla \cdot (-k \nabla u + \mathbf{b}u) = f$ or $\nabla \cdot (-k \nabla u + \mathbf{b}u) = f$ are described. Substructured Iteration Methods