連載

神経情報科学サマースクール NISS 2002 講義録

スパイク解析理論入門

岡田 真人

理化学研究所脳科学総合研究センター脳数理研究チーム*

科学技術振興機構さきがけ21 協調と制御領域

レポーター：井澤 淳¹，和田浩司²

東京工業大学大学院¹，埼玉大学大学院²

1. はじめに

図1は、電気生理学実験の流れをまとめたものである。まず、これまでの知見をもとに刺激やタスクを考案する。次に、それらの刺激やタスクの情報処理に関連していると思われる脳の領野のニューロンのスパイクを測定する。一般に、スパイクの発射はランダムな過程とみなせるので、スパイクをそのまま取り扱うのではなく、スパイクのデータから平均発火率や相関関数などのスパイクの統計量を求める。得られたスパイクの統計量が、実験に用いた刺激やタスクとは無関係である可能性もあるので、スパイクの統計量が刺激やタスクにどの程度関係しているかを調べる指針として、スパイクの統計量と刺激やタスクの間の相互情報量を計算する。よく、スパイクが入力刺激の情報を持つという言い方をするが、これは、ニューロンの平均発火率を見ていると、サルが何を見ているかを当てることができるという意味である。例えば、サルが線分を見ているとする。そのサルのV1の方位選択性を持つニューロンの発火状態を見れば、サルが見ている線分の方位が、そのニューロンの最適方位か否かを判断することができる。このような場合、そのV1のニューロンは方位に関する（相互）情報量を持つという。

次の課題は、得られたスパイクの統計量から、考えている領野のニューラルネットワークモデルを議論することである。

しかし、原理的にはスパイクの統計量からニューラルネットワークモデルの構造を決めることはできない。これは逆問題になっているからである。ニューラルネットワークモデルの構造が完全に分かっているならば、そこからどのようなスパイクが生成されるのかを予

測することは原理的には可能である。これは先ほどの逆問題に対応する順問題である。一方、同じ統計量をもつスパイク列を出す未知のニューラルネットワークがあったとする。この場合、そのニューラルネットワークの構造を一意に決定することは逆問題であり、非常に難しい。この逆問題を現実的に解くためには、それまで得られている電気生理学や解剖学の知見を使って、何種類かのモデルの候補を考えておき、どのモデルが実験データを矛盾なく説明できるかを争うサバイバルレースをモデルにかけ、それに勝ち残ったモデルが正しいモデルであるという戦略をとるしかない。その際、生理実験などから得られるスパイクの統計量の種類は沢山ある方が、モデルを絞り込みやすくなるのは容易に想像できるであろう。そこで、従来良く用いられているスパイク発火の一次統計量である平均発火率だけを使うのではなく、さらに高次の統計量を使うことを考える。

本講義では、まず、多数のニューロンのスパイクの応答であるスパイクラスタから高次の統計量を抽出

図1 電気生理学実験の流れ

* 〒351-0198 埼玉県和光市広沢2-1

okada@brain.riken.jp

する方法を説明する。つぎに先ほどの逆問題を現実的に解くことに関連して、ニューラルネットワークモデルが生成するスパイクの相関の理論的取り扱いの現状を紹介する。

2. スパイクの統計量の計算

スパイククラスターから統計量を計算するには、スパイク列をビンに区切って量子化する。この際、一つのビンの中には高々1個しかスパイクが入らないようにする。 i 番目のニューロンの t 番目のビンにスパイクがあれば $S_i^t=1$ とおき、なければ $S_i^t=0$ とおく。例えばある特定の時刻におけるニューロン間の相互作用に着目して、ある時刻 t でビンからは

$$\mathbf{S}^t = (S_1^t, S_2^t, \dots, S_N^t)$$

というベクトルを考えることができる。また、あるニューロン i の出すスパイクの、時間構造に着目して、ビンを時間方向で区切れば、

$$\mathbf{S}_i = (S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^T)$$

というベクトルを考えることができる。ここで、 N は素数、 T は時間方向へのビンの数である。

まず、これらのスパイクは同時確率分布 $P(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^T)$ から生成されたと仮定する。各状態をとる確率を足すと1になる条件から、この同時確率分布の自由度は $2^{TN}-1$ となる。この同時確率分布を決めるために推定すべきパラメータ数は $2^{TN}-1$ 個である。これらのパラメータを全部推定するためには少なくとも $2^{TN}-1$ の100倍くらい実験する必要がある。これは現実的でないので、何らかの条件をもうけてパラメータを少なくするしかない。

ここで多数のニューロンのスパイクデータの中の、2個のニューロン S_1 と S_2 についてだけ考えることにする。さらに同じビンでの $P(S_1, S_2)$ を考える。この2ニューロン系の取りうる状態は、(ニューロン1, ニューロン2) = (発火, 発火), (発火, 非発火), (非発火, 発火), (非発火, 非発火) の4通りある。この四つの状態をとる確率をそれぞれ、 $P_{11}, P_{10}, P_{01}, P_{00}$ と表記することにする。またこの系の自由度は、 2^2-1 の3である。系の自由度を落す一つの方法は周辺化である。周辺化とは、2個ニューロンの観測データのうち、一つのニューロンのデータしか見ないことにすることに相当する。例えば、ニューロン1のみに注目すると、ニューロン1が発火しない確率は、 $P_{00} + P_{01}$ で

ある。同様にして、ニューロン1が発火する確率も計算出来る。この方法で系の自由度を減らすことができる。自由度を減らすもう一つの方法は、系に大胆な近似を用いることである。まず、各スパイク列を独立だと思って以下のように書き下してみる。

$$P(S_1, S_2) = p_1(S_1)p_2(S_2).$$

これで、自由度が3から2に落ちた。一般には 2^N-1 の自由度が N くらいになる。さらに、個々のニューロンの確率分布は同じ物だと仮定しよう。すると以下のようになる。

$$P(S_1, S_2) = p_1(S_1)p_2(S_2) = p(S_1)p(S_2).$$

こういう近似を使って、すごく大きな自由度の系を小さな自由度の系に落すことができる。ここまで説明すれば、使った仮定が正しくなければ、誤った結果が出てくることも容易に想像できる。拘束を入れなければ、推定精度はあがらない。そのための仮定の導入には任意性がある。どのような仮定を入れるかは研究者の実力のあらわれであり、それでデータは生きたりも死んだりもする。最低限重要なことは、普段使っている統計的手法がどのような仮定に基づいて導出されることを普段から意識していることである。そのような観点で、生理学実験のデータ解析手法として良く用いられている、相互相関や自己相関を説明しよう。スタートラインは同時確率分布 $P(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^T)$ である。わからなくなったら、同時確率分布に戻って考えよう。

前と同じように2個のニューロン S_1 と S_2 についてだけ考えることにする。まず、時間と空間をわけて具体的に考えてみる。まず時間に注目して、1個のニューロンの時間変化のみに注目する。

$$p(S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^T) = \sum_{S_2} P(S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^T, S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^T).$$

この場合、 S_2 のニューロンのスパイクの情報は捨て、 S_1 のニューロンのスパイクの情報しかみていない。これはさきほどの周辺化である。周辺化してしまうと、ニューロン間の相互作用が見えなくなってしまうのではないか？と思われるかもしれないが、そんなことはない。1番目のニューロンのスパイクが2番目のニューロンに影響を与えて、2番目のニューロンがスパイクを出し、そのスパイクが1番目のニューロンに影響を与えて、1番目のニューロンがスパイクを出すとい

う連鎖があるはずで、その効果は陰には $p(S_1^1, S_2^2, \dots, S_T^T)$ に繰り込まれている。

周辺化して自由度が減ったとはいえ、ビン数はいくらでも大きいので、それでもまだまだ解析は大変である。そこでさらに、スパイク発火に定常性を仮定する。つまり時刻 t と時刻 $t + \tau$ のスパイク間の関係は、時刻をシフトした時刻 t' と時刻 $t' + \tau$ のスパイク間の関係と同じであると仮定する。こういう、系の定常性を仮定して時間差だけで関係が決まるという近似は、実は自己相関関数を求める時に使われている。近似を使うのは良いが、近似を使ったことを忘れて、結果だけを一人歩きさせないことが重要である。相関関数を求める際、スパイクの平均発火率を全部のラスタで平均して、そこからの揺らぎを定義する。揺らぎからどれくらいずれるかという相関関数を定義してやる。大体時刻が離れれば離れるほど関係性は弱くなる。exp で落ちるだろうと仮定して時定数 τ_0 を求める。こうすることにより、自己相関関数が決まる。

$$\begin{aligned}\delta S(t) &= S(t) - \langle S(t) \rangle \\ S(t) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S(T) \\ C(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S(T) \delta S(t) \delta S(t+\tau) \\ &= \langle \delta S(t) \delta S(t+\tau) \rangle \\ C(\tau) &\propto \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right).\end{aligned}$$

3. 対数線形モデル

つぎに、時間のことは無視して、空間のみに注目してみる。繰り返しになるが、これも大きな同時確率分布 $P(S^1, S^2, \dots, S^T)$ を取り扱えるようにする一つの切口であるということを忘れないで頂きたい。大胆に、時間に関してスパイクは独立だと仮定する。まず、独立なので、

$$P(S^1, S^2, \dots, S^T) = p_1(S^1) p_2(S^2) \cdots p_T(S^T)$$

とする。定常性を仮定して、各ビン毎に独立同分布だと思うと以下のようになる。

$$P(S^1, S^2, \dots, S^T) = p_1(S^1) p_2(S^2) \cdots p(S^T).$$

これは一見派手な近似に見えるがそんなに悪い近似ではなく、それなりに結果が出るし、これが普通良く使われている相互相関関数に対応する。つまり相互相関関数を使って出てきたデータを見る時は、背後にこの

ような仮定があることを十分認識する必要がある。ここでは、ニューロンの同時刻の関係性を見ている。同時刻というと、二つのニューロンスタティックな関係しか取り扱っていないような気がするが、それは考えが浅い。多分二つのニューロンは直接の結合がないにしても、いくつかのニューロンを経て、直接的間接的に相互作用しているはずである。同時刻どうしのビンのスパイクがあるなしの関係にも、そのような相互作用は陰に陽に影響を与えているので、同時刻の関係だけでも詳細に調べる価値はある。

Q 空間についての統計量を取るときに、例えば定常マルコフチェーンなどではだめなのか？

A もちろん良いが、ここでは簡単のために独立性を仮定して話を進める。繰り返しになるが、どのような仮定をおくかは、どれだけその系を知っているかによって決まるので、うまい仮定こそが研究者としての腕のみせどころである。

今は空間構造に着目しており、同じ時間ビンにあるスパイクの関係をどう取り扱うかが問題となる。一つの解析方法は、以前に定義した確率 $P_{11}, P_{10}, P_{01}, P_{00}$ を全て決定すればよい。しかし、色々な解析を行なう場合に、 $P_{11}, P_{10}, P_{01}, P_{00}$ を用いるのではなく、別の表記にしたほうが便利なのも多い。そこで、対数線形モデルというものを使うことにする。対数線形モデルは本質的には、先の P を用いた表記を変えただけである。例えばデカルト座標よりは極座標を用いたほうが、球面上の位置を表すのには便利であるように、表記を変えると見やすいこともある。そこで、対数線形モデルを用いて座標変換を行う¹⁻⁴⁾。

確率が以下のように書けたと仮定する。

$$\begin{aligned}p(S_1, S_2) &= \frac{1}{Z} \exp(-H(S_1, S_2)) \\ H(S_1, S_2) &= -\theta_1^{(1)} S_1 - \theta_2^{(1)} S_2 - \theta_{12}^{(2)} S_1 S_2 \\ Z &= \sum_{S_1=0,1} \sum_{S_2=0,1} \exp(-H(S_1, S_2)) \\ \log p(S_1, S_2) &= \theta_1^{(1)} S_1 + \theta_2^{(1)} S_2 + \theta_{12}^{(2)} S_1 S_2 - \Psi \\ \Psi &= \log Z.\end{aligned}$$

H の物理的な意味はハミルトニアンであるが、ここではとりあえず深く考えず単に H と表記するだけのものとする。 H は、二つのニューロンの状態である S_1 と S_2 と $S_1 S_2$ の足し算で、その間に係数として $\theta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{k_i}$ が入ってくる。新たに導入したパラメータ θ の上付きの添え字 k は、ニューロンの相関の次数をあらわす。具体的には上付きの添え字が $k=2$ で

あればニューロンの発火相関の次数は2であり、2個のニューロンの発火状態の積 $S_1 S_2$ の前の係数である。下付の添え字は k 個のニューロンのそれぞれの添え字をあらわす。この H が確率の対数に比例するものとする。しかしそれだけでは確率の規格化条件を満たさないで、足して1になるように規格化する。 $1/Z$ は規格化因子である。ここで、 p を決定するかわりに、 θ を決定することを考える。 θ は3個ある。変数 p の自由度は3。したがって、 p が決まれば θ を決めることができる。

以上のことは、2個のニューロンを N 個のニューロンにしても成り立つ。 N 個の系の場合は θ の個数は $2^N - 1$ 個で、系の自由度と一致している。

ところで、確率分布を記述するための座標系にはさまざまなものが存在しう。 $P_{11}, P_{10}, P_{01}, P_{00}$ をそのまま使ってもよい。 θ の組だけを使ってもいい。また、 $\langle S_1 \rangle, \langle S_2 \rangle, \langle S_1 S_2 \rangle$ を用いてもよい。ここで $\langle \cdot \rangle$ はビンに関するアンサンブル平均をあらわす。そのなかで龍野氏の講義録にもあるように⁵⁾、混合座標というものを使ったほうが都合が良い場合があることがわかっている。混合座標とは、 θ_1 と θ_2 の変わりに $\langle S_1 \rangle, \langle S_2 \rangle$ を使い、 $\theta_{12}^{(2)}$ はそのまま使う座標系である。2ニューロン系の解析の際は、 $\theta_{12}^{(2)}$ の代わりに $\theta^3 = \theta_{12}^{(2)}$ を使う慣用がある。この座標系を用いると、確率空間の中でピタゴラスの定理が成り立つ、検定がしやすい、などのメリットがある。

繰り返しになるが、対数線形モデルは単なるパラメータ変換である。その係数 θ は相互相関に似ている性質があり、また相互相関を3体や4体に拡張できる。Q ニューロンは全て同じタイプ?

A ニューロンの違いは入っている。ただ、スパイククラスターを取ったときの確率分布は時間的に変わらないと思う。少なくとも、シナプス結合は測定中は変わらないということは仮定している。

θ^3 は相互相関とほとんど同じ性質をもっている。相互相関と θ^3 の関係を簡単に述べる。まず、同時刻の相互相関関数 $C_{12}(0)$ を考える。2個のニューロンが測定できたとする。相互相関を求めるには、これまでと同様にスパイクのラスタをビンで量子化し、 S_1 の平均発火率を計算し、同様に S_2 の平均発火率も計算する。そして、各発火のそれからずれを計算する。

$$\begin{aligned}
 C_{12}(0) &= \langle (S_1(t) - \langle S_1(t) \rangle)(S_2(t) - \langle S_2(t) \rangle) \rangle \\
 &= \langle S_1(t) S_2(t) \rangle - \langle S_1(t) \rangle \langle S_2(t) \rangle.
 \end{aligned}$$

まず、 θ^3 が0だと、系は独立であることがわかる。

したがって、 θ^3 は独立性の指標だと言える。一方、相互相関も0であれば系は独立である。したがって、相互相関も、独立性の指標だといえる。さらに、 θ^3 と相互相関の関係が単調増加の関係にあったりすると嬉しい。簡単な計算を行なうとこれは証明できて、相互相関が大きくなれば、 θ^3 も大きくなることが知られている⁶⁾。つぎに、時間差が τ ある場合の相互相関と θ^3 の関係について考える。 θ^3 に関して言えば、時刻が τ だけずれた二つの確率分布について対数線形モデルを定義してやれば全く同じ方法で時刻が τ ずれた場合の θ^3 を求めることができる。時間差のある相互相関も前回と同様の方法で求めることができ、これも単調増加な関係にある。

4. スパイクの統計量の計算の限界

対数線形モデルを N ニューロンの場合に適用するとどうなるか? 例えば10個のニューロンが同時測定できたとする。これを対数線形モデルでパラメータ推定を試みることを考える。 $2^{10} - 1$ 個のパラメータを決めなければならない。しかし、サンプルは1000ビンぐらいしかないだろう。これでは解析に困る。このように、系の自由度は、ニューロン10個ですら1023個であり、このように大量のパラメータを推定することは困難である。そこで、相関構造の一様性を仮定することが試みられている²⁾。相関構造の一様性とは、 $\theta_{i_1 i_2}^{(k)}, \dots, \theta_{i_{k-1} i_k}^{(k)}$ は i に依存せず、 $\theta_{i_1 i_2}^{(k)}, \dots, \theta_{i_{k-1} i_k}^{(k)} = \theta^{(k)}$ と書けるということである。すると、パラメータの個数は1023個から10個に落ちる。

ここで、以下のような問題を考えてみる⁴⁾。我々がスパイククラスターを生成する確率モデルを作り、それを用いて人工的にスパイククラスターを作る。つまり、我々はスパイククラスターを生成した真の確率モデルのパラメータを全て知っているとする。その上で、この確率モデルよりつくられたスパイククラスターのみから、対数線形モデルを用いてパラメータ θ を推定することを考えてみる。ニューラルネットワークの学習を理論的に取り扱う際に用いられている、“教師-生徒の定式化”と同じ枠組でスパイク統計を議論する。かなり人工的な枠組であるが、この枠組ですらうまくいかなければ、本物のニューロンデータでうまくいくはずが無い。この条件で、素子数無限大の熱力学的極限($N \rightarrow \infty$)を考える。

まず最初に、仮定した確率モデルからどういうスパイククラスターが生成されるかを議論することができる。ここでは、その詳細ははぶく。つぎに、この対数線形モデルから人工的なスパイククラスターをつくり、

そのスパイククラスターだけを見て相関 θ を推定することを考える。相関の次数が2までの場合を議論し、相関は $\theta_1=0.5$, $\theta_2=0.2/N$ を用いた。ここで $\theta_2=O(1/N)$ にしたのは熱力学的極限をとるためである。このパラメータでスパイククラスターを生成した。その後、相互作用を推定したところ、推定結果されたパラメータは一意には決まらないことがわかった。理論的には θ_1 と θ_2/N 平面上の直線上に推定値が存在することを示すことができる。これらの知見から、全く同じスパイククラスターを使って、全く同じ一様性の仮定をしても、計算の初期状態に依存して異なる答が出てくることが起こることが予測される。これは全くのアーチファクトなので、実際に自分のデータを対数線形モデルで取り扱う際には十分注意することが必要である。

5. スパイクの統計量の計算のまとめとニューラルネットワークモデルの推定

ここまでの議論をまとめる。スパイクを統計的に取り扱う出発点は自由度の大きな同時確率分布を取り扱うことである。しかし、現状の実験技術から考えると大きな自由度を持つパラメータを決めるほどのサンプル数を稼ぐことができない。そのため、何らかの拘束条件を導入する必要がある。そのようにして求められた統計量の代表的なものとして、自己相関関数や相互相関関数がある。どのような拘束条件を導入するかは、研究者の腕にかかっており、導入する時点で望ましくない仮定を導入する可能性は否めない。次に、より具体的に対数線形モデルでスパイクの統計量を計算することを議論した。対数線形モデルで2次の相関をあらわす θ^3 は、1次の相関を表す $\langle S_1 \rangle$ や $\langle S_2 \rangle$ と情報幾何の立場からは直交関係にある。 θ^3 は従来用いられている相互相関関数と単調増加の関係にある。このように少数自由度では望ましい性質を持つ対数線形モデルであるが、観測するニューロン数が増加するに従い、必要なサンプルが $\exp$ で増加するので、そのままの形では多ニューロン系に適用することは難しい。そこですでに提案されている相関構造の一様性の仮定を用いると、ニューロン数無限大の極限で相関をあらわす θ が不定になることがわかった。この知見は単なる机上の空論ではなく、実際の実験で全く同じスパイククラスターを使っても、計算の初期状態に依存して異なる答が出てくることが意味する。実際の実験データの解析データに用いる場合は、少なくとも初期値を覚えて何度か数値計算をする必要がある。

以上述べたように、スパイクの統計解析は実際のニューラルネットワークの構造がわからなくても、つま

りモデルフリーで行なえる利点があるが、その分だけの弱点を持つ。今の実験の現状ではモデルフリーで研究を進めるのは不可能である。そのためには、典型的なニューラルネットワークモデルについて、そのモデルのニューロンが生成するスパイクの統計量がどのような性質を持つかを理論的に深く理解しておく必要がある。

最後に理論的な現状について簡単に紹介しておく、0-1ニューロンであるマカロピッツ型ニューロンから構成されるニューラルネットワークモデルでは、ニューロンの動作方程式から決まるマスター方程式と呼ばれるニューロンの同時確率分布が従う方程式を形式的に書き下すことができる⁷⁾。さらにその方程式からニューロンの相関をどのように計算すれば良いかも形式的にはわかっている。しかし、マスター方程式はニューロンの個数 N に対して、 2^N-1 の自由度を持つので、実際的に取り扱うのは難しい。その困難を避ける方法には二つあって、一つは系を少数自由度にする方法と、シナプス結合に統計性を導入して系を統計力学的に取り扱うことである。TatsunoとOkada は系を少数自由度に制限し、3体の相関まで厳密に計算した⁶⁾。さらにその系からスパイククラスターを生成し、そのスパイククラスターから対数線形モデルのパラメータ θ を推定した場合、どのような値が得られるかを解析的に求め、 θ とネットワーク構造を決めるシナプス加重の関係を求めた。最後に、GinzburgとSompolskyによる、系を統計力学的に取り扱う手法を簡単に紹介する⁷⁾。彼女らは興奮性ニューロンと抑制性ニューロンから構成されているモデルを議論した。抑制性ニューロン集団への入力、興奮性ニューロンの平均発火率に相当する。興奮性ニューロンの平均発火率がある程度大きくなると、抑制性ニューロンが発火する傾向が強くなり、興奮性ニューロンに抑制性信号を送る。その結果、興奮性ニューロンの発火率が、ある一定値に制御される。このように抑制性ニューロンへの入力、興奮性と抑制性でバランスしている、このようなネットワークをバランスネットワークと呼ぶ。スパース結合を導入しており、ここのニューロンがつながっているか否かは確率的に決まる。その結果、例えば興奮性ニューロンと興奮性ニューロンのペアーの中に、両側結合したものと、片側結合したものと、さらに結合していない三種類のペアーが存在する。計算の結果、結合が無い場合にも相互相関は0にはならない。これは直接的に結合していなくても間接的には相互作用しているからである。相関関数 $C(\tau)$ はニューロン間の直接的な結合のあるなしにも依存し、さらに時

間 τ にも複雑に依存する。ここから、モデルがなければ、実験結果が何を意味するのかわからないことがわかる。少なくとも、この系を理解するには、単なる統計量だけではあまり理解がすすまず、モデルの理論的な結果というフィルターを通すことで、いろいろなことが想像されることが理解できると思う。

参 考 文 献

- 1) Amari, S. (2001) : Information geometry on hierarchy of probability distributions, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 47, pp. 1701–1711
- 2) Nakahara, H. and Amari, S. (2002) : Information geometric measure for neural spikes, Neural Computation, Vol. 14, pp. 2269–2316
- 3) Nakahara, H., Amari, S., Tatsuno, M., Kang, S. and Kobayashi, K. (2002) : Examples of applications of information geometric measure to neural data, RIKEN BSI BSIS Technical Report, No. 02-2
- 4) 和田浩司, 岡田真人 (2002) : 対数線形モデルを用いたスパイク解析手法の統計力学, 電子情報通信学会和文論文誌 (D-II), Vol. J85-D-II, pp. 1582–1590
- 5) 龍野正実 (2003) : 情報幾何によるスパイク・データ解析, 日本神経回路学会論文誌, Vol. 10, pp. 90–98
- 6) Tatsuno, M. and Okada, M., Investigation of possible neural architectures underlying information-geometric measures, to be published Neural Computation
Tatsuno, M. and Okada, M. (2002) : Possible neural mechanisms underlying information-geometric measure parameters, Society for Neuroscience Abstracts, 28, 675.15
Tatsuno, M. and Okada, M. (2003) : How does the information-geometric measure depend on underlying neural mechanisms ?, Neurocomputing, Vol. 52–54, pp. 649–654
- 7) Ginzburg, I. and Sompolinsky, H. (1994) : Theory of correlations in stochastic neural networks, Physical Review E, Vol. 50, pp. 3171–3191