解 説

リンク可塑性に基づくネットワーク構造の秩序化

青 木 高 明

香川大学教育学部*

Organization of Adaptive Networks as a Dynamical System

Takaaki Aoki

Faculty of Education, Kagawa University*

概要

神経ネットワークは、シナプス可塑性により神経活動に応じてネットワーク構造が変化していく。また同時にネットワーク構造が変化することで、神経活動自体も変化していく。このように相互作用関係自体が動的に変化していく系を理解するための基礎モデルとして、振動子結合系とネットワーク上の拡散過程という2つのモデルを取りあげ、可塑性に基づくネットワーク構造の秩序化過程を力学系として解析する。

1. は じ め に

今日、ネットワークという言葉は理工学・生物学・社会学など学際的に広く利用され注目を集めている。例えば、複雑に繋がった大規模な通信網・交通網やスマートグリッド、あるいはソーシャルネットワーキングサービス、あるいは生体内代謝反応経路や神経回路網など、自由度の高い多様な相互作用関係を指してネットワークと称され、繋がりという点に注目してシステムを理解する試みが為されている。また学術界のみならず、日常的にもネットワークという言葉は多々利用されており、現代社会を象徴するキーワードとなっている。このようなネットワークの際だった特徴は、結合形態の複雑性のみならず、状況に応じて時々刻々と変化する点にある。従来研究では複雑な結合形態の解析が主として注目され、動的変化の側面については理解が進んでいない。動的に変化するネットワークの性質を理解するためには、ネットワーク上のダイナミクスとの関わりを知る必要がある。なぜなら、ネットワーク上のダイナミクスとネットワークの動的変化は相互依存関係にあるためである。特に神経ネットワークにおいては、シナプス可塑性によって神経活動に応じて、ネットワーク構造が変化していく一方、同時にネットワークの構造的変化は、集団ダイナミクスとしての神経活動の変化を促していく。このように、ネットワークの構造自体の変化とダイナミクスの変化は、相互に

依存した関係になっている。そのため、両者の相互作用を理解することが必要である。

これに対してネットワークに関する先行研究では、大別して2つの研究の流れがある。一つはネットワーク構造に関する研究である。その研究成果により、現実のネットワークがランダムではなく普遍的な統計的構造を持つことが明らかになっている^{1,2)}。しかし構造解析に際してネットワークはグラフとして単純化され、繋がりが持つ相互作用関係という側面が省略される。そのためネットワークの時間変化を扱うことはあっても、通信や交通・情報伝播などといったダイナミクスとの関係性・機能性が見えてこない。一方、もう一つの研究の流れとしてネットワーク上の結合力学系に関する研究が進められている。特に、ネットワークを介した感染症の拡大やうわさなどの情報拡散など、ネットワーク相互作用がダイナミクスに与える影響が調べられてきた^{3,4)}。しかしながら、従来の研究においてネットワーク構造自体は多くは静的であり、またシステムのダイナミクスと無関係な生成アルゴリズムで規定されることが大半であった。よってダイナミクスは考慮しても、ネットワークの動的変化は考慮されていない。システムのダイナミクスとネットワークの相互依存関係を理解するには不十分である。

このように動的に変化するネットワークの性質を理解するためには、新しいタイプの問題に取り組む必要がある。それはネットワークの構造自体のダイナミクスと、ネットワーク上のダイナミクスを併せて考慮して

* 〒760-8521 香川県高松市幸町 1-1

Fig. 1 Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions.

いくことである。このような取り組みは現在, Adaptive networks というキーワードで研究が進められている^{5,6)}。しかし一般に, 相互作用関係が変化する系のダイナミクスの解析は非常に困難であるため, 本質を捉えたシンプルな理論モデルの導入が必要となる。本稿では, 振動子結合系とネットワーク上の拡散過程という2つの例について, Adaptive network という視点からネットワーク構造の秩序化過程を考える。

2. 結合構造が変化する位相振動子集団ダイナミクスの解析

神経系は多数の神経細胞から成り, それらの相互作用のネットワークによって高度な情報処理機能を実現していると考えられている。このシステムの際だった特徴は, シナプス可塑性による動的に変化するネットワーク構造である。シナプス可塑性は学習・記憶など神経機能にとっての基盤であり, ネットワーク構造の機能性と密接に関係している。そのため神経科学ではシナプス可塑性について多くの研究が為されてきた^{7,8)}。とりわけ1シナプスレベルについて, Spike-Timing-dependent plasticity が発見されたことを切っ掛けに, 多くの実験的・理論的研究が進められている⁹⁻¹¹⁾。しかし1シナプスレベルでの可塑性に対する研究の発展と比較して, 集団レベルでの可塑性の研究, すなわちネットワークとして可塑性がどのように働くのかと

いう問題については, 未だ未解明な点が多い。この問題を難しくしているのは, 神経細胞間の相互作用関係が, 適応的に変化する点である。このような可塑性な結合を持つネットワーク力学系を理解するため, 位相振動子系をベースに以下のようなトイモデルを考え, その力学系の特性を理解したい (Fig. 1)。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_j k_{ij} \Gamma(\phi_i - \phi_j) \quad (1)$$

$$\frac{dk_{ij}}{dt} = \epsilon \Lambda(\phi_i - \phi_j), \quad |k_{ij}| \leq 1. \quad (2)$$

これは振動子の状態量である位相 ϕ_i の発展方程式と, 振動子間の結合 k_{ij} の発展方程式から成る力学系である。ここで周期関数 Γ , Λ は, それぞれ振動子間の結合関数, 並びに結合変化ルールを規定する学習関数である。 ϵ は結合変化の時間スケールを規定する。以下では $\epsilon \ll 1$ として, 振動子のダイナミクスと比較して十分にゆっくりと結合が変化すると仮定する。また条件式 $|k_{ij}| \leq 1$ は値域 $[-1, 1]$ に結合強度 k_{ij} が制限されることを意味している。

ここで特に, 周期関数 Γ , Λ が最小フーリエモードのみで規定される場合, モデル方程式は以下のように記述される。

Fig. 2 Phase diagram of the dynamical system defined by equation (3). Three types of asymptotic states are observed: two-cluster (Tw), coherent (Co), and chaotic (Ch).

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_j k_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{dk_{ij}}{dt} &= -\epsilon \sin(\phi_i - \phi_j + \beta), \quad |k_{ij}| \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

このとき系は2つのコントロールパラメータ α , β によって規定される。 α は振動子間結合の伝達に伴う位相遅れを意味する。また β は、結合変化のルールを規定するパラメータとなり、 β を $[-\pi, \pi]$ の領域で変化させることで、系統的に結合変化ルールの性質を変えることができる。これよりコントロールパラメータ (α, β) 空間全域で方程式 (3) の構造安定解を分析することで、ネットワーク構造の自己組織化過程を、特定の結合変化ルールに依存することなく、系統的に調べることが可能である。

パラメータ領域 (α, β) 全体において、位相と結合が共に発展するネットワークダイナミクスが示す挙動を分析した結果を Fig. 2 に示す。秩序相として、離散的なクラスタ状態に収束する解 (two-cluster state) と連続的な位相関係を保持する解 (coherent state) の2つがあり、また無秩序相としてのカオス解を持つ。これらの3状態のみを構造安定解として持つことが、これまでの研究成果としてわかっている¹²⁻¹⁵⁾。解の安定性に関する詳細は、論文を参照されたい^{12, 13)}。

これら3相の中で、Adaptive networks として特に興味深いのはカオス解である。神経細胞として素子のダイナミクスと、可塑性によるネットワークのダイナミクスの2つを持つ系において、それらのタイムスケール比は、重要なファクターである。これはタイムスケールが十分に分離されているときには、片方のダイナミ

Fig. 3 (a) Phase portraits of the system in the (k_{12}, k_{21}) -plane obtained using an adiabatic approximation in the chaotic state. $\beta = 0.7\pi$ and $\alpha = 0.1\pi$. (b) A trajectory in the chaotic state of the two-oscillator system, with $\alpha = 0.05\pi$, $\beta = 0.65\pi$, and $\epsilon = 0.005$.

クスに縮約することが可能となるためである。上記のモデルにおいても、結合強度の時間変化を規定するパラメータ ϵ について、 $\epsilon \ll 1$ として扱っている。以下、例として2素子系を考える。系は位相差 $\Delta\phi$ 、双方向結合 k_{12} , k_{21} の3つの力学変数から成る。

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi}{dt} &= -k_{12} \sin(\Delta\phi + \alpha) + k_{21} \sin(-\Delta\phi + \alpha), \\ \frac{dk_{12}}{dt} &= -\epsilon \sin(\Delta\phi + \beta), \\ \frac{dk_{21}}{dt} &= -\epsilon \sin(-\Delta\phi + \beta). \end{aligned} \quad (4)$$

このとき $\epsilon \ll 1$ として、断熱近似を行うと

$$\begin{aligned} \frac{dk_{12}}{dt} &= -\epsilon \sin(\Delta\phi^*(k_{12}, k_{21}) + \beta), \\ \frac{dk_{21}}{dt} &= -\epsilon \sin(-\Delta\phi^*(k_{12}, k_{21}) + \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

として、結合強度 k_{12} , k_{21} のみの方程式が導かれる。このような議論により Adaptive networks の研究においては、タイムスケールが分離できないパラメータ領域こそが nontrivial な結果が起こるとして、通常は注目されている。

カオス解においては、上記のタイムスケールの分離が自発的に崩壊する。方程式 (5) は、カオス解が生じるパラメータ領域では、 $k_{12} = k_{21} = 0$ に1つ安定固定点を持つ (Fig. 3(a))。そのため系は時間発展により $k_{12}, k_{21} \rightarrow 0$ に近づくが、その結果として $\Delta\phi$ と k_{12} , k_{21} のタイムスケールが同程度になる。このとき、断熱近似をしない元の力学系 (4) はカオス解を示す (Fig. 3(b))。これは系の自己組織化によって、自発的にタイムスケールの分離が破れる事例として興味深い結果である。

3. リソース拡散過程とネットワーク変化

前節の位相振動子系はノード状態としてタイミングを記述するモデルである。次はノード状態として量を扱うモデルの例として、ネットワーク上の拡散過程を取りあげる。拡散過程はネットワーク上のトラフィック、情報伝播、感染症拡大等のモデルとして基礎的なダイナミクスであり、ネットワーク可塑性を考察する上で有益であろう。

以下、モデルを記述する。まずはネットワーク上のダイナミクスとしてリソースのダイナミクスを導入し、その後リソースに依存したネットワーク自体のダイナミクスを導入する。 N ノードからなるネットワークについて、各ノード上の状態量としてリソース量 $x_i(t)$ を定義する。このリソースはネットワーク上の状態量、例えば分子量、人口数、資金、データパケット量、アクセス数などを抽象化した量である。ネットワークは隣接行列 a_{ij} によって定義される。このネットワークは無向な重み付きネットワークであり、 $a_{ij} = 1$ なるリンクについて重み $w_{ij}(t)$ を定義する。まずは、この重み付きネットワークにおいて、リソースのダイナミクスとして単純な拡散過程を導入する。この拡散過程は非常に多数のランダムウォーカーが集まった運動として、以下のようにモデル化することができる。

$$x_i(t+1) - x_i(t) = F(x_i(t)) + D \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\frac{w_{ij}(t)}{s_j(t)} x_j(t) - \frac{w_{ji}(t)}{s_i(t)} x_i(t) \right]. \quad (6)$$

ここでパラメータ D は拡散係数であり、 $\mathcal{N}_i$ はノード i に接続しているノードの集合である。上式の第2項、第3項は、それぞれ他のノードからのリソース流入、流出を表現している。また第1項 $F(x)$ は、ノード内部における反応項である。本稿では $F(x)$ として、単純な散逸と外部流入を考える。すなわち、

$$F(x) = I - \kappa x$$

とする。ここでパラメータ κ は散逸定数、 I は外部からのリソース流入量である。ネットワーク上の拡散がない場合、リソースは $\frac{dx_i(t)}{dt} = F(x_i(t))$ に従い、各ノードは $x_i = I/\kappa$ に収束するのみである。ここでは一般性を失わず、 $I = \kappa$ とする。なおリソースの総量 $\sum_i x_i(t)$ については、ネットワーク構造に依らず $\sum_i x_i(t) \rightarrow N$ ($t \rightarrow \infty$) となる。以下、初期状態として $\sum_i x_i(t) = N$ を課す。このとき、上記のリソースダイナミクスは Pagerank の逐次解法と同等である。

そのため、リソース $x_i(t)$ の収束値は上記ネットワークにおける各ノードの Pagerank となる。

次に、ネットワークのダイナミクスを導入する。単純化のためここではネットワークのダイナミクスとして、ノード間相互作用の結合強度の時間変化を考える。すなわち、ネットワークの隣接行列 a_{ij} は時間不変として、リンク強度 $w_{ij}(t)$ のダイナミクスをリソースの関数として定義する。ネットワークのダイナミクスが自律分散的に動いているとして、局所的な情報のみに依存しているとする。するとリンク強度 $w_{ij}(t)$ はそのリンク両端のノードにおけるリソース量 $x_i(t)$, $x_j(t)$ の関数として変化することになる。ここでは質量作用の法則と同様の形で、単純にそれぞれに線形に依存する緩和過程として、以下の通り定義する。

$$w_{ij}(t+1) - w_{ij}(t) = \epsilon [x_i(t)x_j(t) - w_{ij}(t)]. \quad (7)$$

ここでパラメータ ϵ は緩和過程の時間スケールをコントロールする。これはヘブ学習的なルールとなっており、リソース量が多いノード間リンクについて、増強を行う学習ルールとして解釈できる。

以上の方程式をまとめることで、最終的にモデルが定義される。このモデルは、パラメータとして拡散係数 D 、散逸係数 κ 、緩和の時定数 ϵ^{-1} の3つのパラメータによって規定される。

方程式 (6), (7) で記述されるモデルの定型的な振る舞いを示す。Fig. 4 は、各時刻毎にネットワークの状態を表示したものである。リソース量 $x_i(t)$ をノードのサイズで表現し、リンク強度 $w_{ij}(t)$ をリンクの太さで表現している。ネットワークは 64 ノードからなる小規模ネットワークであり、結合形態は次数 5 の regular random graph によって生成されている。各ノードの初期リソース量並びにリンク強度はほぼ一様として、平均 1.0、標準偏差 0.1 のガウス分布から値を決めている。その他のパラメータについては、以下の通りである： $\epsilon = 0.01$, $\kappa = 0.05$, $D = 0.35$ 。

時刻 $t \in [0, 2000]$ にて、リソースは少数のノードに集中していき、同時にネットワークのリンク強度についても、リソースが豊富なノードの周囲が増強される。言い換えれば、リソース量とリンク強度についてのハブが形成されている。次に時刻 $t = 4000$ までの期間に、ネットワーク下部に位置するノードについても別のハブが形成されている。その後、この両者を結ぶパスが増強されていく ($t = 6000$)。その結果として、リソース分布に大きな変化が生じる。これまでハブであったノードがリソースを失い、周囲のリンク強度も減弱し

Fig. 4 Typical microscopic network dynamics in a small network.

Fig. 5 (a,b) The cumulative distributions of the quantity of the resource, x_i and the weights, w_{ij} , converge to power-law forms. (c) Time developments of the resource quantities for several selected nodes.

ていく。その一方で、パス上に新しいハブが生成されている ($t = 8000$)。このようなハブの新旧の入れ替えは、その後の時刻でも継続的に起きる。まとめると、リソース分布はネットワーク上で大きな偏りを持って集中する一方で、その分配関係は固定ではなく持続的に変化し続けている状況が確認された。

次に大規模なネットワークについて、リソース分布の統計的性質を確認する (Fig. 5)。ネットワーク構造は Erdős-Rényi random graph で生成され、ノード数

$N = 16384$ 、平均次数 $\langle k \rangle = 10$ である。その他のパラメータは以下の通りである： $\kappa = 0.05$ 、 $D = 0.34$ 、 $\epsilon = 0.01$ 。Fig. 5 は、リソース分布、リンク強度分布について累積密度分布を表示している。図が示すように、いずれの分布においてもべき的であり、非常に Heterogenous なネットワークが形成されていることが分かる。特にリソース分布については、そのべき指数はほぼ -1 となっている。これは、Zipf 則として知られる経験則と整合している。このとき、ミクロスコピックレベルで各ノードのリソース量がどれだけ変化していくのかを確認する。Fig. 5(c) は、いくつかのノードについてリソース量の時間変化を示している。このときマクロスコピックレベルでは、リソースは分布として Fig. 5(a) にみる形状に収束して変化しない。しかし各ノードのリソース量については、時間と共に変化し、かつリソース量の順位についても時折入れ替わりが生じていることが確認できる。

次にパラメータ依存性を確認する。Fig. 6 は、拡散係数 D と散逸係数 κ について、リソース分布の依存性を表示している。図中には、カラー領域とホワイト領域がある。カラー領域では、リソースはべき分布となっており、そのべき指数をカラーバーで表示している。またホワイト領域では、リソース分布はべき則には従わない。それよりもガウス分布に近い形に収束する。拡散係数 D が小さいときはリソースはノード間でほぼ均一に分布している状態である。拡散係数 D が大きくなり、ノード間のリソース流入・流出が大きくなるにつれ、あるクリティカルを越える。この結果リソース分布はべき分布となり、ノード間で非常に格差

Fig. 6 Dependence of the exponent of the probability density distribution of the resource and the weight on the decay constant, κ , and the diffusion constant, D .

のある状態に遷移する。すなわち転移があり、中間層は存在しないことが分かる。

以上の結果において、べき分布が生じるパラメータ領域ではマクロスコピックレベルではリソース分布は定常状態として変化しない。その一方で、ミクロスコピックレベルでは各ノードのリソース量は常に変化している。このような動的なネットワーク構造は、実ネットワークでも報告されている^{16, 17)}。方程式 (6), (7) に定義される本モデルは、力学モデルであり決定論的である。どのような運動が、ミクロスコピックに変化するネットワーク構造をもたらしているのか。候補としては、3つ挙げられる。1つは非常に緩和が遅い固定点への収束である。本モデルは大自由度の力学系である。そのため固定点の緩和が遅く、その過程において不規則な運動が見られる可能性がある。この場合、最終的にはミクロスコピックにも一定の状態に収束する。2つめは長周期の limit cycle 解である。固定点と異なり一定状態に収束しないが、その周期が長いので見かけ上不規則に変動し続けるように見える可能性がある。最後はカオス解であり、真に不規則な運動が安定である可能性である。これらの可能性を判別するために、比較的少数ノードのネットワークについて、その最大 Lyapunov 指数を調べた (Fig. 7)。結果的に、3つのケースすべてが観察された。3つのケースにおいて、異なるのは初期値 ($x_i(0)$, $w_{ij}(0)$) のみである。すなわち系は多安定系であり、初期状態に応じて、固定点、

Fig. 7 Three types of microscopic behaviors seen in the case of a small-sized network ($N = 512$, $k = 5$, $\kappa = 0.05$, $D = 0.4$, and $\epsilon = 0.01$). (a) Fixed point with a long relaxation time. (b) Limit-cycle oscillation with a long periodic time. (c) Chaotic state. Graphs in the left column depict the total displacement rate given by $|\mathbf{z}(t+1) - \mathbf{z}(t)|$, where $\mathbf{z}(t) = \{x_i(t), w_{ij}(t)\}$, where λ is the maximum Lyapunov exponent. Graph in the right column shows the time development of the resource at several nodes.

limit cycle 解, カオス解のいずれかに収束することが確認できた。これらの解の割合等に関しては、論文を参照されたい^{18, 19)}。

4. おわりに

複雑なネットワークの動的理解を進めるため、本研究では、振動子結合系とネットワーク上の拡散過程という2つのモデルを取りあげ、可塑性に基づくネットワーク構造の秩序化過程について解説を行った。特に本稿では Adaptive networks という視点からネットワーク構造の秩序化過程を見ることで、ダイナミクスと連動した構造形成について議論を試みた。

ネットワーク科学が誕生して10年以上たち、社会データに連動した研究や統計的モデル解析については大きな発展がある一方で、現実のネットワーク構造が持つ機能的側面については未だ不明な点が多い。神経

系は、神経細胞集団が繋がることで情報処理機能を実現しているネットワークであり、その研究上の価値は極めて高いといえる。とりわけシナプス可塑性によるネットワーク構造の秩序化については、これまでの長年の研究と共に、改めて検討されるべき課題である。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 (24740266, 24120708) の助成を受けたものです。ここで解説した研究は青柳富誌生氏 (京都大学) との共同研究であり、増田直紀氏 (Bristol 大), 高口太郎氏 (国立情報学研究所) を始めとする多くの研究者との議論によって進めることができました。改めて感謝申し上げます。最後に、本稿を執筆する機会を与えて下さいました神経回路学会誌編集委員の三浦佳二氏 (東北大学) に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Albert, R. and Barabasi, A. (2002): Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74, 1, pp.47–97.
- 2) Newman, M. (2003): The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45, 2, pp.167–256.
- 3) Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., and Hwang, D.-U. (2006): Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424, 4–5, pp.175–308.
- 4) Barrat, A., Barthélemy, M., and Vespignani, A. (2008): *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press.
- 5) Gross, T. and Blasius, B. (2008): Adaptive coevolutionary networks: a review. *J. R. Soc. Interface*, 5, 20, pp.259–271.
- 6) Sayama, H., Pestov, I., Schmidt, J., Bush, B.J., Wong, C., Yamanoi, J., and Gross, T. (2013): Modeling complex systems with adaptive networks. *Computers & Mathematics with Applications*, 65, 10, pp.1645–1664. Grasping Complexity.
- 7) Hebb, D.O. (1949): *The Organization of Behavior*. Wiley, New York.
- 8) Shepherd, G. (2004): *The Synaptic Organization of the Brain*. Oxford University Press, USA. ISBN 9780195159561.
- 9) Markram, H., Lübke, J., Frotscher, M., and Sakmann, B. (1997): Regulation of synaptic efficacy by coincidence of postsynaptic apss and epsps. *Science*, 275, 5297, pp.213–215.
- 10) Bi, G.Q. and Poo, M.M. (1998): Synaptic modifications in cultured hippocampal neurons: dependence on spike timing, synaptic strength, and postsynaptic cell type. *J. Neurosci.*, 18, pp.10464–10472.
- 11) Caporale, N. and Dan, Y. (2008): Spike timing-dependent plasticity: A hebbian learning rule. *Annual Review of Neuroscience*, 31, 1, pp.25–46.
- 12) Aoki, T. and Aoyagi, T. (2009): Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 102, p.034101.
- 13) Aoki, T. and Aoyagi, T. (2011): Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions. *Phys. Rev. E*, 84, p.066109.
- 14) Aoki, T. (2014): Self-organization of a recurrent network under ongoing synaptic plasticity. *Neural Networks*. In press.
- 15) Miura, K. and Aoki, T. (2014): Hodge–Kodaira decomposition of evolving neural networks. *Neural Networks*. In press.
- 16) Batty, M. (2006): Rank clocks. *Nature*, 444, 7119, pp.592–596.
- 17) Gautreau, A., Barrat, A., and Barthélemy, M. (2009): Microdynamics in stationary complex networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106, 22, pp.8847–8852.
- 18) Aoki, T. and Aoyagi, T. (2012): Scale-free structures emerging from co-evolution of a network and the distribution of a diffusive resource on it. *Phys. Rev. Lett.*, 109, p.208702.
- 19) Aoki, T., Yawata, K., and Aoyagi, T. (2014): Self-organization of complex networks as a dynamical system. In preparation.