研究論文

連想記憶の想起過程における内部電位の確率密度^{*1}

小山 英之, 藤江 徳雄, 松本 啓吾, 大島 裕子

大阪府立大学工学部^{*2}

Probability Density of the Inner Potential in the Recalling Process of Associative Memory

Hideyuki Koyama, Norio Fujie, Keigo Matsumoto and Hiroko Oshima

Faculty of Engineering, Osaka Prefecture University^{*2}

Recalling process of associative memory on the Little-Hopfield model is formulated based on an assumption that distortions of probability density of the inner potential from normal distribution are caused by self-correlations. The overlap(direction cosine) is formulated as an expected value of output function in terms of a pseudo Gaussian probability density. It is shown that the probability density as well as the overlap is in good agreement with simulations for various output functions including a non-monotone function.

1. はじめに

Little-Hopfieldモデルに基づく連想記憶の想起過程は、これまで多くの人たちによって研究されてきた^{1, 2)}。しかし、その厳密な解が得られているかどうかは必ずしも明らかでない。Gardner-Derrida-Mottishawによるオーバーラップ(方向余弦)の定式³⁾を最後まで詰めた結果がKoyama等によって得られており、シミュレーションと非常によく合うことが示されている⁴⁾。しかし、オーバーラップは記憶の想起過程を特徴づける量であるとはいえ、システムに関するひとつの平均量であるため、それだけを見て厳密な解が得られたとは必ずしも言えない。やはり、システムを微細に特徴づける内部電位の確率分布を求めて、それをシミュレーションと比較する必要がある。

この論文では、ひとつの単純な仮定に基づいて、記憶の想起過程の一般的な解を内部電位の確率密度を用いて定式化する。その仮定とは、「第 i ニューロンの内部電位の確率分布が正規分布からずれる要因は、第 i ニューロンの現在と過去の状態間の相関(自己相関)にある」とするものである。その場合の確率密度は頭から仮定するのではなく、結果として導かれる。またこ

こで扱う出力関数は、任意の連続値をとる奇関数にまで拡張されている。

記憶の想起過程が非Markov過程であることはシミュレーション結果から明らかであるため、過去との相関を取り入れる方法がこれまで開発されてきた。例えばAmari-Maginuの場合は、Markov過程より一段過去までの相関を取り入れている¹⁾(Doobの言葉では2重Markov過程になっている)。この方法はさらにOkadaによって一般化され、任意の過去まで逐次的に自己相関を取り入れる方法が開発された⁵⁾。しかしその方法では、Amari-Maginuと同様にノイズが正規分布に従うと仮定されており、過去との自己相関も実際の計算では4段過去までに止まっている(4重Markov過程)。

それに対してここでの定式では、ノイズ(または内部電位)の分布は仮定するのではなく、結果として導かれる。また、過去からの自己相関は余すところなくすべてを自動的に取り入れるような定式になっている。

得られた内部電位の確率密度は、過去との自己相関に起因する歪を含む擬似正規分布の形になっている。その歪は想起に失敗する場合には時間が過ぎても残るが、想起に成功する場合には時間的に速やかに小さくなって正規分布に近づくことで、Nishimori-Ozekiのシミュレーション結果⁶⁾を再現している。全体の結果

^{*1} 2002年3月8日受付, 8月15日受理

^{*2} 〒 599-8531 堺市学園町1番1号

は、出力関数がsgn関数の場合はGardner - Derrida - Mottishawの結果と完全に一致する。

オーバーラップと確率密度について得られた結果は、さまざまな出力関数の場合に、シミュレーションと非常によく一致していることが示される。この定式はいわゆるnon-monotone関数の場合にも適用できるが、その定式はAppendix Bで示される。

2. モ デ ル

ここで扱うのはごく普通のLittle - Hopfieldモデルである¹⁾。 n 個のニューロンを含むシステムを想定し、時刻 t における第 i ニューロンの状態を x_i^t とする。システムのメモリパターンを $\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \dots, \mathbf{s}^m$ とする。ここで成分 $s_i^q = \pm 1$ w.p. $1/2$ であり、集合 $\{s_i^q\}$ は (互いに) 独立であると仮定する。次に、それらの成分を用いて、ウエイトを

$$w_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^m s_i^q s_j^q (i \neq j), w_{ii} = 0 \quad (1)$$

(w_{ii} is non-random) と定義すると、時刻 t における第 i ニューロンの内部電位 (膜電位) は

$$u_i^t = u_i(\mathbf{x}^t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^t \quad (2)$$

と決まる。次に、システムの運動方程式を $x_i^{t+1} = f(u_i^t)$ とする。ただし出力関数 $f(x)$ は奇関数であると仮定する。 $\{w_{ij}\}$ が決まったとき、初期値 $\mathbf{x}^0$ が与えられると状態の時間的連鎖が一意的に決まる。ここで初期値の成分は $x_i^0 = \pm 1$ という値をとるものとする。

いま、ひとつのメモリパターン例えば $\mathbf{s}^1$ を選んで固定し、状態 $\mathbf{x}^t$ との近さの測度を次のように方向余弦 (オーバーラップ) $a_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^1 x_j^t$ の期待値として導入する。

$$\bar{a}_i = E[a_i] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^1 E[x_j^t] \quad (3)$$

ただし、 $E[\cdot]$ は確率変数 $\{s_j^1\}$ に関する期待値を表す。

ここで、出力関数 $f(x)$ が奇関数であることによって、 $s_j^1 = 1$ ととっても一般性を失わないことに注意しよう。なぜなら、変換 $\tilde{x}_i^t = s_i^1 x_i^t, \tilde{s}_i^q = s_i^1 s_i^q$ によってシステムは同型になるからである。したがって、以下では $\mathbf{s}^1 = \mathbf{1}$ とする。

パターン比 $r = m/n$ を固定して $n \rightarrow \infty$ の極限における方向余弦を定式化し、それを内部電位の極限分布 (確率密度) を用いて表現する (以下で $n \rightarrow \infty$ における漸近的等式を $\simeq$ で表す)。

ところで、通常は $\mathbf{s}^1$ と $\mathbf{x}^t$ との近さの測度としては期待値なしの a_i を用いている。 $n \rightarrow \infty$ では大数の法則によって $a_i \rightarrow \bar{a}_i$ となることが期待されるので、理論的な

Fig. 1 The sample paths of the overlap $a(t)$ (simulated by Monte Carlo method) and their average. Each dotted line stands for a sample path and the bold solid line the average of all samples. Where output function $f(x) = \text{sgn}(x)$ with $n=1000$, $r=0.08$, $a_0=0.3$ and number of samples = 100. Eighteen samples are not recalled.

定式では差が生じない。ところが、シミュレーションは有限の n で行うため、 a_i の場合には理論との比較にどのサンプルパス (見本過程) を採用するかが問題になる。この事情を、 $r=0.08$, $a_0=0.3$, 100サンプルの場合に Fig. 1 で示す。Fig. 1 では、100本のサンプルパスを薄い点線で、サンプル平均のパスを太い実線で示しており、サンプルパスのばらつきが分かるようにするため $n=1000$ と小さめにとっている。この論文では、期待値 $\bar{a}_i$ の理論値をサンプル平均と比較するため、比較は一意的である。

3. 内部電位の確率密度

出力関数 $f(x)$ はフーリエ変換可能な関数であると仮定し ($f(x) = \text{sgn}(x)$ の場合でも可能)、次のフーリエの定理を適用する⁷⁾。

$$f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-i\theta v + i\theta X} f(v) = I e^{i\theta X} f(v) \quad (4)$$

ただし、 $I = \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-i\theta v} \cdot$ は積分作用素である。

このフーリエの式を用いる意義は、例えば $X = u_i^t$ のように方程式の連鎖で決まる確率変数の場合でも、右辺の積分の中では、 f の中の u_i^t が連鎖を離れた非確率的な積分変数 v に置き換わり、 $X = u_i^t$ に関する依存性が $e^{i\theta u_i^t}$ というあからさまな形で現れることにある。こうして次式が成り立つ。

$$E[f(u_i^t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dv f(v) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-i\theta v} \phi_i^t(\theta) ; \quad \phi_i^t(\theta) = E[e^{i\theta u_i^t}] \quad (5)$$

$\phi_i^l(\theta_i)$ は内部電位 u_i^l の特性関数であり、そのフーリエ逆変換 $p_i^l(v_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i e^{-i\theta_i v_i} \phi_i^l(\theta_i)$ は u_i^l の確率密度となる。結局、時刻 $t+1$ における方向余弦は次式で表される。

$$a_{t+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[f(u_i^t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dv_i f(v_i) p^l(v_i) \quad (6)$$

ここで $p^l(v_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^l(v_i)$ は、内部電位のニューロン平均確率密度を表す。こうして問題は、内部電位のニューロン平均確率密度を求める問題に帰着されたが、それは内部電位の特性関数から求められることになる。

4. 内部電位の特性関数

第 i ニューロンの内部電位の特性関数 (5) は、もし過去からの相関がすべて無視できて、 $\{x_i^t\}$ を事実上非確率の変数として扱えるときは、漸近的に ($n \rightarrow \infty$ で) 正規分布の形になることが知られている。まず、このことを以下で簡潔に示そう。

式 (1), (2) より $u_i^t = a_i + w_i x_i^t + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^t s_j^t x_j^t$ と書け、

$\{s_j^t\}$ の独立性を用いると Kac の定理より

$$\phi_i^t(\theta_i) = e^{i\theta_i(a_i + w_i x_i^t)} \prod_{j=1}^n E[e^{i\theta_i s_j^t s_j^t x_j^t}] .$$

ここで、 $E[e^{i\theta_i s_j^t s_j^t x_j^t}] = E[\cos(\frac{\theta_i}{n} x_j^t) + i s_j^t s_j^t \sin(\frac{\theta_i}{n} x_j^t)] = \cos(\frac{\theta_i}{n} x_j^t)$ となるので、最後の因子は

$(\cos(\frac{\theta_i}{n} x_j^t))^{(n-1)(m-1)}$ となる。 $\cos(\cdot)$ をテーラー展開し、

収束に関する定理を用いると漸近的に、

$$\phi_i^t(\theta_i) = \exp\{i\theta_i(a_i + w_i x_i^t) - \frac{1}{2}\theta_i^2 V\}, V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^t)^2$$

となって正規分布の特性関数が得られる。

逆に、正規分布からのずれは過去からの相関によって引き起こされるのであるが、その相関は自己相関に限ると仮定しよう。事実、第 3 ステップまでの厳密解では、確かに自己相関だけが効くような形になっていることが示されているので^{*)}、ここではその性質を一般化して仮定するのである。また、このような考えは事実上 Okada の場合にも導入されており、 $Q_{i,\tau} = E[x_i^t x_i^\tau]$ が時刻 t と τ における第 i ニューロン間の自己相関を表している^{*)}。

この仮定に立てば、第 i ニューロンの時刻 t における状態 x_i^t に相関をもたらすのは、過去のすべての同じ第 i ニューロンの状態 $x_i^\tau = f(u_i^{\tau-1})$ ($\tau = t-1, \dots, 1$) だということになる。そして、これらの状態は初期値

から運動方程式によって次々と確率的に決まる状態連鎖の中に埋め込まれており、その法則的連鎖のゆえに異なる時間の状態間の相関が生み出されるのだと考えられる。そこで、もしこれら第 i ニューロンの過去のすべての状態または対応する内部電位を事実上運動方程式の連鎖からはずしてある量に固定すれば、もはや相関的作用もなくなると考えることができる。このような考えを以下で適用しよう。

特性関数 $\phi_i^l(\theta_i)$ を決める関数 $e^{i\theta_i u_i^l}$ を過去のすべての第 i 内部電位 u_i^τ ($\tau = t-1, \dots, 0$) の関数と見なして、これに順次フーリエの定理を適用しよう。まず、 $e^{i\theta_i u_i^l}$ を u_i^{t-1} の関数と見なしてフーリエの定理 (4) を適用する。そのため、 $e^{i\theta_i u_i^l} = g(u_i^{t-1})$ と書くと、(4) より

$$g(u_i^{t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_{t-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_{t-1} e^{-i\theta_{t-1} v_{t-1} + i\theta_i u_i^{t-1}} g(v_{t-1}) \\ = I_{t-1} e^{i\theta_i u_i^{t-1}} [e^{i\theta_i u_i^{t-1}}]_{|u_i^{t-1}=v_{t-1}}$$

ゆえに、 $e^{i\theta_i u_i^l} = I_{t-1} e^{i\theta_i u_i^{t-1}} (u_i^{t-1} \rightarrow v_{t-1})$ (右辺積分の中では $x_i^t = f(v_{t-1})$) となる。最後のまとめで、式 (2) の線形性を用いた。また積分作用素を $I_t = \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_t e^{-i\theta_t v_t}$

としている。この積分作用素の中では、 $x_i^t = f(v_{t-1})$ で v_{t-1} はただの積分変数なので x_i^t は運動方程式連鎖からはずれたただの数である。

次に、 $e^{i\theta_i u_i^l} (u_i^{t-1} \rightarrow v_{t-1})$ を u_i^{t-2} の関数と見なしてフーリエの定理を適用する。このような手続きを繰り返し、最後に期待値をとると、結局特性関数として次の式が得られる。

$$\phi_i^l(\theta_i) = I_{t-1} \cdots I_0 E[e^{i\theta_i \xi_i}]; \xi_i = \sum_{\tau=0}^t \theta_i x_i^\tau$$

with $x_i^t = f(v_{t-1})$ ($\tau > 1$)

さて、この式で x_i^t ($\tau = t, \dots, 1$) はすべて運動方程式の連鎖からはずれて積分変数に固定されているので、 $u_i(\xi)$ の特性関数

$$\varphi_i(\theta_t, \dots, \theta_0) = E[e^{i\theta_i \xi_i}] \quad (7)$$

は仮定により漸近的に 1 次元正規分布の形になると考えることができる。すなわち

$$\varphi_i(\theta_t, \dots, \theta_0) = \exp\{iE[u_i(\xi)] - \frac{1}{2}V[u_i(\xi)]\} \\ (\xi = \sum_{\tau=0}^t \theta_i x_i^\tau) \quad (8)$$

この漸近的関係は、Appendix A で示すように、次の 3 つの仮定から直接導くこともできる^{*)}。

仮定 1. $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ は漸近独立。

仮定 2. $z_i^t(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j^t s_j^t \xi_j$ と定義すると、

$|Z_i^a(\xi): \alpha=1, \dots, m|$ は、過去のすべての第 i 成分 $x_i^a = (\tau=0, \dots, t-1)$ を運動方程式の連鎖からはずして固定すれば漸近独立。

仮定 3. 各添え字について $E[s_{i1}^a \dots s_{i2k}^a x_{j1}^{a1} \dots x_{j\mu}^{a\mu}] = O(\frac{1}{n^k})$.

同時に、これらの仮定から $u_i(\xi)$ の平均値 $E[u_i(\xi)]$ と分散 $V[u_i(\xi)]$ は次の形になる (Appendix A).

$$E[u_i(\xi)] = \sum_{\tau=0}^t \theta_{\tau} \mu_i^{\tau}, \quad V[u_i(\xi)] = \sum_{\tau_1=0}^t \sum_{\tau_2=0}^t \theta_{\tau_1} r_{\tau_1 \tau_2} \theta_{\tau_2} \quad (9)$$

$$\mu_i^t = E[u_i^t] = \bar{a}_i + w_i x_{i+1}^t + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[s_{ij}^t s_{j\mu}^t] (x_j^t = f(v_{\tau-1})) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} r_{\tau_1 \tau_2} &= E[u_i^{\tau_1} u_i^{\tau_2}] - E[u_i^{\tau_1}] E[u_i^{\tau_2}] \\ &= \frac{r}{n} \sum_j E[x_{ij}^{\tau_1} x_{j\mu}^{\tau_2}] + \frac{1}{n^2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n E[s_{ij_1}^{\tau_1} s_{j_1\mu}^{\tau_1} s_{ij_2}^{\tau_2} s_{j_2\mu}^{\tau_2} x_{j_1}^{\tau_1} x_{j_2}^{\tau_2}] \end{aligned} \quad (11)$$

ここで $r_{\tau_1 \tau_2}$ は $u_i^{\tau_1}$ と $u_i^{\tau_2}$ の共分散になっている。ここに現れている 3 つの期待値 $E[s_{ij}^{\tau} s_{j\mu}^{\tau}]$, $E[x_{j1}^{\tau} x_{j2}^{\tau}]$ および $E[s_{ij_1}^{\tau_1} s_{j_1\mu}^{\tau_1} s_{ij_2}^{\tau_2} s_{j_2\mu}^{\tau_2} x_{j_1}^{\tau_1} x_{j_2}^{\tau_2}]$ は、 $E[x_i^{\tau+1}]$ を計算したのと同様の方法で、仮定 1～3 を用いて定式化できる。まず、

$A_i^{\tau+1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[s_{ij}^{\tau} s_{j\mu}^{\tau+1}]$ とおくと、次の漸化式が成り立つ。

$$A_i^{\tau+1} = \sum_{\tau=0}^t d_{\tau}^{\tau+1} (rE[x_i^{\tau}] + A_i^{\tau}), \quad A_i^0 = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} d_{\tau}^{\tau+1} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau} f(v_{\tau}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i e^{-i\theta_i v_{\tau}} \\ &\quad I_{\tau-1} \dots I_0 i \theta_i \varphi_j(\theta_i, \dots, \theta_0) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで φ_j は (8) で与えられ、 $i\theta_i \varphi_j = \frac{\partial}{\partial a_{\tau}} \varphi_j$ が成り立つので、 $d_{\tau}^{\tau+1} = \frac{\partial \bar{a}_{\tau+1}}{\partial \bar{a}_{\tau}}$ という関係がある。それゆえ

つので、 $d_{\tau}^{\tau+1} = \frac{\partial \bar{a}_{\tau+1}}{\partial \bar{a}_{\tau}}$ という関係がある。それゆえ $d_{\tau}^{\tau+1}$ は $\bar{a}_{\tau}$ の変動を $\bar{a}_{\tau+1}$ に伝える役割をもっていると解釈できる。式 (12) より $A_i^{\tau+1}$ は $E[x_i^{\tau}]$ ($\tau=0, \dots, t$) の線形式として次のように決まる。

$$A_i^{\tau+1} = \sum_{\tau=0}^t \alpha_{\tau}^{\tau+1} E[x_i^{\tau}]; \quad \alpha_{\tau}^{\tau+1} = \sum_{\mu=\tau}^t d_{\mu}^{\mu+1} \alpha_{\mu}^{\mu} (\alpha_{\tau}^{\tau} = r \text{ for } \tau \geq 0) \quad (14)$$

この $\alpha_{\tau}^{\tau+1}$ は、時刻 τ から $t+1$ への、いろいろな中間の時刻を通る変動の総計を表すものと解釈できる。 $r_{\tau\tau}$ についても同様の関係を導き、最後に、 $x_i^0 = \pm 1$ のとき一般の関数 $F(x_i^0)$ について成り立つ関係

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_i^0) = \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1+\epsilon \bar{a}_0}{2} F(\epsilon) \text{ を用いると次の諸式が得られる。}$$

$$\bar{a}_{t+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i^{t+1}] = \int_{-\infty}^{\infty} dv_t f(v_t) p^t(v_t) \quad (15)$$

$$p^t(v_t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dv_{t-1} p^t(v_0, \dots, v_{t-1}, v_t) \quad (16)$$

$$p^t(v_0, \dots, v_t) = \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1+\epsilon \bar{a}_0}{2} p_{\epsilon}^t(v_0, \dots, v_t) \quad (17)$$

$$p_{\epsilon}^t(v_0, \dots, v_t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{t+1} |R|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_{\epsilon})^T R^{-1}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_{\epsilon})\right] \quad (18)$$

$$\mathbf{V} = (V_0, \dots, V_t), \quad \boldsymbol{\mu}_{\epsilon} = (\mu_{\epsilon}^0, \dots, \mu_{\epsilon}^t), \quad R = (r_{\mu\nu}) \quad (\mu, \nu=0, \dots, t)$$

$$\mu_{\epsilon}^t = \bar{a}_t + w_t f(v_{t-1}) + \sum_{\nu=1}^{t-1} \alpha_{\nu}^t f(v_{\nu-1}) + \alpha_0^t \epsilon \quad (\tau=0, \dots, t) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} r_{\tau\tau} &= r_{\tau\tau} = r C_{\tau\tau} + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \alpha_{\mu}^{\tau} C_{\mu\tau} + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \alpha_{\mu}^{\tau} C_{\mu\tau} + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \sum_{\nu=0}^{\tau-1} d_{\mu}^{\mu+1} r_{\mu\nu} d_{\nu}^{\nu+1} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\mu=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{\tau} \alpha_{\mu}^{\tau} C_{\mu\nu} \alpha_{\nu}^{\tau} \end{aligned} \quad (20)$$

上式最後の等式は α_{τ}^{τ} を決める式 (14) から導ける。また

$$\begin{aligned} C_{t+1, t+1} &= C_{\tau+1, t+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i^{t+1} x_i^{\tau+1}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dv_t f(v_t) f(v_{\tau}) p^{\tau\tau}(v_{\tau}, v_t) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし

$$p^{\tau\tau}(v_{\tau}, v_t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau-1} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau+1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dv_{t-1} p^t(v_0, \dots, v_t)$$

である。最後に $d_{\tau}^{\tau+1}$ は上に述べた関係 $d_{\tau}^{\tau+1} = \frac{\partial \bar{a}_{t+1}}{\partial \bar{a}_{\tau}}$ より次式で決まる。

$$\begin{aligned} d_{\tau}^{\tau+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau} f(v_{\tau}) \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 \\ &\quad \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1+\epsilon \bar{a}_0}{2} [R^{-1}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_{\epsilon})]_{\tau} p_{\epsilon}^t(v_0, \dots, v_t) \end{aligned} \quad (22)$$

平均値 μ_{ϵ}^t が、過去に関する変数 $v_{\tau-1}, \dots, v_0$ に依存しているために、 $p^t(v_t)$ は 1 次元正規分布とはならず、いわば擬正正規分布になっている。時刻 ν における「出力」 $f(v_{\nu-1})$ が伝播役の α_{ν}^{ν} を媒介にして時刻 τ における平均値 μ_{ϵ}^{τ} に寄与しており、それだけ正規分布からずれるようになっている。すなわち過去からの相関が正規分布からのずれをもたらししている。この α_{ν}^{ν} は、想起に成功する場合には事実上時間とともに急速にゼロに収束するため、この場合の確率密度は正規分布に近づいて Nishimori-Ozeki のシミュレーション結果⁶⁾ を再現するようになっている。

この定式では全体的に、不連続確率変数 $\{s_{ij}^t\}$ に関する期待値 $E[\cdot]$ が、 $n \rightarrow \infty$ の極限での連続分布に関する期待値に置き換わった形になっていることが分かる。 $f(x) = \text{sgn}(x)$ のとき、この結果は Gardner-Derrida-Mottishaw 理論³⁾ から導かれる結論と完全に一致していることが Koyama et al. によって示されている¹⁾。

5. シミュレーションとの比較

出力関数が $f(x)$ の場合の内部電位の確率密度およ

Fig. 2 The probability density $p'(x)(t=5)$ for the output function $f(x)=\text{sgn}(x)$ with $r=0.08$. The solid line represents the theoretical value according to the formula (16), and the open diamond stands for the simulated mean value by Monte Carlo method for $n=10000$ and 500 samples ($a_0=0.1, 0.3$) or $n=8000$ and 200 samples ($a_0=0.2, 0.35, 0.5$).

びオーバーラップは式 (14) ~ (22) を用いて理論的に計算できる。その結果をシミュレーションと比較することによって理論の正確さを確かめてみよう。ここでは以下の場合に内部電位の確率密度 p' とオーバーラップ $\bar{a}_i$ を調べる (Fig. 2~6)。計算量が膨大なため、 p' については $t \leq 5$ で、 $\bar{a}_i$ については $t \leq 6$ で調べた。いずれの場合も $w_i=0$ としている。

(1) 出力関数が $f(x)=\text{sgn}(x)$ の場合: $r=0.08, 0.2$ のときに、さまざまな初期値 a_0 について調べる (Fig. 2~5)。

(2) 出力関数が $f(x)=\tanh(2x)$ の場合: $r=0.08$ の場合にさまざまな初期値 a_0 について調べる (Fig. 6)。

その結果、理論とシミュレーションは非常によく一致していることが分かる。Fig. 2とFig. 4は (16) 式より決まる内部電位の確率密度を表している。 $r=0.08$ のとき、想起しない $a_0=0.1, 0.2$ の場合には明らかに分布は正規分布から歪んでいるが、想起する $a_0=0.35, 0.5$ ではほぼ正規分布となっている。想起しない $r=0.2$ の場合は、 $a_0=0.9$ のときでさえ正規分布から歪んでいる。Fig. 6では出力関数が連続値をとる場合をチェックしているがよく合っている。

ただし、 $f(x)=\text{sgn}(x)$ で $r=0.08$ 、 $a_0=0.3$ の場合にはわずかながら明らかな不一致が存在する (Fig. 2,3)。他の場合にはよく一致しているのに、なぜこの場合には不一致が見られるのだろうか。この場合の特徴は、メモリが想起に成功するサンプルパスと想起に失敗するサンプルパスが混在する領域だということである (Fig. 1参照)。恐らくそのために収束が遅く、まだ n の

Fig. 3 The overlap $\bar{a}_i(t \leq 6)$ corresponding to the probability density in Fig. 2. The solid line stands for the theoretical result and the open diamond stands for the simulation result. The asterisk stands for the 4th-order approximation result of Okada's theory.⁵⁾

漸近的領域 ($n=\infty$ と見なせる領域) に十分到達していないからだと推測される。このことをFig. 7とFig. 8でチェックしている。縦軸の示す誤差 (シミュレーション値から理論値を引いた値) が n とともに減少しており、上記推測の妥当性を示している。

Okada理論の第4次近似⁵⁾ との比較を、 $r=0.08$ の場合にFig. 3で示している。想起が早く起こる $a_0=0.5$ の場合には我々の結果とほぼ一致しているが、想起に失敗する $a_0=0.1$ と 0.2 の場合および想起の遅い $a_0=0.3$ の場合には顕著にずれている。Okada理論では、内部電位が常に正規分布に従うと仮定しているため、このようなずれ方が起こるのは当然に予測される場所であった。

Fig. 4 The probability density $p'(x)(t=5)$ for $f(x)=\text{sgn}(x)$ with $r=0.2$. The solid line stands for the theoretical value, and the open diamond the simulated mean value for $n=8000$ and 200 samples ($a_0=0.1, 0.3, 0.9$).

Fig. 6 The probability density $p'(x)(t=5)$ for $f(x)=\tanh(2x)$ with $r=0.08$. The solid line represents the theoretical value and the open diamond the simulated mean value for $n=2000$ and 2000 samples ($a_0=0.1, 0.3, 0.5$).

Fig. 5 The overlap $\bar{a}_t (t \leq 6)$ corresponding to the probability density in Fig. 4. The solid line stands for the theoretical result and the open diamond the simulation result.

6. 結 論

この論文では、出力関数が任意の奇関数の場合に、自己相関に関する簡単な仮定から内部電位確率密度の一般式を導いた。その確率密度は、過去とのすべての自己相関を含み、それに起因する歪みをもつ多次元の擬似正規分布の積分によって定式化された。オーバーラップもその分布から導かれた。それらの結果はシミュレーションとよく一致しており、部分的に存在するわずかな差も、 n がさらに大きい値のシミュレーションとの比較では消滅する傾向にあることが示された。

Fig. 7 The n -dependence of the simulation for the peak value of the probability density $p'(x)(t=5)$. The ordinate denotes the difference, simulation value minus theoretical value. Here $f(x)=\text{sgn}(x)$, $r=0.08$, $a_0=0.1, 0.3$ and the number of samples equals to 500.

Fig. 8 The n -dependence of the simulation for the overlap $\bar{a}_6$ ($t=6$) corresponding to the probability density in Fig. 7. The ordinate denotes the difference, simulation value minus theoretical value.

Appendix

A. 本文 (8) ~ (11) 式の導出

本文 (7) 式より出発し, 仮定1~3を用いて (8) ~ (11) 式を導く. $\xi = \sum_{\tau=0}^t \theta_{\tau} x^{\tau}$ で特別な第 i 成分 ξ_i はある値に固定されているとする. また s^i は固定されている. まず, $z_i^{\alpha}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{\alpha} \xi_j$ と定義すると, 仮定3より次の命題1が容易に導ける.

命題1. $E[(z_i^{\alpha})^{\mu}] = O(\frac{1}{n^{\mu}})$ (for $\alpha \neq 1, \mu = 2k-1, 2k$)
 $= O(1)$ (for $\alpha=1$)

本文式 (2) より $u_i(\xi) = w_i \xi_i + \sum_{\alpha=1}^m z_i^{\alpha}(\xi)$ と書け ($w_i \xi_i$ は non-random), 仮定2よりKacの定理が成り立つので, (7) 式の φ_i は次のようになる.

$$\varphi_i = E[e^{iu_i(\xi)}] = e^{iw_i \xi_i} E[e^{iz_i^1(\xi)}] \prod_{\alpha \neq 1} E[e^{iz_i^{\alpha}(\xi)}]$$

仮定1を用いると,

$$E[e^{iz_i^1(\xi)}] = \prod_{j \neq i} E[e^{is_j^1 \xi_j}] = \prod_{j \neq i} (1 + \frac{i}{n} s_j^1 E[\xi_j] + O(\frac{1}{n^2})) \\ = e^{i \sum_{j \neq i} s_j^1 \xi_j} = e^{i \sum_{j \neq i} E[\xi_j]} = e^{i E[\sum_{j \neq i} \xi_j]}$$

また命題1を用いると

$$\prod_{\alpha \neq 1} E[e^{iz_i^{\alpha}(\xi)}] = \prod_{\alpha \neq 1} \{1 + E[iz_i^{\alpha}(\xi)] - \frac{1}{2} E[(z_i^{\alpha}(\xi))^2] + O(\frac{1}{n^2})\} \\ = e^{i \sum_{\alpha \neq 1} E[z_i^{\alpha}(\xi)] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq 1} E[(z_i^{\alpha}(\xi))^2]}$$

となるので, $\varphi_i = e^{i E[u_i(\xi)] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq 1} E[(z_i^{\alpha}(\xi))^2]}$ となる.

他方, 仮定2を用いると

$$V[u_i(\xi)] = \sum_{\alpha=1}^m V[z_i^{\alpha}(\xi)] \quad (\because V[w_i \xi_i] = 0). \text{ また仮定1より}$$

$$V[z_i^1(\xi)] = \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i} V[s_j^1 \xi_j] = O(\frac{1}{n}). \text{ さらに,}$$

$$\sum_{\alpha \neq 1} V[z_i^{\alpha}(\xi)] = \sum_{\alpha \neq 1} \{E[(z_i^{\alpha}(\xi))^2] - (E[z_i^{\alpha}(\xi)])^2\} \\ = \sum_{\alpha \neq 1} E[(z_i^{\alpha}(\xi))^2] = \sum_{\alpha \neq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{j_1, j_2 \neq i} E[s_{j_1}^{\alpha} s_{j_2}^{\alpha} \xi_{j_1} \xi_{j_2}]$$

ただしここで命題1を用いた. 以上により, (8) 式と同時に (9) ~ (11) 式が導かれた.

B. Moritaのnon-monotone形式

ここでは本論の方法をMoritaのnon-monotone形式¹⁰⁾に適用した結果だけを記述する. 結果はやはりシミュレーションとよく一致する.

$f(x)$ を non-monotone 出力関数とする. 内部電位に関する微分方程式 $\tau_0 \frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_j w_{ij} f(u_j)$ を差分方

程式に直して解くと, $u_i^t = \sum_{\tau=0}^t \gamma_{\tau}^i v_{\tau}^i$; $v_i^t = \sum_j w_{ij} y_j^t$ ただし

$\gamma = 1 - \Delta t / \tau_0$, $\gamma_0^i = \gamma^i$, $\gamma_{\tau}^i = (1 - \gamma) \gamma^{t-\tau}$ ($\tau \neq 0$) となり, w_{ij} は式 (1) と同じにとる. 時間的发展を決める方程式は $y_i^{t+1} = f(u_i^t)$; $y_i^0 = x_i^0$ ($i = 1, \dots, n$) で, x_i^0 は初期値である. また, この出力とは別の「出力」を $x_i^{t+1} = \text{sgn}(u_i^t)$ によって定め, 次の2つのオーバーラップを定義する.

$$\bar{a}_t = \frac{1}{n} \sum_i E[y_i^t]; \bar{a}_t^{\text{out}} = \frac{1}{n} \sum_i E[x_i^t] \quad (\text{B1})$$

Morita理論では, 後者の方が通常の意味のオーバーラップに対応すると考えられている.

この場合の理論的定式は、 γ_i^t が確率変数ではないために、途中の計算が多少複雑なことを除けば、本論とまったく同様にして進めることができる。その結果、2種類のオーバーラップは次の形になる。

$$\bar{a}_{i\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_i) p^i(v_i) dv_i; \bar{a}_i^{\text{out}} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(v_i) p^i(v_i) dv_i \quad (\text{B2})$$

ここで $p^i(v_i)$ は次の3つの量を除けば本論と同じ式から計算することができる。

$$\mu_i^t = \sum_{\tau=0}^t \gamma_{\tau}^t \tilde{\mu}_i^{\tau}; \tilde{\mu}_i^{\tau} = \bar{a}_{i\tau} + \sum_{v=1}^{\tau} a_{iv}^{\tau} f(v_{v-1}) + a_{i0}^{\tau} \varepsilon \quad (\text{B3})$$

$$r_{i\tau} = \sum_{\mu=0}^t \sum_{v=0}^{\tau} \gamma_{\mu}^t \tilde{\gamma}_{\mu v}^{\tau} \gamma_v^{\tau}; \tilde{r}_{i\tau} = \tilde{\gamma}_{i\tau} = \frac{1}{\gamma} \sum_{\mu=0}^t \sum_{v=0}^{\tau} a_{\mu v}^t C_{\mu v} a_{\mu}^{\tau} \quad (\text{B4})$$

$$d_i^{t+1} = \sum_{v=\tau}^t \gamma_v^v \tilde{d}_v^{t+1} \quad (\text{B5})$$

$\tilde{d}_v^{t+1}$ は式 (21) と同じ形の式から決まる。

参 考 文 献

- 1) Amari, S. and Maginu, K. (1988) : Statistical neurodynamics of associative memory, Neural Networks, Vol. 1, pp. 63 - 73
- 2) Okada, M. (1996) : Notions of associative memory and sparse coding, Neural Networks, Vol. 9, No. 8, pp. 1429 - 1458
- 3) Gardner, E., Derrida, B. and Mottishaw, P. (1987) : Zero temperature parallel dynamics for infinite range spin glasses and neural networks, Journal de Physique, Vol. 48, pp. 741 - 755
- 4) Koyama, H., Fujie, N. and Seyama, H. (1999) : Results from the Gardner - Derrida - Mottishaw theory of associative memory, Neural Networks, Vol. 12, pp. 247 - 257
- 5) Okada, M. (1995) : A Hierarchy of macrodynamical equations for associative memory, Neural Networks, Vol. 8, No. 6, pp. 833 - 838
- 6) Nishimori, H. and Ozeki, T. (1993) : Retrieval dynamics of associative memory of Hopfield type, J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 26, pp. 859 - 871
- 7) 小山英之, 藤江徳雄, 松本啓吾, 大島裕子 (1997) : 一般の出力関数を持つ連想記憶の想起過程における内部電位の確率密度, 日本神経回路学会第8回全国大会講演論文集, pp. 228 - 229
- 8) Koyama, H., Fujie, N. and Fujiwara, T. (1996) : Analysis of the recalling process of associative memory by an integral representation of the sign function, Neural Networks, Vol. 9, pp. 737 - 746
- 9) 小山英之, 藤江徳雄, 瀬山弘至 (1995) : ある漸近的独立性の仮定に基づく連想記憶の想起過程の一般解, 日本神経回路学会第6回全国大会講演論文集, pp. 36 - 37
- 10) Morita, M. (1993) : Associative memory with non-monotone dynamics, Neural Networks, Vol. 6, pp. 115 - 126