有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析

Non-axisymmetric Bifurcation Analysis in a Hollow Circular Cylinder of a Non-coaxial Cam-clay Model

志比利秀*・矢富盟祥**

Toshihide SHIBI and Chikayoshi YATOMI

*学生員 工修 金沢大学大学院 自然科学研究科 (〒920-8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

**正会員 Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920-8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

This paper examines the diffuse bifurcation mode of a hollow circular cylinder specimen consisting of a non-coaxial Cam-clay model. The specimen undergoes a non-axisymmetric deformation by a prescribed velocity with no friction on the ends and a constant lateral hydrostatic pressure on the side. We obtain several bifurcation loads and examine the sites where the slip planes first occur from the maximum shear strain point of view.

Key Words : non-axisymmetric, bifurcation, hollow circular cylinder, non-coaxial, Cam-clay model

1. はじめに

円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

近年、中空ねじり試験による非共軸性の存在、また、非共軸性が存在しなければ、つまり共軸モデルでは説明のできないような現象が、数多く報告されている。しかし、現在まで非共軸性を詳細かつ正確に検討した定量的実験は、ほとんど見られない。

そこで本報告では、中空ねじり試験により非共軸性の効果を検討する際の基礎的研究として、まず 1) 有限変形非共軸 Cam-clay モデル¹⁾を用いた中空円柱供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮した場合における、一様な変位場から非一様な変位場への分岐荷重(詳細な定義は後述する)の解析解を誘導し、2) 分岐モードと非共軸性との関係や、最大せん断ひずみ分布図より、すべり面の初期発生位置について考察を行なった。

なお、著者らの知る限り中空円柱供試体の非軸対称の分岐解析に他の報告はない。

ただし、側水圧一定な円柱供試体の非軸対称変形

の分岐解析には、著者ら²⁾と Chau^{3) 4)}の報告がある。Chau の報告では、岩石を意図した非関連流動則、横等方性を含む非常に一般的な構成式の場合で、圧縮変形する場合の分岐条件式が、応力速度ポテンシャルを用いて得られている。しかし、構成式における物質係数が、具体的な関数関係が与えられていない一般的なものであるため、分岐荷重と分岐モードの関係を議論する際、分岐荷重として、軸応力を(弾塑性体では応力の関数である)縦せん断係数(45度せん断係数)で無次元化したものを採用し、更に(一般には応力の関数である)縦せん断係数と単純せん断係数の比を定数とみなし、その値を変えた結果に基づいて考察を行なっている。したがって、分岐荷重と分岐モードの関係として、物理的な意味が不明瞭なものになっている。

本研究の目的は、中空ねじり試験において求められる構成式の有効性、非共軸性の定量的実験等への指針とするものである。また、本報告で得られた解は厳密解であるため、有限変形弾塑性理論による分岐解析のみならず、厳密解を得るのが難しいひずみの局所化、すべり面の発生に関する大変形有限要素法数値解析の精度の検証や、結果の考察などを行なう上でも非常に有益である。

2. 試験条件

中空円柱供試体の均一変形状態から非均一変形状態への分岐現象を考え、分岐の生じる瞬間、時刻 $t=t$ で、図-1 のように外半径 R_o 、内半径 R_i 、高さ $2H$ の中空円柱供試体になったと考える。原点は供

まず, Cauchy 応力 T , 有効 Cauchy 応力 T' と間隙水圧 u の間に有効応力原理が次式で与えられる.

無視でき、水圧水頭 u/γ_w のみとすると、間隙水の連続式は、

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = k\Delta u \quad (5)$$

となる。ここで Δ は微分演算子でラプラシアンである。

均一変形状態から非均一変形状態への分岐問題を対象とするため、分岐の生じる瞬間までは排水条件が存在してもかまわないが、均一状態が保たれており、有効応力および間隙水圧は均一に保たれていると考えるので、 $\Delta u = 0$ とおけ式(5)は、

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (6)$$

となる。式(6)を考慮すると式(4)は次式となる。

$$\dot{T}_{ij} = 2\tilde{G}D_{ij} - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{h}} \left(\frac{\tilde{G}}{\tau} S_{kl} D_{kl} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\tau} S_{ij} - \tilde{K}\tilde{\beta}\delta_{ij} \right) \quad (7)$$

本報告では、式(6)、(7)は次のように変形できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - (\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta})/2 &= 2\mu^* \{D_{zz} - (D_{rr} + D_{\theta\theta})/2\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} \\ \dot{T}'_{r\theta} &= 2\mu D_{r\theta} \\ \dot{T}'_{\theta z} &= 2\mu D_{\theta z} \\ D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 μ^* 、 μ はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数、単純せん断係数で、次式で与えられる。

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{h_1\tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \quad (9)$$

ここで h_1 は第 2 硬化係数と呼ばれ、非共軸パラメータ A 、平均有効主応力 p' 、さらに $\bar{\beta}$ を用いて次式で仮定される。

$$h_1 = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{3}A} p' \quad (>0)$$

ここで、 $A=0$ で共軸モデル、 $A>0$ で非共軸モデルを表す。

現在まで、非共軸性を詳細に検討した定量的実験

は、ほとんど見られない。しかし、中空円柱ねじり試験によるその存在、また、存在の必要性を示した研究は、最近精力的に行なわれている^{1) 2) 3) 4) 7)}。なお、本論文でも上記 h_1 は、参考文献¹⁾ の表現をそのまま用いるが、後述の 5、6 節で示す解析解には h_1 の具体形は不要である。

結局、均一変形から分岐瞬間時の有限変形 Cam-clay モデルの構成関係は式(8)、(9)で与えられる。

4. 支配方程式

中空円柱供試体は、分岐の生じる直前まで均一に変形し、さらにそれ以降の均一変形も次の軸方向変形の増大においても可能な解の一つである。分岐は、次の軸方向変形の増大において均一変形とは異なった解、つまり、非均一な変形を示す解が存在するときに生じるとする。

なお、分岐が実際に生じるためには、その時の均一解が不安定となる必要がある。弾性体では、解の唯一性がなくなる時、その均一解は不安定となるが、弾塑性体では、その場合でも均一解が依然安定であることもある⁸⁾。すなわち、弾塑性体の場合、この安定性を吟味するためには、負荷、除荷領域を考慮したあらゆる仮想速度場を想定した増分解が必要となる。梁構造などのように、変形が比較的単純な場合は、そのような安定性を吟味することは可能であるが、本報告のような連続体の場合、仮想速度場を特殊なものに限定せず、除荷領域を含めた一般的な仮想速度場を想定した場合の安定性の吟味は非常に難しく、著者らの知る限り、それに関する報告は皆無である。

したがって、本報告での分岐解も、その分岐解へ移行する可能性の範囲内での議論である。しかしながら、現実の物質では、注意深く均一な供試体を作成しても、何らかの初期不整（試験機、偏心荷重や両端摩擦などの不整を含む）が存在するから、均一変形は、不安定的であり、初期不整の性質にもよるが、通常、最小分岐荷重で分岐すると考えることができる⁸⁾。

4.1 増分釣合式

準静的で物体力のない場合を考えると、増分釣合式は次式のようになる。

$$\text{div } \dot{\mathbf{S}}_t = 0 \quad (10)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{S}}_t$ は全公称応力速度であり、Cauchy 応力 $\mathbf{T}$ 、速度勾配 $\mathbf{L}$ 、変形速度 $\mathbf{D}$ を用いて次式で定義される。

$$\dot{S}_t = \dot{T} + T(\text{tr} D) - T L^T \quad (11)$$

ここで、式(1)の有効応力原理を式(11)に代入すると、

$$\dot{S}_t = \dot{T}' + T'(\text{tr} D) - T' L^T - \dot{u} I - u \text{tr}(D) + u L^T \quad (12)$$

となる。分岐の生じる瞬間、時刻 $t = t$ までは有効応力および間隙水圧は均一であるとするので、式(6)を用いると、

$$\dot{S}_t = \dot{T}' - T' L^T - \dot{u} I + u L^T \quad (13)$$

となる。増分釣合式は式(13)を $\text{div} L^T = \text{grad}(\text{tr} D) = 0$ 、また有効応力が分岐の瞬間まで均一であることを考慮して、式(10)に代入すると次式となる。

$$\text{div} \dot{T}' - \text{grad} \dot{u} = 0 \quad (14)$$

結局、円柱座標 (r, θ, z) を用いると、増分釣合式(14)は、次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} &= 0, \\ \dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_{,\theta}}{r} &= 0, \\ \dot{T}'_{zr,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

4.2 境界条件

図-1 のように境界条件は、中空円柱供試体の上下端部 ($z = \pm H$) では、摩擦なしで、かつ一定速度 $w_0 (> 0)$ による変位制御圧縮、外側面、内側面 ($r = R_0, R_I$) では側方水圧一定条件とすると、

$$\begin{aligned} v_z &= \mp w_0, (\dot{S}_t)_r = 0, (\dot{S}_t)_\theta = 0, \text{on } z = \pm H, \\ (\dot{S}_t)_r &= \sigma_b L_{rr}, (\dot{S}_t)_\theta = \sigma_b L_{r\theta}, (\dot{S}_t)_z = \sigma_b L_{rz}, \text{on } r = R_0, R_I, \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで、 $\sigma_b (= \sigma_b + u)$ は側圧（全応力）である。なお、間隙水の境界条件の内、排水境界条件は式(6)の直前に述べた理由により、非排水境界条件と同様な条件となり、結局、間隙水の境界条件は不要となる。また、 $\dot{S}_t$ ($(\dot{S}_t)_i, i = r, \theta, z$) は全公称表面力速度であり、全公称応力速度 $\dot{S}_t$ 、各々の面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて次式で定義される。

$$\dot{S}_t = \dot{S}_t \mathbf{n} \quad (17)$$

構成式(8)を増分釣合式(15)に代入したものは、速度勾配に関して線形になっているので、供試体の変形を均一変形と非均一変形から構成されるものと考え、増分境界値問題の解は次のように、均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる。

a) 均一境界条件

$$\begin{aligned} v_z &= \mp w_0, \dot{T}'_{rz} = 0, \dot{T}'_{\theta z} = 0, \text{on } z = \pm H, \\ \dot{T}'_{rr} &= 0, \dot{T}'_{\theta r} = 0, \dot{T}'_{zr} = 0, \text{on } r = R_0, R_I. \end{aligned}$$

b) 非均一境界条件

$$\begin{aligned} v_z &= 0, \dot{T}'_{rz} = 0, \dot{T}'_{\theta z} = 0, \text{on } z = \pm H, \\ \dot{T}'_{rr} &= \dot{u}, \dot{T}'_{\theta r} = 0, \dot{T}'_{zr} = -q v_{r,z}, \text{on } r = R_0, R_I. \end{aligned} \quad (18)$$

このとき、均一な変形は増分釣合式、境界条件を自動的に満足するため、求めるべき分岐条件式は増分釣合式(15)と非均一変形に寄与する境界条件より求められる。以下、非均一境界条件をもって境界条件と呼ぶ。

以上より分岐の支配方程式は次のようになる。

増分釣合式

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} &= 0, \\ \dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_{,\theta}}{r} &= 0, \\ \dot{T}'_{zr,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

境界条件

$$\begin{aligned} v_z &= 0, \dot{T}'_{rz} = 0, \dot{T}'_{\theta z} = 0, \text{on } z = \pm H, \\ \dot{T}'_{rr} &= \dot{u}, \dot{T}'_{\theta r} = 0, \dot{T}'_{zr} = -q v_{r,z}, \text{on } r = R_0, R_I. \end{aligned}$$

5. 特性方程式による支配方程式の分類

上下端 ($z = \pm H$) の境界条件から、速度成分および間隙水の未知関数 v_i ($i = r, \theta, z$), u を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} v_r &= V_r(r) \cos(n\theta) \sin(k_m z), \\ v_\theta &= V_\theta(r) \sin(n\theta) \sin(k_m z), \\ v_z &= V_z(r) \cos(n\theta) \cos(k_m z), \\ u &= U(r) \cos(n\theta) \sin(k_m z), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $k_m = m\pi/2H$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ である。ただし、変形モードを示す整数 m が偶数のとき、上下

面の境界条件を満足するために z 座標の原点を H/m だけ移動させる必要がある。また、 $V_i(r)$ 、 $U(r)$ は未知関数である。本報告においてはすべり面が最初に入る位置を考察するために未知関数 $V_i(r)$ のみを求める。式(8)、(15)を用いると、支配方程式は次式のようなになる。

$$L_1(L_2V_\theta) - L_3\psi = 0, \quad (20)$$

$$L_4\psi = 0, \quad (21)$$

ここで、 $L_i (i=1\sim 4)$ は

$$L_1 = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1-n^2 + \alpha_1^2 k_m^2 r^2)\},$$

$$L_2 = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 3r \frac{d}{dr} + (1-n^2 + \alpha_2^2 k_m^2 r^2)\},$$

$$L_3 = \{(\frac{2b+2\mu}{a} - \alpha_3^2)k_m^2 r^3 \frac{d}{dr} + (\frac{2b-2\mu}{a} - 3\alpha_3^2)k_m^2 r^2\},$$

$$L_4 = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1-n^2 + \alpha_3^2 k_m^2 r^2)\}$$

とおいている。また、

$$\psi = \frac{d}{dr} (rV_\theta) + nV_r, \quad (22)$$

であり、 α_1, α_2 および α_3 は次式を満足する。

$$a\alpha_i^4 - 2b\alpha_i^2 + c = 0 \quad (i=1, 2), \quad (23)$$

$$\mu\alpha_3^2 + c = 0 \quad (24)$$

ここで、

$$a = 2\mu + q, b = -(3\mu^* - \mu), c = 2\mu - q \quad (25)$$

である。

a 、 b および c は応力の関数であり、ゆえに供試体内の応力状態の変化にともない式(23)の実数解の存在個数が異なり、実数解の存在個数が 0、2 および 4 個に対応して支配方程式(20)はそれぞれ楕円型(E)、放物型(P)および双曲型(H)に分類される。E 領域は解の形により更に二つの領域に分類でき 4 つの複素数解の場合を(EC)領域、4 つの虚数解の場合を(EE)領域と分類する。なお、それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる。

$$b^2 - ac > 0, b/a < 0, 2\mu > |q| \quad \text{EI 領域}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{EC 領域}$$

$$b^2 - ac > 0, b/a > 0, 2\mu > |q| \quad \text{H 領域}$$

$$2\mu < |q| \quad \text{P 領域}$$

また、式(24)の解は現実的な応力状態の範囲ではつねに虚数である。ゆえに式(21)は領域の分類に寄与しない。支配方程式、およびその分類には、境界条件は含まれないので参考文献²⁾とまったく変わらない形となっている。

また、支配方程式の分類に基づき、式(20)、(21)、(22)から、 $V_i (i=r, \theta, z)$ の一般解は次式のようなになる。

$$V_r = -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\alpha_1 k_m r) + c_2 J_n(\alpha_2 k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} J_n(\alpha_3 k_m r) \\ - \frac{d}{dr} \{c_4 Y_n(\alpha_1 k_m r) + c_5 Y_n(\alpha_2 k_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} Y_n(\alpha_3 k_m r),$$

$$V_\theta = \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\alpha_1 k_m r) + c_2 J_n(\alpha_2 k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} J_n(\alpha_3 k_m r) \\ + \frac{n}{r} \{c_4 Y_n(\alpha_1 k_m r) + c_5 Y_n(\alpha_2 k_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} Y_n(\alpha_3 k_m r),$$

$$V_z = k_m \{c_1 \alpha_1^2 J_n(\alpha_1 k_m r) + c_2 \alpha_2^2 J_n(\alpha_2 k_m r)\} \\ + k_m \{c_4 \alpha_1^2 Y_n(\alpha_1 k_m r) + c_5 \alpha_2^2 Y_n(\alpha_2 k_m r)\},$$

(26)

ここで、 $c_i (i=1, 2, \dots, 6)$ は未定定数で以下 $J_n (n=0, 1, 2, \dots)$ は第 n 次の第 1 種ベッセル関数、 $Y_n (n=0, 1, 2, \dots)$ は第 n 次の第 2 種ベッセル関数を示す。

6. 分岐条件式

分岐条件式は側面($r=R_0, R_l$)の境界条件式において、 $c_i (i=1, 2, \dots, 6)$ の非自明な解が存在する条件として得られる。なお、最小の分岐荷重はほとんどの場合 EC 領域で生じるので、本報告では EC 領域のみを考察した。

EC 領域の分岐条件式

式(23)で与えられる 4 つの複素数解 α_1, α_2 は共役な複素数であり、 $\alpha, \bar{\alpha} = P \pm iQ (P>0, Q>0)$ とおくと P と Q の間には次の関係式が得られる。

$$P^2 + Q^2 = \sqrt{c/a}, \quad P^2 - Q^2 = b/a \quad (27)$$

また、式(26)の $V_i (i=r, \theta, z)$ は次式のようなになる。

$$V_r = -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\alpha} k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho k_m r) \\ - \frac{d}{dr} \{c_4 Y_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_4 Y_n(\bar{\alpha} k_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} K_n(\rho k_m r),$$

$$V_\theta = \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\alpha} k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho k_m r) \\ + \frac{n}{r} \{c_4 Y_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_4 Y_n(\bar{\alpha} k_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} K_n(\rho k_m r),$$

$$V_z = k_m \{c_1 \alpha^2 J_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_1 \bar{\alpha}^2 J_n(\bar{\alpha} k_m r)\} \\ + k_m \{c_4 \alpha^2 Y_n(\alpha k_m r) + \bar{c}_4 \bar{\alpha}^2 Y_n(\bar{\alpha} k_m r)\}, \quad (28)$$

ただし、 ρ は $\alpha_3 = i\rho$ であり、 $I_n(n=0,1,2,\dots)$ は第 n 次の第 1 種修正ベッセル関数、 $K_n(n=0,1,2,\dots)$ は第 n 次の第 2 種修正ベッセル関数を示す。

側面 ($r=R_0, R_l$) の境界条件式に速度場の一般解、つまり式(28)を代入することにより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(\alpha)c_1 + \xi_1(\bar{\alpha})c_2 + \xi_2(\rho)c_3 \\ + \varsigma_1(\alpha)c_4 + \varsigma_1(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_2(\rho)c_6 = 0 \\ \xi_3(\alpha)c_1 + \xi_3(\bar{\alpha})c_2 + \xi_4(\rho)c_3 \\ + \varsigma_3(\alpha)c_4 + \varsigma_3(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_4(\rho)c_6 = 0 \\ \xi_5(\alpha)c_1 + \xi_5(\bar{\alpha})c_2 + \xi_6(\rho)c_3 \\ + \varsigma_5(\alpha)c_4 + \varsigma_5(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_6(\rho)c_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{on } r = R_0$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(\alpha)c_1 + \xi_1(\bar{\alpha})c_2 + \xi_2(\rho)c_3 \\ + \varsigma_1(\alpha)c_4 + \varsigma_1(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_2(\rho)c_6 = 0 \\ \xi_3(\alpha)c_1 + \xi_3(\bar{\alpha})c_2 + \xi_4(\rho)c_3 \\ + \varsigma_3(\alpha)c_4 + \varsigma_3(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_4(\rho)c_6 = 0 \\ \xi_5(\alpha)c_1 + \xi_5(\bar{\alpha})c_2 + \xi_6(\rho)c_3 \\ + \varsigma_5(\alpha)c_4 + \varsigma_5(\bar{\alpha})c_5 + \varsigma_6(\rho)c_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{on } r = R_l$$

(29)

ただし、 ξ_i, ς_i ($i=1,2,\dots,6$) は以下のような関数とする。

$$\xi_1(x) = \frac{k_m}{r^2} \{4\mu x k_m r J_{n+1}(x k_m r) \\ + [4\mu(n^2 - n) - \{a(1+x^2) - 2b\}x^2 k_m^2 r^2] J_n(x k_m r)\}, \\ \xi_2(x) = \frac{4k_m n}{r^2} \mu \{x k_m r I_{n+1}(x k_m r) + (n-1) I_n(x k_m r)\}, \\ \xi_3(x) = \frac{2n}{r^2} \{(n-1) J_n(x k_m r) - x k_m r J_{n+1}(x k_m r)\}, \\ \xi_4(x) = \frac{1}{r^2} [-2x k_m r I_{n+1}(x k_m r) \\ + \{2(n^2 - n) + x^2 k_m^2 r^2\} I_n(x k_m r)], \\ \xi_5(x) = \frac{k_m}{r} (1-x^2) \{n J_n(x k_m r) - x k_m r J_{n+1}(x k_m r)\}, \\ \xi_6(x) = \frac{k_m n}{r} I_n(x k_m r), \\ \varsigma_1(x) = \frac{k_m}{r^2} \{4\mu x k_m r Y_{n+1}(x k_m r)$$

$$+ [4\mu(n^2 - n) - \{a(1+x^2) - 2b\}x^2 k_m^2 r^2] Y_n(x k_m r)\},$$

$$\varsigma_2(x) = \frac{4k_m n}{r^2} \mu \{x k_m r K_{n+1}(x k_m r) + (n-1) K_n(x k_m r)\},$$

$$\varsigma_3(x) = \frac{2n}{r^2} \{(n-1) Y_n(x k_m r) - x k_m r Y_{n+1}(x k_m r)\},$$

$$\varsigma_4(x) = \frac{1}{r^2} [-2x k_m r K_{n+1}(x k_m r)$$

$$+ \{2(n^2 - n) + x^2 k_m^2 r^2\} K_n(x k_m r)],$$

$$\varsigma_5(x) = \frac{k_m}{r} (1-x^2) \{n Y_n(x k_m r) - x k_m r Y_{n+1}(x k_m r)\},$$

$$\varsigma_6(x) = \frac{k_m n}{r} K_n(x k_m r).$$

式(29)において、 c_i ($i=1,2,\dots,6$) の非自明な解が存在するとき、つまり c_i ($i=1,2,\dots,6$) の係数行列の行列式が零になるとき、分岐が生じる。

7. 分岐荷重の解析結果および考察

本報告においては、梅田層粘土の土質パラメータの値 $\nu=0.333$ 、 $\kappa=0.042$ 、 $e=15$ 、 $D=0.053$ 、 $M=1.43$ を用いる⁹⁾。また、非共軸パラメータ A の値に関しては参考文献¹⁾ の考察にならい $A=0.01$ を用いる。したがって、 $A=0.01$ とする本報告は、試行的なものであるが、いずれにしても非共軸項がない共軸モデルでは、実際現象を説明できない実例が多々あることが分かってきている。本報告でも、その例を後で示す。

まず、非共軸性の妥当性を示すために、図-2 に中実円柱供試体の共軸および非共軸 Cam-clay モデルの場合における「分岐荷重」と分岐時の「供試体寸法比」の関係を示す。共軸モデルにおいて軸対称のバルジ型の分岐荷重が存在しないのは参考文献⁷⁾ で述べた通りである。実際現象において、円柱供試体の圧縮試験でしばしば見られる、軸対称のバルジのような変形を共軸モデルでは説明できない点を指摘しておく。また、非軸対称座屈型の分岐荷重は存在するが極めて細長い供試体に限られることも参考文献²⁾ に述べた通りである。しかし、非共軸モデルではこのような軸対称のバルジ型の変形が生じる事を説明でき、様々な寸法比で座屈型の分岐が生じることがわかる。また、非共軸モデルは、共軸モデルに比べて、理論的に分岐の促進効果がある事が説明できる。

中空円柱供試体の各変形モードにおける分岐荷重について考察する。分岐条件式は分岐荷重 q/p' 、分岐時の供試体寸法比 R/H 、変形モード m, n 、非共軸パラメータ A の陰関数で与えられるので、変形モ

図-2 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係
中実円柱供試体

図-4 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係
中空円柱供試体非軸対称座屈型 ($n=1, m=1$)

図-3 分岐荷重とモードおよび供試体寸法比の関係
中空円柱供試体軸対称バルジ型 ($n=0, m=2$)

ードと非共軸パラメータを与えることにより、分岐条件式から「分岐荷重」と分岐時の「供試体寸法比」の関係を得ることができる。ただし、得られた関係は各供試体寸法比に対して、最も低い分岐荷重を採用している。

本報告においては、中空円柱供試体として、 $R_i/R_o = 0.5$ の肉厚のタイプと $R_i/R_o = 0.9$ の薄肉のタイプを考える。なお、変形モードとして軸対称の2次のバルジ型、非軸対称の1次の座屈型を考える。

図-3,4に共軸および非共軸 Cam-clay モデルの場合における「分岐荷重」と分岐時の「供試体寸法比」

図-5 軸対称バルジ型の分類

の関係を示す。図-3は軸対称バルジ型、図-4は非軸対称座屈型の場合である。

肉厚 ($R_i/R_o = 0.5$) 中空円柱供試体の場合について考える。軸対称バルジ型 ($n=0, m=2$) の分岐荷重は、共軸モデルにおいては存在するが極めてかぎられた供試体寸法比 ($R_o/H \approx 1.6$) の場合に限られる。しかし、非共軸モデルにおいては供試体寸法比によらず分岐荷重が存在し、様々な供試体寸法比で軸対称バルジ型の分岐が生じることがわかる。特に R_o/H が大きい場合、バルジ型の分岐荷重が存在し得ることから、非共軸モデルのほうが実際現象をよく説明していることが分かる。

薄肉 ($R_I/R_O = 0.9$) 中空円柱供試体の場合における軸対称バルジ型の分岐荷重について考える。共軸モデルの場合も、様々な供試体寸法比で分岐荷重が存在しているが、非共軸モデルの方が分岐荷重は低いことがわかる。

中空円柱供試体と中実円柱供試体の分岐の顕著な違いは軸対称バルジ型の場合に現れている。実際には中空円柱供試体の軸対称のバルジ型は2つのタイプが存在する。図-5 に $R_I/R_O = 0.9$ の薄肉の場合における軸対称2次の分岐荷重をそれぞれ示す。図-5 の点線は片側断面が座屈型となるタイプ(図-6 参照)で、図-5 の実線は片側断面がバルジ型となるタイプ(図-7 参照)である。

中空円柱供試体の場合における非軸対称座屈型 ($n=1, m=1$) の分岐荷重について考える。共軸モデルに比べて非共軸モデルの方が、分岐荷重が低いことがわかる。

共軸モデルは、主応力方向の急激な変化に変形速度の応答が鈍感である特性を反映しており、共軸モデルの非現実性を示している。金属における弾塑性座屈でも共軸モデルによる座屈荷重が実験値より、はるかに大きくなり種々の非共軸モデルが提案されている¹⁰⁾。

8. 最大せん断ひずみ

初期において長さ ℓ_0 の部分が分岐直前には ℓ になり分岐直後には $\ell + \Delta\ell$ になったとする。

分岐後の主対数ひずみは、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \ln \frac{\ell + \Delta\ell}{\ell_0} \\ &= \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \ln\left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\end{aligned}$$

となる。上式は、 $x \ll 1$ なら $\ln(1+x) \approx x$ であるから、 $\Delta\ell/\ell \ll 1$ のとき、 ε は次式で近似できるので、

$$\varepsilon \approx \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (30)$$

となる。式(30)より、分岐直前の一様ひずみ $(\varepsilon)_t$ と変形速度を用いて表すと、

$$\varepsilon_{ii} \approx (\varepsilon_{ii})_t + D_{ii} \Delta t \quad (i: \text{no sum}) \quad (31)$$

また、分岐直前のせん断ひずみ $((\varepsilon_{ij})_t, (i \neq j))$ が零で

あることより、

$$\varepsilon_{ij} \approx D_{ij} \Delta t \quad (i \neq j) \quad (32)$$

となる。ここで、 ε_{ij} の主値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) とおき、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ を次式のように定義する。

$$\Gamma_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \quad (33)$$

9. 最大せん断ひずみの解析結果および考察

圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデル中空円柱供試体の分岐時の最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布を式(33)より求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。通常、粘土のすべり面は、破壊力学の用語で言えばモードⅡ型またはモードⅢ型(せん断型)の進行性破壊であるので、ここでは、上記の最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置と仮定して議論する。図-6 から図-8 は、横軸に半径方向 r ($0 \leq r \leq R_O$)、縦軸に供試体高さ方向 z ($-H \leq z \leq H$) をとる。また、各々の供試体は $H=1$ とした。(a)は分岐時の変形図である。(b)は最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布図で、色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく、薄い部分で小さいことを示している。なお変形図は分岐時の非均一解による変形のみを表しており、実際の変形図は、すべての領域で負荷となる自明な均一解の変形を加える必要がある。

図-6,7 では、軸対称変形を考えているので、 θ が一定で切り取られる片側断面を、また、図-8 では非軸対称となるので全断面を示している。

図-6 は $n=0, m=2, R_O/H=2$ の場合である。変形モード概形は図-6(a)に示すような一般にバルジと呼

図-6 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図
 $n=0, m=2, R_O/H=2$

図-7 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図
 $n=0, m=2, R_o/H=1$

ばれるような中央部が膨らむ型を考える。また内側面も外側面と同じ挙動をしており、断面片側は座屈の型を成している。図-6(b)では、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の最大は外側面の上下端近傍となっていることがわかる。したがって、このような供試体寸法比、変形モードの場合、外側面の上下端から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図-7 は $n=0, m=2, R_o/H=1$ の場合である。変形モード概形は図-7(a)に示すような中央部が膨らむバルジ型である。外形は図-6 と同じバルジであるが、内側面が内側に膨らんでおり断面片側はバルジの型を成している。図-7(b)より、このような変形モードの場合、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ は外側面の中央の膨らんだ部分において最大となることがわかる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、外側面の中央部が最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図-8 は $n=1, m=1, R_o/H=1$ の場合である ($\theta=0$ および $\theta=\pi$ での断面) 他の断面では最大せん断ひずみは大きくない。変形モード概形は図-8(a)に示すような座屈型である。また、断面両側とも座屈型となっている。図-8(b)より、このような供試体寸法比、変形モードの場合、最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ は供試体側面の左下および右上において最大となることがわかる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、供試体側面の左下および右上から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

これらの結果より最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大になる位置は、変形モードおよび供試体寸法比等の違いにより異なっていることが分かる。

ただし、実際には、はじめに述べたように、すべり面は、何らかの非均一（分岐モード）変形後、「非軸対称」的に進行するのが普通であるから、以上の議論は、仮に初期に「拡散分岐モード（Diffuse bifurcation mode）」の出現した場合に限って、速度勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使

図-8 分岐時変形概形および最大せん断ひずみ図
 $n=1, m=1, R_o/H=1$

って、初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである。

なお、すべり面発生の考察として、双曲型または放物型における速度勾配の不連続面で定義される「せん断帯モード（Shear band mode）」発生の必要条件に基づいた議論も、数多く行なわれているが、その条件では、せん断帯モードとしてのすべり面の発生する応力状態やその方向は議論できるが、境界条件に無関係な局所的な理論であるため、本分岐解のように、特定の供試体形状におけるすべり面の発生位置までは議論できない。

10. おわりに

本報告では、有限変形非共軸 Cam-clay モデルを用いた中空円柱供試体の軸対称および非軸対称分岐解析を行うことにより、まず、分岐条件式を求め、分岐荷重と変形モードとの関係を議論した。次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。なお、本報告では n および m の高次のものは取り扱わなかったが、すべり面群の生成等の議論には高次の分岐解析が重要であり、それについては別に報告する。

参考文献

- 1) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 2) Yatomi, C. and Shibi, T. : Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, *Proc. Int. Symp. Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp. 9-14, 1997
- 3) Chau, K. T. : Antisymmetric bifurcations in a compressible pressure-sensitive circular cylinder

- under axisymmetric tension and compression, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol.60, pp. 282-289, 1993
- 4) Chau, K. T. : Buckling, barrelling, and surface instabilities of a finite, transversely isotropic circular cylinder, *Quart. Appl. Math.*, vol.53, No.2, pp. 225-224, 1995
 - 5) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A : Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol. 13, pp. 211-240, 1963.
 - 6) Ohta, H. : Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
 - 7) 志比利秀, 矢富盟祥 : 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の軸対称分岐解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.413-421, 1997.
 - 8) 伊藤耿一 : 塑性不安定と分岐の理論, 塑性と加工, Vol.22-249, pp. 1009-1015, 1981.
 - 9) Sekiguchi, H. : Rheological characteristics of clays, *Proc. 9th ICSFME*, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.
 - 10) 例えば, 北川 浩 : 弾・塑性力学－非線形解析のための基礎理論－, 裳華房, 1987.

(1998 年 4 月 24 日受付)