スカラー成層波動場の Green 関数のスペクトル測度を用いた表現

Spectral Representation of Green's function for a Layered Acoustic Medium

東平光生*

Terumi Touhei

*正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

The purpose of this research is to represent Green's function for a liquid layered medium in terms of the spectral theory. In general, Green's function expressed by wavenumber integral can be separated into residue terms and branch line integral. This research shows that the residue terms are related to the discrete spectrum and the branch line integral to the continuous spectrum. A spectral family can be provided by means of the eigenfunctions for the discrete and continuous spectrums. As a result, Green's function can be expressed in terms of the Stieltjes integral via the spectral family.

Key Words : Acoustic layered Medium, Green's function, Spectral theory

1. はじめに

現代の科学技術の発展の中には、コンピュータテクノロジーの目覚ましい進展があり、これに伴い波動場の Green 関数の計算技術も大きく進歩してきた。そして、同時に地震動予測に寄与する重要な研究成果も得られてきている。しかしながら、応用力学における成層弾性波動場の数理解釈は1904年のLambの論文¹⁾を依然として受け継いでいる。一方で、1930年前後におけるVon Neumannによる量子力学の数学的定式化を契機として、現代ではヒルベルト空間論を含めた関数解析学をツールとする新しい数理物理学の潮流が生まれている²⁾。LandauとLifshitsの量子力学のテキストによれば、こうした現代的視点を基に量子力学に現れる波動関数は離散スペクトルと連続スペクトルに対する固有関数の重ね合わせで表現されることが示されている³⁾。

この現代的な観点によって、弾性波動場のGreen関数の数理解的な解釈を見直す作業の利点について考えてみると、たとえばヒルベルト空間で論じられる抽象的なベクトルとその作用素の幾何学的な概念が弾性波動場という具体的な問題で物理的な意味を獲得することにある。対極にある両者の比較は、弾性波動の現象への理解に対する視点を与えるものと期待される。

しかし、ヒルベルト空間論で論じられる概念を基に、弾性波動場のGreen関数の数理解釈を見直して行こうとする研究はそれほど多くない。こうした中、著者は先の論文⁴⁾でスカラー成層波動場のGreen関数を離散および連続スペクトルに対する固有関数で表現した。この論文ではスペクトルの数学的な定義があいまいであったり、固有関数の重ね合わせの表現とVon Neumannによるスペクトル分解定理が記述する数学的な定義との

ギャップがあるなどの欠点があることが否めない。しかしながら、Green関数の表現に現れる分岐点回りの積分の積分核の固有関数への分解を通して、ともかくもGreen関数を離散と連続スペクトルの固有関数に分解することができた。

こうした背景を基に、本論文ではスカラー成層波動場について、スペクトルの数学的定義を含め、先の論文⁴⁾で不明確であった数学的概念をできる限り明確にすることに努め、スペクトルの測度²⁾を定義する。そして、先の論文で示したGreen関数の固有関数展開表現を基に、Green関数を、スペクトル測度を用いたStieltjes積分で表現する。この作業はGreen関数の表現をVon Neumannによるスペクトル分解定理²⁾の表現に対応させることに相当すると共に現代の関数解析学の観点を弾性波動論に導入することを意味する。本論文ではStieltjes積分で表現されたGreen関数の数理解的解釈とLambによる数理解的解釈を対比するばかりでなく、現代的な数学の視点を応用力学場で展開することの意義について検討する。

2. Green 関数の波数積分による表現

Fig.1に示す成層構造を有する弾性流体からなる波動場を考える。図中の ρ は媒質の密度、 α は音速を示す。これらの物理量は層ごとに一定の値を持つものとし、これらの物理量の添え字は層の番号を表わすことにする。媒質内部に点源がある場合の波動場はGreen関数によって記述され、Green関数の満たすべき方程式は次式となる。

$$(\nabla^2 + k_\alpha^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z') \quad (1)$$

ここに、 k_α 媒質の波数、 δ はDiracのデルタ関数、 $\mathbf{r}$ は

Fig. 1 Point source in a layered scalar wave field.

観測点, r' はソース点, r は観測点とソース点の水平距離, z は観測点の鉛直座標, z' はソース点の鉛直座標を表す. 媒質の波数 k_α は媒質の物理定数が層ごとに一定であることから, k_α の値も層ごとに一定の値を持つことに注意する.

式(1)の解はHankel変換を用いて次のように表わすことができる.

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) g_k(z, z') dk \quad (2)$$

ここに, k は水平方向の波数, J_0 は0次の第1種Bessel関数, g_k は波数領域のGreen関数で次式を満足する.

$$(D_z^2 + k_\alpha^2 - k^2) g_k(z, z') = -\delta(z - z') \quad (3)$$

ただし, $D_z = d/dz$ である.

ここで, Green関数の物理量を弾性流体の変位ポテンシャルとすれば, g_k は層境界で次式を満足する.

$$\begin{aligned} \rho_j g_k(z_j - \epsilon, z') &= \rho_{j+1} g_k(z_j + \epsilon, z') \\ D_z g_k(z_j - \epsilon, z') &= D_z g_k(z_j + \epsilon, z') \end{aligned} \quad (4)$$

($j = 1, 2, \dots, L-1$)

ここに, ϵ は無限小の正数である. なお, 変位ポテンシャルに密度を掛けた物理量は, 流体圧力になることに注意する. この意味で, 媒質の自由表面では圧力がゼロであることから, $g_k(z_0, z') = 0$ が成立する.

Ewingのテキスト⁵⁾などに示されているように, Hankel変換で表わされたGreen関数は積分路を複素平面にとることで, 以下のようにGreen関数を留数定理による寄与と分岐点回りの積分に分離することができる.

$$\begin{aligned} G(r, r') &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^N k_n H_0^{(2)}(k_n r) \text{Res}_{k=k_n} g_k(z, z') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_L H_0^{(2)}(kr) g_k(z, z') dk \end{aligned} \quad (5)$$

ここに, L はFig.2に示す分岐点回りの積分経路, N は g_k の極の個数で, ここではcut-off frequencyの存在に

Fig. 2 Integration path in the complex wavenumber plane

よって有限個である. なお, Fig.2の $k_{\alpha L}$ は基盤層の媒質の波数である.

今後の理論展開のために, Green関数の表現に現れる分岐点回りの積分をRiemann面のcut上の積分に直し, Green関数を以下のように表現しておく.

$$\begin{aligned} G(r, r') &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^N k_n H_0^{(2)}(k_n r) \text{Res}_{k=k_n} g_k(z, z') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_c} k H_0^{(2)}(kr) (g_k^-(z, z') - g_k^+(z, z')) dk \end{aligned} \quad (6)$$

ここに, g_k^- および g_k^+ は基盤層でup-goingとdown-goingの波数領域のGreen関数である. up-goingの波動は積分経路 L が複素平面の第4象限にある場合に生じ, down-goingの波動は積分経路 L が複素平面の第1象限から第3象限にある場合に生じる波動で, 関数

$$\bar{\nu}_L = \sqrt{k_{\alpha L}^2 - k^2} \quad (7)$$

の符号の取り方に関連している. また, σ_c はRiemann面のcut上の波数の集合を示している.

Lambが1904年の論文で明らかにしたことは, 留数定理からの寄与は表面波に, 分岐点回りの積分からの寄与は実体波に関連しているということであった. 以降では, こうした見解をスペクトル理論の中で見直しに行くことにする.

3. Green関数に現れるスペクトル

3.1 離散スペクトル

Fig.2に現れた g_k に対する極 k_n については, 次式を満足する φ_n が存在する.

$$(T - k_n^2) \varphi_n(z) = 0 \quad (8)$$

ただし, 今後の議論の簡便さのために

$$T = D_z^2 + k_\alpha^2 \quad (9)$$

としている。また、 φ_n は式(4)に示される層境界の条件、自由表面の境界条件を満足するとともに、半無限の基盤層で振幅が指数関数的に減少するという性質を持つ、いわゆる正規モードである。

式(8)の k_n は数学的には離散スペクトル⁶⁾の集合に属することになるが、ここでスペクトルの数学的な定義について見てみることにする。いま、

$$R_k(T) = (T - k^2)^{-1} \quad (10)$$

と置き、 $R_k(T)$ を T のレゾルベントと呼ぶ。スペクトルの定義は、レゾルベントが非有界となるときの k の集合として定義される。この意味で、式(8)における φ_n の存在は $R_k(T)$ が非有界になることを意味し、 k_n はスペクトルの集合に属することになる。

特に、ここで作用素 T の定義域を L_2 空間と呼ばれる Lebesgue2乗可積分の関数空間の中の部分空間にとれば(微分作用素を扱う都合上、 L_2 空間全体を定義域にとる分けにはいかない。この部分空間は L_2 空間で稠密となる。)、前述の正規モードの性質、すなわち、基盤層で振幅が指数関数的に減少するという性質から、 φ_n は L_2 空間に属し、さらに、

$$\varphi_n \in \text{dom } T \quad (11)$$

が言える。ここに、 $\text{dom } T$ は作用素 T の定義域を示す。このため式(8)を考慮して、

$$\varphi_n \in \ker(T - k_n^2) \quad (12)$$

が成立する。ただし、 $\ker(T - k^2)$ は次式で定義される集合である。

$$\ker(T - k^2) = \{x \in \text{dom } T \mid (T - k^2)x = 0\} \quad (13)$$

ここでレゾルベントが非有界でかつ

$$\ker(T - k_n^2) \neq \emptyset \quad (14)$$

が成立する状況は k_n が離散スペクトルに属することを示している⁶⁾。この意味で正規モード $\varphi_n(z)$ は離散スペクトルに対する固有関数ということになる。今後の議論では、 k_n の集合、すなわち離散スペクトルを σ_p で表わすことにする。

なお、作用素 T の自己共役性を用いることで、対称行列に対する固有ベクトルの直交性の証明と同様、離散スペクトルに対する固有関数の直交性

$$\langle \varphi_n(z), \varphi_m(z) \rangle = \delta_{nm} \quad (15)$$

を誘導することは容易である。ただしここに、 δ_{nm} はKroneckerのデルタである。また、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は関数の内積を表わし、

$$\langle \varphi_n(z), \varphi_m(z) \rangle = \int_{z_0}^{\infty} \varphi_n(z) \varphi_m(z) \rho(z) dz \quad (16)$$

である。ただし、 z_0 は自由表面の鉛直座標、 $\rho(z)$ は質量密度で深さ方向の関数として表示している。内積の定義に質量密度が入る理由は層間の圧力の連続条件を確保するためである。

3.2 連続スペクトル

式(6)に示したようにRiemann面のcut上の波数に関しては、基盤層でup-goingとdown-goingの波動を示すGreen関数、 g_k^- および g_k^+ が存在する。これらは、共に式(3)の解であるから、

$$\Psi_k(z, z') = g_k^-(z, z') - g_k^+(z, z') \quad (17)$$

を定義することでこの関数は、次の方程式の同次解となる。

$$(T - k^2) \Psi_k(z, z') = 0 \quad (k \in \sigma_c) \quad (18)$$

いま、 $\Psi_k(z, z')$ は z と z' の2点の関数で記述されているが、方程式の同次解を表現することのみを考えれば、 z' は不要である。実際、式(17)では二つのGreen関数の $z = z'$ での特異性を打ち消し合うことで、同次解が得られている。そこで、式(18)の同次解を z のみの関数 $\psi_k(z)$ で表わし、議論を始めることにする。今の時点では、 Ψ_k と ψ_k は同じものを表わすと考えて良いが、議論の展開の過程で ψ_k には規格化が施される。規格化が施された時点では、 ψ_k と Ψ_k はある定数倍だけ異なる関数となる。

この $\psi_k(z)$ の具体的な形を求めるためには、基盤層で

$$\psi_k(z) = A \sin(\bar{\nu}_L z) + B \cos(\bar{\nu}_L z) \quad (z \geq z_{L-1}) \quad (19)$$

の形を持つ関数を選べば良い。ここに、 A および B は未定係数、 $\bar{\nu}_L$ は式(7)に示す関数、 z_{L-1} は基盤層と表層の境界の鉛直座標である。式(19)の二つの未定係数を決定する境界条件は自由表面上の圧力がゼロとなる条件が一つだけである。したがって、 $\psi_k(z)$ は境界条件を満足する同次解となり得る。二つの未定係数を完全に決定するためには、二つの条件が必要であるが、もう一つの条件は ψ_k を規格化する条件とする。

式(19)より、 $\psi_k(z) \notin L_2$ である。なぜなら、 ψ_k の2乗を区間 $[z_0, \infty)$ で積分すると、積分値は発散し確定しないためである。また、Riemann面のcut上の波数を持つ波動は基盤層で三角関数的に振動するから L_2 空間には属さない。すなわち、式(18)を満足する ψ_k は $\text{dom } T$ の中に見出すことができなく、

$$\ker(T - k^2) = \emptyset \quad (k \in \sigma_c) \quad (20)$$

である。

ここで、Appendix-Aに示した線形作用素に関する性質⁶⁾

$$\overline{\text{ran}}(T - k^2) = (\ker(T - k^2)^*)^\perp \quad (21)$$

を用いれば、

$$\overline{\text{ran}}(T - k^2) = L_2 \quad (k \in \sigma_c) \quad (22)$$

を得る。ただし、作用素の添え字の*は共役作用素であることを示し、ここでは

$$T - k^2 = (T - k^2)^* \quad (23)$$

である。また、 $\overline{\text{ran}}(T - k^2)$ は $(T - k^2)$ の値域の閉包を示す。

式(18)に示すように, Riemann 面の cut 上の波数に対する同次解の存在は式(10)で定義したレゾルベントが有界でないことを示し, Riemann 面の cut 上の波数がスペクトルの集合に属することを示す. さらに, スペクトルの集合が式(20)および式(22)を成立させるとき, スペクトルは連続スペクトル⁶⁾であると定義される. この意味で σ_c は連続スペクトルであり, $\psi_k(z)$ は連続スペクトルに対する固有関数となる.

連続スペクトルに対する固有関数は, 以下に示す規格化された直交関係式を満足させることができる.

$$\langle \psi_k(z), \psi_{k'}(z) \rangle = \delta(|k| - |k'|) \quad (24)$$

ここで, デルタ関数の引数の波数の絶対値をとる理由は連続スペクトルの領域は複素数の領域にまたがっているためである. また, 式(24)は T の自己共役性より相異なる固有値に対する固有関数が直交すること, ψ_k の2乗の積分値の発散はデルタ関数を用いて押さえることができることを用いて証明できる.

なお, 式(24)のように固有関数を規格化するためには, 式(18)に現れた未定係数 A および B を設定すれば良い.

$$\frac{\pi}{2} \frac{\bar{\nu}_L}{|k|} \rho_L (A^2 + B^2) = 1 \quad (25)$$

このように, 連続スペクトルに対する固有関数の規格化は基盤層の関数形のみで決められる点に大きな特徴がある.

4. Green 関数のスペクトル分解表現

4.1 離散および連続スペクトルの固有関数を用いた Green 関数の表現

これまでに示してきた, 離散および連続スペクトルに対する固有関数 $\varphi_n(z)$ および $\psi_k(z)$ は相異なる固有値を持つ固有関数として互いに直交する. これに基づき, 超関数⁷⁾のクラスまでを含めた関数 $f(z)$ を次のように展開することを考える.

$$f(z) = \sum_{k_n \in \sigma_p} a_n \varphi_n(z) + \int_{\sigma_c} \frac{k}{|k|} b_k \psi_k(z) dk \quad (26)$$

ここに, a_n および $b(k)$ は Fourier 係数で次式で求められる.

$$a_n = \langle f(z), \varphi_n(z) \rangle \quad (27)$$

$$b_k = \langle f(z), \psi_k(z) \rangle \quad (28)$$

式(26)の分岐線積分に現れる $k/|k|$ は, 波数が虚数になった場合でも Fourier 係数が自然な形で求められるために必要である⁴⁾. 式(27)および式(28)を式(26)に代入し, 形式的に積分の順序を交換すれば, 次の固有関数の完全性の表現が得られる.

$$\delta(z - z') = \sum_{k_n \in \sigma_p} \varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z')$$

$$+ \int_{\sigma_c} \frac{k}{|k|} \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') dk \quad (29)$$

ここまで来れば, Green 関数の離散スペクトルと連続スペクトルの固有関数による分解表示が可能になる. まず, 式(3)で定義された波数領域の Green 関数を次のように固有関数で展開する.

$$g_\kappa(z, z') = \sum_{k_n \in \sigma_p} a_n(z') \varphi_n(z) + \int_{\sigma_c} \frac{k}{|k|} b_k(z') \psi_k(z) dk \quad (30)$$

$$\kappa \in \mathcal{C} \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)$$

ここに, $\mathcal{C}$ は複素数全体の集合を示す. すなわち, ここでは波数領域の Green 関数をスペクトルを除く複素波数, すなわちレゾルベント集合²⁾で考察する. 式(3)の Green 関数の定義における非同次項のデルタ関数を単位作用素とみなせば, 逆作用素としての Green 関数は式(12)で考えたレゾルベントに相当する. したがって, ここでの議論はレゾルベント集合上でのレゾルベントの性質を, 固有関数という座標系を設定して調べることになる分けである.

Green 関数を扱ったテキスト⁸⁾に従えば, Green 関数を構成する Fourier 係数は式(3)を用いて,

$$\langle \varphi_n(z), \mathbf{L}_\kappa g_\kappa(z, z') \rangle = -\langle \varphi_n(z), \delta(z - z') \rangle \quad (31)$$

あるいは,

$$\langle \psi_\kappa(z), \mathbf{L}_\kappa g_\kappa(z, z') \rangle = -\langle \psi_\kappa(z), \delta(z - z') \rangle \quad (32)$$

により求められる. ただし,

$$\mathbf{L}_\kappa = D_z + k_\alpha^2 - \kappa^2 \quad (33)$$

としている.

式(31)や式(32)に式(30)を代入して, 直接演算を進めようとする, $\mathbf{L}_\kappa$ に関連した微分演算と分岐線積分の順序の交換の問題にまず直面する. しかし, $\mathbf{L}_\kappa$ の自己共役性を用いることで, たとえば,

$$\langle \psi_\kappa(z), \mathbf{L}_\kappa g_\kappa(z, z') \rangle = \langle \mathbf{L}_\kappa \psi_\kappa(z), g_\kappa(z, z') \rangle \quad (34)$$

とすることができ, 微分演算と分岐線積分の順序の交換の問題は避けることができる. なお, 式(34)では, Green 関数および固有関数が境界条件を満足することを用い, 境界項は現れていない.

また, 内積に関わる積分演算と分岐線積分の順序の交換が次の演算で問題となるが, この交換は Fubini の定理⁷⁾でも正当化できるものではない. これは連続スペクトルの固有関数が Lebesgue 可積分の関数でないことに基づく. しかしながら, デルタ関数を含めた Fourier 解析では, 形式的な積分の順序の交換は良く行われており, これに倣えば, 内積の積分演算と分岐線積分の順序の交換は許されるであろう.

以上の議論をベースに, 式(31)と式(32)を用いて Green 関数を構成する Fourier 係数を求めれば, Green

関数は次のように表現できる。

$$g_{\kappa}(z, z') = \sum_{k_n \in \sigma_p} \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z')}{\kappa^2 - k_n^2} + \int_{\sigma_c} \frac{k}{|k|} \frac{\psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z')}{\kappa^2 - k^2} dk \quad (\kappa \in \mathcal{C} \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)) \quad (35)$$

以上でレゾルベント集合上での Green 関数の固有関数での表現を得ることができた。続いて、極限移行によって、 $\lim_{\kappa \rightarrow k' \in \sigma_c} (g_{\kappa}^{-} - g_{\kappa}^{+})$ の演算を実行してみよう。無限小の正数を ϵ とし、上昇波と下降波を生成する複素波数の位置関係に注意すれば次式を得る。

$$g_{k'}^{\pm}(z, z') = \sum_{k_n \in \sigma_p} \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z')}{k'^2 - k_n^2 \pm i\epsilon} + \int_{\sigma_c} \frac{k}{|k|} \frac{\psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z')}{k'^2 - k^2 \pm i\epsilon} dk \quad (k' \in \sigma_c) \quad (36)$$

したがって、Cauchy の積分定理を用いることで次式を得る。

$$g_k^{-}(z, z') - g_k^{+}(z, z') = \frac{\pi i}{|k|} \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') \quad (k \in \sigma_c) \quad (37)$$

式(37)は分岐線積分の積分核の固有関数による分解に他ならない。しかしながら、誘導プロセスは、連続スペクトルの固有関数とレゾルベント集合上の Green 関数を定義関数とする佐藤の超関数⁹⁾との関連性を示唆している。連続スペクトルを深く理解して行く上で、こうした観点からの検討は今後の課題となろう。

また、式(35)に基づけば、次式を得ることは容易である。

$$\text{Res}_{\kappa=k_n} g_{\kappa}(z, z') = \frac{1}{2k_n} \varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z') \quad (38)$$

したがって、式(6)で表現された Green 関数は離散および連続スペクトルの固有関数を用いて次のように表現されることになる。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} \sum_{k_n \in \sigma_p} H_0^{(2)}(k_n r) P_n(z, z') - \frac{i}{4} \int_{\sigma_c} H_0^{(2)}(kr) Q_k(z, z') |dk| \quad (39)$$

ここに、

$$P_n(z, z') = \varphi_n(z) \varphi_n(z') \rho(z') \quad (40)$$

$$Q_k(z, z') = \psi_k(z) \psi_k(z') \rho(z') \quad (41)$$

であり、 $|dk| = k/|k| dk$ を用いた。

4.2 スペクトル測度を用いた Green 関数の表現

Von Neumann のスペクトル分解定理によれば、任意の自己共役作用素はスペクトル測度²⁾を用いた Stieltjes 積分によって表わされる。ここでは、式(39)に現れた

Green 関数もスペクトル測度を用いた Stieltjes 積分で表現できることを確かめる。

まず、連続スペクトルの領域と離散スペクトルの領域を覆う集合 M を次のように定義する。

$$M = (-i\infty, 0] \cup [0, \infty) \quad (42)$$

そして、集合 M の部分集合 $B \subset M$ に対する集合関数 E_B を次のように定義する。

$$E_B(z, z') = \sum_{k_n \in B} P_n(z, z') + \int_{\sigma_c \cap B} Q_k(z, z') |dk| \quad (43)$$

さらに、 $E_B(z, z')$ を積分作用素の核として、作用素 $\hat{E}_B$ を次のように定義する。

$$\hat{E}_B f = \int_{z_0}^{\infty} E_B(z, z') f(z') dz' \quad (44)$$

このようにして定義された作用素 $\hat{E}_B$ は固有関数の直交性に基づき、射影作用素としての性格を有するようになる。特に、

$$\int_{z_0}^{\infty} P_n(z, z') P_m(z', z'') dz' = \delta_{nm} P_n(z, z'') \quad (45)$$

$$\int_{z_0}^{\infty} Q_k(z, z') Q_{k'}(z', z'') dz' = \delta(|k| - |k'|) Q_k(z, z'') \quad (46)$$

の関係式を用いることで、 $\hat{E}_B$ は次式を満足することが示せる。

$$\hat{E}_{B_1} \hat{E}_{B_2} = \hat{E}_{B_1 \cap B_2} \quad (47)$$

また、固有関数の完全性の表現の式(29)を $\hat{E}_B$ によって表現すれば、式(43)より

$$\hat{E}_{B=M} = I \quad (I: \text{identity operator}) \quad (48)$$

を得る。さらに波数領域の集合 B が $B = \emptyset$ の時には、

$$\hat{E}_{B=\emptyset} = 0 \quad (49)$$

を得るのは自明であろう。また、

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad (B_n \cap B_m = \emptyset, \quad (n \neq m))$$

$$\Rightarrow \hat{E}_B = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \hat{E}_{B_n} \quad (50)$$

も得ることができる。

$\hat{E}_B$ の満足するこれら一連の関係式は $\hat{E}_B$ がスペクトルの測度を与えていることを示す。さらに、式(39)と式(43)の比較によって、Green 関数は次式で表わされることになる。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} \int_M H_0^{(2)}(kr) dE_{B(k)}(z, z') \quad (51)$$

ここで式(51)に現れた $B(k)$ は次のように考える。

$$B(k) = (-i\infty, k) \quad (k: \text{imaginary number}) \quad (52)$$

$$B(k) = (-i\infty, 0] \cup [0, k) \quad (k: \text{real number}) \quad (53)$$

式(51)はスペクトル測度を用いた Green 関数の Stieltjes 積分による表現で、Green 関数のスペクトル分解表示と言うべきものである。スペクトルの測度の導入によって成層波動場の Green 関数における留数定

理からの寄与と分岐点回りの積分の寄与の区別はなく
なる。そして、これらの寄与はスペクトルの概念によっ
て統一されることになる。

ここでの定式化の終わりに、スペクトル測度で成層
波動場の Green 関数を表現することの意義をまとめて
おく。基本的には、スペクトルの測度で Green 関数を
表現することは、Green 関数を固有値問題の視点から、
徹底的に捉え直すことに他ならない。定式化の最後で
見られたように、この結果 Green 関数は媒質の特性の
みを表現する固有関数によって構成されるスペクトル
測度で表現され、Green 関数に寄与する分岐点回りの
積分も留数項もその区別は消失した。Green 関数は、震
源とサイトの応答を結び付ける影響関数として、波動
場の媒質の影響を反映する性質があることは、直感的
には理解されてきたと思われる。しかし、この直感的
な理解は、スペクトル分解の視点の投入によって、数
学的に解明されたと言える。

また、実用的には分岐点回りの積分の積分核も固有
関数によって表現できたことにより、積分核の計算を
効率的に実行できる可能性を得た。従来の方法では震
源の特異性を考慮して、up-going と down-going の波
動を持つ波数領域の Green 関数を計算してから、その
差を取ることで、積分核を計算しなければならない。し
かし、本論文が明らかにしたことは、分岐点回りの積
分の積分核は、震源の特性を考慮せず求めた固有関数
の積で表現される。Green 関数の差を取らずに積分核
を求めることで計算精度の向上も期待できる。

また、定式化の過程で提示したレゾルベント集合上
での Green 関数の固有関数による表現は、連続スペ
クトルに対する固有関数が佐藤の超関数として捉えて行
ける可能性を示した。本論文で扱う問題そのものは古
典的であるが、こうした問題でさえも、現代的な数学
の視点を投入できる場は広がっていると言える。言い
換えれば、抽象的な数学の視点が具体的な応用力学の
場にもたらすものを検討する余地が広がってきている
ものと考えられる。

5. 数値計算例

ここでは、式(51)の Green 関数の表現について
Fig.3 に示す解析モデルを用いて検討する。Fig.3 の
解析モデルは、半無限の弾性流体の基盤層の上に厚さ 1
km の弾性流体が堆積した 2 層からなる層構造のモデル
である。ここでは表層の音波速度を 1.0 km/s、密度を
1.0 g/cm³ とする。また、基盤層の音波速度を 2.0 km/s、
密度を 1.0 g/cm³ とする。Fig.3 の解析モデルは、成層
構造を有する波動場としては、最も単純なものであり、
古典的な手法でも十分扱い得るものである。ここでの
数値計算の目的は、本論文で展開された手法の計算手
法そのものを評価することではなく、Green 関数の表現

Fig. 3 Analyzed model. A surface liquid layer is overlying a liquid half space.

Fig. 4 Dispersion curves for the analyzed model.

に現れたスペクトル測度の具体的な意味を検討するこ
とである。

まず、Fig.3の解析モデルの正規モードすなわち離
散スペクトルの分散曲線を Fig.4 に示す。Fig.4 の分散
曲線は横軸に振動数を、縦軸に正規モードの位相速度
を示している。分散曲線より明らかなように、このモ
デルの最も低い次数のモードにも cut-off frequency が
存在する。すなわち、このモデルでは基本モードが存
在せず、最も低い次数のモードは 1 次モードというこ
とになる。

次に、離散および連続スペクトルに対する固有関数
の形状を Fig.5 ならびに Fig.6 に示す。Fig.5 は振動数
1.0 Hz のときの 1 次モードの離散スペクトルの固有関数
である。良く知られているように、離散スペクトルの
固有関数、すなわち正規モードは表層で振幅が大きく、
基盤層で指数関数的に振幅が減衰するという性質を示
すが、ここでもこうした正規モードに共通の性質を見
出せることに注目しておく。

Fig.6 は振動数 1.0 Hz、波数 0.1 /km に対する連続
スペクトルの固有関数である。離散スペクトルに対す

Fig. 5 Modal shapes for the discrete spectrum.

Fig. 6 Modal shapes for the continuous spectrum.

る固有関数の形状とは異なり、連続スペクトルの固有関数は表層での振幅がむしろ小さくなっている。また、本論文の定式化で示したように基盤層では振幅は三角関数的に振動していることが見て取れる。

このように、離散スペクトルと連続スペクトルの固有関数は互いに対照的な性質を持っていると言える。相反原理を用いて両者の性質を考察すれば、基盤層で振幅が急激に減衰する離散スペクトルの固有関数は振源が基盤層深くにある場合にはそれほど励起されないと考えられる。その反対に、基盤層で振幅が減衰しない連続スペクトルの固有関数は振源が基盤層に深くあった場合でも地表で観測される振幅はそれほど減衰しないと考えられる。言い換えれば、離散スペクトルの固有関数は表層の性質を反映し、連続スペクトルの固有関数は基盤層の性質を反映する。

次にスペクトル表示された Green 関数を構成する $dE_{B(k)}$ の性質について検討する。 E_B および $B(k)$ の定義を参照(式(43), 式(52)および式(53)) することで、 $k \in \sigma_c$ のとき $dE_{B(k)}$ は次のように表わされることが分かる。

$$dE_{B(k)}(z, z') = Q_k(z, z')|dk| \quad (54)$$

Fig. 7 Properties of the spectral family.

Fig. 8 Properties of the spectral family.

Fig. 9 Properties of the spectral family.

また、 k が離散スペクトル領域にある場合には次式となる。

$$dE_{B(k)}(z, z') = \sum_{k_n \in [k, k+dk]} P_n(z, z') \quad (55)$$

Fig. 7 から Fig. 9 は $dE_{B(k)}$ を波数 k に対して図化したものである。横軸の波数の負の領域は負の虚数を表わしていることに注意する。また、観測点の z は自由

表面から深さ 0.9 km の位置にとっている。Fig. 7 は振源の位置 z' を自由表面から深さ 0.5 km の位置にとり、 $dE_{B(k)}(z, z')$ を表わしたものである。ただし、連続スペクトル領域では $|dk| = 0.01 / \text{km}$ としている。Fig. 7 より明らかなように、このグラフは離散スペクトルと連続スペクトルの強度を表わしていることになる。Green 関数が留数定理からの寄与と分岐点回りの積分に分解されるという見解からは、このグラフはそれぞれ留数項と分岐点回りの積分の項の寄与の大きさを表わすことになる。一方、前述の議論のように連続スペクトルは波動場の深部の特性を、離散スペクトルは波動場の表層の特性を表わすという見解からは、このグラフは波動場の媒質の特性を表わすものに他ならない。具体的には、離散スペクトルは、水平方向に伝播する波動のうち、増幅される波動の波数とその増幅の度合いを示す。一方、連続スペクトルは、鉛直方向に伝播する波動の増幅特性を波数に関連付けて表わしている。そして、媒質の特性は増幅特性として現れることになる。

Fig. 8 は振源の位置 z' を自由表面から深さ 2.0 km の位置にとり、 $dE_{B(k)}(z, z')$ を表わしたものである。振源の位置が表層から基盤層にシフトしたことにより、離散スペクトルの強度が Fig. 7 に比べ低下していることが理解できる。一方、連続スペクトルの強度は振源の位置に関わらずほぼ一定である。離散スペクトルの強度の低下ならびに、連続スペクトルの強度がほぼ一定に保たれることの理由は、離散および連続スペクトルの固有関数の形状の考察で述べたことに帰着することができよう。

Fig. 9 は振源の位置 z' を自由表面から深さ 5.0 km の位置にとり、 $dE_{B(k)}(z, z')$ を表わしたものである。Fig. 8 に比べさらに振源の位置が媒質の深部にシフトしたため、ここでは離散スペクトルの寄与はほとんど見られない。このことは、振源の位置が十分深ければ、表面波に乱されることなく、媒質深部の特性を調べることができる可能性を示唆している。

ここで、 z' の変化に応じた連続スペクトルの形状の変化についてコメントする。Fig. 7 から Fig. 9 より明らかなように、振源の位置が深くなれば、連続スペクトルの強度の変化が激しくなっている。これは、連続スペクトルの固有関数の特徴で説明が付く。連続スペクトルの固有関数は、基盤層で式 (19) の形を持つが、 z が増大することで v_L のわずかな変動で固有関数の振幅の変動は急激になってくる。これに付随する形で、連続スペクトルの強度の変動も急激になるわけである。しかしながら、連続スペクトルの包絡線そのものは、あるいは全体的な強度そのものは、 z によらずあまり変わらない。これは、連続スペクトルの固有関数が基盤層で三角関数的な振動を示すために、 z の増大は結局はスペクトルの全体的な強度には影響しないことによる。

Fig. 10 Comparison of Green's function.

最後に、スペクトル表示によって求めた Green 関数と式 (1) を直接積分して求めた Green 関数を比較することで本論文で示した Green 関数のスペクトル表示の妥当性を検証する。比較の結果を Fig. 10 に示す。Fig. 10 では横軸に振源と観測点との水平距離を、縦軸に Green 関数の値を示している。また、振源の深さは自由表面から深さ 0.5 km の位置にとり、加振振動数は 1.0 Hz としている。また、観測点の深さは自由表面から 0.9 km である。Fig. 10 の中で、実線はスペクトル表示によって求めた Green 関数、プロットは直接積分によって求めた Green 関数である。両者は極めて良い一致を示しており、本論文で示した Green 関数の表現の妥当性が検証されている。

なお、ここで Green 関数の直接積分は以下の方法で行った。まず、 k が大きいときの $E_k(z, z')$ の次の性質、

$$E_k(z, z') \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2k} \exp(-|z - z'|k) \quad (56)$$

を用いて、無限積分を有限なある波数で打ち切る。すなわち、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty k J_0(kr) E_k(z, z') dk \\ &= \int_0^N k J_0(kr) E_k(z, z') dk \\ &+ \int_N^R k J_0(kr) (E_k(z, z') - \frac{1}{2k} \exp(-|z - z'|k)) dk \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty J_0(kr) \exp(-|z - z'|k) dk \\ &- \frac{1}{2} \int_0^N J_0(kr) \exp(-|z - z'|k) dk \end{aligned} \quad (57)$$

ここに、 N と R は十分大きな正数で、特に N から R の区間に正規モードの極が入り込まないように設定する。また、式 (57) の計算では、次の公式を使用する。

$$\int_0^\infty J_0(kr) \exp(-|z - z'|k) dk = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (58)$$

次に、区間0から N までの積分をCauchyの主値と正規モードの寄与である留数項に分離する。

$$\int_0^N k J_0(kr) E_k(z, z') dk = \text{P.V.} \int_0^N k J_0(kr) E_k(z, z') dk - \pi i \sum_j \text{Res} \quad (59)$$

また、Cauchyの主値積分は次のように評価する。

$$\begin{aligned} \text{P.V.} \int_0^N k J_0(kr) E_k(z, z') dk \\ = \int_0^N (k J_0(kr) E_k(z, z') - \sum_j \frac{A_j}{k - k_j}) dk \\ + \text{P.V.} \int_0^N \sum_j \frac{A_j}{k - k_j} dk \end{aligned} \quad (60)$$

ここに、 k_j は正規モードの波数であり、

$$A_j = \text{Res}_{k=k_j} (k J_0(kr) E_k(z, z')) \quad (61)$$

を意味する。また、

$$\text{P.V.} \int_0^N \sum_j \frac{A_j dk}{k - k_j} = \sum_j A_j (\ln(N - k_j) - \ln(k_j)) \quad (62)$$

に注意する。式(60)の右辺第1項の積分は特異点を含まない有限積分であるから評価は容易である。波数積分の実行に関しては $N = 10 / \text{km}$, $R = 20 / \text{km}$ とし、式(60)の右辺第1項の数値積分の波数の刻みは $\Delta k = 0.01 / \text{km}$ とした。また、スペクトル表示でGreen関数を計算する場合には、連続スペクトル領域を離散化している。ここでは、虚数の波数は $-20i$ まで考慮し、波数の刻みは $\Delta k = 0.1 / \text{km}$ とした。

6. 結論

本論文は、スカラー成層波動場のGreen関数の表現に現代的な数学の視点を投入することを試みた。この結果、スカラー成層波動場のGreen関数は、スペクトル測度を用いたStieltjes積分によって表現され、Von Neumannによるスペクトル分解定理の表現に対応したものが得られた。このスペクトル分解表示によれば、Green関数を構成する留数項と分岐点回りの積分の区別は消え、媒質の特性を表現するスペクトルの測度が両者を統一した。

こうした一連の数学的形式から、明らかになった力学的な見解は、スペクトルの測度は離散スペクトルと連続スペクトルからの寄与に分けられ、離散スペクトルは表層の特性を、連続スペクトルは媒質の深部の特性を波動の増幅特性という形で表現することであった。古典的なLambによる見解は分岐点回りの積分による波動は実体波で、留数計算で得られる波動は表面波であるということであったが、本論文で得られた見解によれば、留数項および分岐点回りの積分もいずれも媒質の特性を表現するものである。

こうした、力学的な見解の他に、ここで得られたGreen関数の表現は、分岐点回りの積分の数値計算の精度を向上させる可能性がある。これは、分岐点回りの積分の積分核が方程式の同次解としての固有関数に分解できたためであり、従来の方法のように振源の特異性を考慮して求めた異なる向きの波動を持つGreen関数の差を取る必要がなくなったことである。

また、定式化の過程で示した、レゾルベント集合上でのGreen関数の固有関数による表現は、佐藤の超関数とスペクトルに対する固有関数との関連性を示した。ここで扱った問題そのものは古典的なものであるが、現代数学の視点によって得られる、具体的な問題としての応用力学上の見解の可能性について、検討の余地は広がっていると言える。

Appendix-A 線形作用素に関するいくつかの性質について

このAppendixでは本文で用いている線形作用素のいくつかの性質についてまとめておく。ここで記述していることがらは証明を含め文献⁶⁾から引用している。

ここでは、線形作用素を A で表わすことにする。まず、線形作用素 A の核あるいは零空間とは、次のように表わされる集合である。

$$\ker A = \{x \in X | Ax = 0\} \quad (\text{A.1})$$

ここに、 X は A の定義域であり、 A が有界作用素の場合にはHilbert空間全体を考えれば良い。また、 A が非有界作用素の場合にはHilbert空間の部分空間を考えて行くことになる。 X が A の定義域であることを、

$$X = \text{dom } A \quad (\text{A.2})$$

で表わす。

次に A の値域とは、

$$\text{ran } A = \{Ax | x \in X\} \quad (\text{A.3})$$

で定義される集合である。

Hilbert空間の二つの元 x と y についての内積を $\langle x, y \rangle$ で表わすことにする。

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (\text{A.4})$$

が成立するとき、 A^* を A の共役作用素という。ここで、 $\text{dom } A = \text{dom } A^*$ でかつ $A = A^*$ が成立するとき、 A は自己共役であると言う。

作用素の性質として興味深いのは、

$$\ker A = (\text{ran } A^*)^\perp \quad (\text{A.5})$$

である。 A が有界であれば、これは次のように証明される。

$$\begin{aligned} x \in \ker A &\iff Ax = 0 \\ &\iff \langle Ax, y \rangle = 0 \\ &\iff \langle x, A^*y \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\iff x \in (\text{ran } A^*)^\perp \quad (\text{A.6})$$

式(A.5)において A を A^* で置きかえれば,

$$(\ker A^*)^\perp = (\text{ran } A)^{\perp\perp} \quad (\text{A.7})$$

を得る. ここで $A^{**} = A$ を用いている. また, 直交分解定理⁶⁾より Hilbert 空間上の部分空間 $\mathcal{M}^{\perp\perp}$ は閉部分空間になるから, $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{M}}$ となる. ここに, $\overline{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ の閉包と呼ばれるもので, 概念的に言えば集合 $\mathcal{M}$ の点列を用いて近づいて行ける点をすべて加えて得られる集合である. これより,

$$(\ker A^*)^\perp = \overline{\text{ran } A} \quad (\text{A.8})$$

が得られる. ただし, $\overline{\text{ran } A}$ は A の値域の閉包である.

参考文献

- 1) Lamb, H: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **203**, pp. 1-42, 1904.
- 2) 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学(共立講座 21 世紀の数学), 共立出版, 1997
- 3) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.: 量子力学I, (佐々木健, 好村 滋洋訳), 東京図書, 1983
- 4) 東平光生: 離散固有値および連続固有値を用いた Green 関数のスペクトル分解表示について, 土木学会論文集, No. 577/I-41, pp.245-256, 1997
- 5) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.
- 6) 日合文雄, 柳研二郎: ヒルベルト空間と線形作用素, (数理情報科学シリーズ 10), 牧野書店, 1995
- 7) 洲之内治男: 改訂 関数解析入門, サイエンス社, 1994
- 8) 今村勤: 物理と Green 関数, 岩波書店, 1978
- 9) 金子晃: (新版) 超関数入門, 東京大学出版, 1996

(1998 年 4 月 24 日 受付)