積層 Mindlin 板要素を用いた均質化法による 道路舗装体の有限要素解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR PAVEMENT STRUCTURE BASED ON
HOMOGENIZATION METHOD AND LAYERED MINDLIN ELEMENT

伊田徹士*・榎山和男**・石川俊明***・宇尾朋之****

Tetsuji IDA, Kazuo KASHIYAMA, Toshiaki ISHIKAWA and Tomoyuki UO

*学生会員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

***正会員 工修 清水建設(株) 土木事業本部 (〒105-8007 東京都港区芝浦町 1-2-3)

****正会員 工修 鹿島建設(株) 東京支店 (〒107-8477 東京都港区元赤坂 1-3-8)

This paper presents a multi-scale finite element method for the analysis of pavement structure based on homogenization method and layered Mindlin element. The homogenization method is employed to consider the effect of mechanical behaviors of microscopic structures of pavement. The composite plate theory is also introduced to obtain a homogenized elastic tensor. The present method is applied to two numerical examples; 2-layer plate analysis and FWD (falling weight deflector) test analysis, and the computed results are compared with theoretical, experimental and 3-D computational results. The method is shown to be a useful method for the large-scale analysis of pavement structures.

Key Words : *homogenization method, layered Mindlin element, finite element method, falling weight deflectometer*

1. はじめに

道路舗装体の材料として用いられているアスファルトコンクリートは、砕石骨材をマトリックス材とした複合材料である。この道路舗装体の力学的特性を知るために、これまでいくつかの有限要素法に基づく数値解析手法が提案されてきた¹⁾²⁾³⁾。しかし、従来提案された道路舗装体の構造解析手法はいずれも、アスファルトコンクリートを要素平均の材料定数を持つ単一の材料と仮定して解析を行う巨視的解析であり、骨材とアスファルトモルタルの個々の材料特性や幾何学的形状特性を考慮することが困難であった。

上記の問題点を解決する複合材料の構造解析手法として、近年均質化法が注目されている⁴⁾⁵⁾⁶⁾。均質化法はマルチスケール法の一つであり、不均質な材料の物性を等価で均質な材料物性に置き換えることができる手法である。この手法によれば、内部の微視的構造を考慮した巨視的解析を効率よく行うことができ、また巨視的解析により得られた変位から内部の微視的構造の応力や変位を求めることが可能である。土木・建築材料への応用としては、永井・山田ら⁷⁾⁸⁾⁹⁾によりセメントコンクリートに対して、著者ら¹⁰⁾によりアスファルトコンクリートに対して均質化法の適用が行われており、それぞれその有効性が示されている。しかし、道路舗装体への均質化法の適用事例はこれまでのところ見当たらない。道路舗装体解析の場合には、解析対象

は比較的広く、かつ構造は表層、路盤、路床などのように層状構造となっており、各層において材料物性が異なっている。このため、均質化法による舗装体の純粋な3次元解析は計算時間および計算機容量の面で解析が困難となる場合が多い。

そこで、本論文では上記の問題点を改善する効率的な解析手法として、道路舗装体を積層 Mindlin 板要素に基づく弾性平板モデルにより近似し、それに均質化法を導入するといったマルチスケール解析手法を提案する。板理論を用いた均質化法によるマルチスケール解析は、伊根・弓削¹¹⁾により遮音効果の向上を目的とした制振材に応用され、制振材を一枚の平板でモデル化してその力学的挙動について検討している。しかし、道路舗装体の場合には各層が材料物性の異なる複合材料であり、一枚の平板モデルにより舗装体の力学的挙動を正確に把握することは困難である。そこで、本論文では、剛性の異なる複数の平板を理論的に等価な剛性を持つ一つの層に変換できる複合平板理論¹²⁾を導入した。なお、板要素を用いる場合、舗装体の板厚方向の複合材料物性の取り扱いが一般の薄板理論では不可能となる。本論文では、この解決策として積層理論¹³⁾を用いる。積層理論を用いることで、一要素内の板厚を複数に分割し、分割部分それぞれの異なる材料物性を要素内で平均化することにより、各要素の材料構成関係を組み立てることができる。さらに、この積層 Mindlin 板要素を用いることで、3次元のボクセル要素で表現さ

図-1 Mindlin 板の変位場

図-2 Mindlin 板の概念図

れる複合材料のモデルデータを簡便に用いることができ、材料内部の材料配置を考慮した、準3次元的な定式化が簡単にかつ理論的に行うことが可能となる。

本論文では、まず積層 Mindlin 板理論に基づく基礎方程式を示し、次いでそれに均質化理論と複合平板理論を導入する過程とその定式化方法の詳細を述べる。そして、数値解析例として、理論解の存在する簡単な2層複合平板解析と応用例として実際に行われた道路舗装体の FWD 試験を取り上げ、それらの問題に本手法を適用した。本手法の有効性と妥当性を理論解、実験結果および3次元解析結果との比較のもとに示す。

2. 積層 Mindlin 板理論に基づく基礎方程式

線形弾性体の支配方程式及び材料構成式は式(1)、式(2)で示される。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho \bar{b}_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x) = D_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u) \quad (2)$$

ここで、 σ は応力、 ε はひずみ、 ρ は密度、 b は物体力、 D は弾性テンソルを示す。また、 Ω は解析対象の領域を意味し、Mindlin 板理論では式(3)のように規定される。

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 \in [-h/2, h/2], (x_1, x_2) \in A \in R^2 \} \quad (3)$$

ここで、 R は実数の集合体を表し、 h は平板の板厚、 A は平板の面積である。以下では、Mindlin 板理論に基づいた材料構成関係の組み立て手順について示す。まず、Mindlin 板要素内における自由度 u として、図-1に示すように、 x_1, x_2, x_3 方向の変位成分を順に u_1, u_2, u_3 とする。(式(4))。

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

次に、 θ_1 および θ_2 を xz 面と yz 面それぞれに垂直な中央面の回転変位とすると、それぞれの変位は式(5)のよう

に表すことができる。

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} -x_3 \theta_1(x_1, x_2) \\ -x_3 \theta_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

この変位成分を用いて、ひずみ成分が導かれる(式(6))。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= -x_3 \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right) = x_3 \kappa_{ii} \quad (i = 1, 2) \\ \gamma_{12} &= -x_3 \left\{ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right\} = x_3 \kappa_{12} \\ \gamma_{i3} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - \theta_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで ε は鉛直ひずみ、 γ は回転ひずみであり、 κ_1, κ_2 は変形後の平板の曲率、 κ_{12} はねじれ率である。応力とひずみの関係式としては、平面応力問題と考え式(7)となる。

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \\ \tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比である。次に、 x_3 方向に限定された解析対象の領域(式(3))で材料構成関係を組み立てる。本構成式を示すために、図-2で示されるモーメント成分 M_1, M_2, M_{12} と板厚方向のせん断力 Q_1, Q_2 を用いる(式(8))。

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13} dx_3 = G' h k \gamma_{13} \\ Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{23} dx_3 = G' h k \gamma_{23} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 τ_{23}, τ_{31} は板厚方向のせん断応力である。 $G' = E/2(1+\nu)$ はせん断弾性係数である。また、 k はせん断応力が、実際には x_3 方向に一樣ではないことを考慮した補正係数であり、 $k = \pi^2/12 = 0.8224$ である。式(8)のようにして得られた材料構成関係をまとめると式(9)

のようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} M \\ Q \end{matrix} \right\} &= \begin{bmatrix} D' & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \gamma \end{matrix} \right\} \\ \{M\}^T &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_{12} \end{bmatrix}, \{Q\}^T = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \\ \{\kappa\}^T &= \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_{12} \end{bmatrix}, \{\gamma\}^T = \begin{bmatrix} \gamma_{13} & \gamma_{23} \end{bmatrix} \\ [D'] &= d \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \\ d &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E x_3^2}{1-\nu^2} dx_3 \\ [G] &= \begin{bmatrix} G' h k & 0 \\ 0 & G' h k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 d は、積層理論¹³⁾に基づいた曲げ剛性であり、実際には積分範囲を m 層に等分割し、各分割区間において積分することにより構成される。要素の上から第 i ($i = 1, 2, \dots, m$) 番目の積層を第 i 層とすると、その曲げ剛性は式(10)のように変換が可能である。

$$d = \sum_{i=1}^m \frac{E_i h^3}{3(1-\nu_i^2)} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{m} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{i-1}{m} \right)^3 \right\} \quad (10)$$

以上で得られた式(9)が最終的な材料構成式(式(2))となる。

3. 均質化理論と複合平板理論の適用

本章では、前章で示した基礎方程式に対して均質化法の適用を考える。均質化法を用いることで、不均質な材料の材料物性を等価で均質な材料の物性に置き換えることができる。この理論を舗装体を構成する各々の層において適用することにより、舗装体各層の均質化弾性テンソル(図-3中(A))を求める。次に、剛性の異なった複数の層を等価な剛性を持つ1層に変換する(図-3中(B))ために、複合平板理論¹²⁾を用いる。このようにして、複合材料からなる複数の弾性テンソルを均質化し、さらに複合化することにより、全体座標系における弾性テンソルが求まる。この弾性テンソルを用いて、舗装体内部の応力解析が行えることとなる。本章では、その定式化の手順について説明する。

3.1 均質化法の適用(ひずみ成分)

舗装体を構成する各々の層(巨視的構造)の平均物性値を評価するために、均質化法を用いる。ここで、巨視的構造の位置を表す全体座標系 $X(x_1, x_2, x_3)$ とは別に、周期的に配置されている微視的構造内部の位置を表す座標系 $Y(y_1, y_2, y_3)$ (図-4中①)を導入する。双方の座標系は異なるスケールで定義されているため、そ

図-3 弾性テンソルの均質化と複合化

図-4 本手法の概念図

の関係尺度である ϵ を用いている(式(11))。

$$x_i = \epsilon y_i \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

なお、 x_3 と y_3 は双方の座標系における面外方向の座標軸であり、互いに独立している。

全体座標系におけるMindlin板要素の変位関数 u_i^ϵ (式(4))は、それぞれの座標系の変位関数と関係尺度 ϵ を用いて式(12)のように表すことができる。

$$u^\epsilon(x, y) = u^0(x, y) + \epsilon u^1(x, y) + \epsilon^2 u^2(x, y) + \dots + \epsilon^n u^n(x, y) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u^0(x, y) &= u^0(x) \\ \{u^0\}^T &= \begin{bmatrix} u_3^0 & \theta_1^0 & \theta_2^0 \end{bmatrix} \\ \{u^1\}^T &= \begin{bmatrix} u_3^1 & \theta_1^1 & \theta_2^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、添え字の ϵ は微視的構造への依存性を示す。次に、この変位関数を1次の項まで考慮してひずみ成分 ϵ_{ii}^ϵ を考える。基本的に全体座標系におけるひずみ成分は、それぞれの座標系におけるひずみ成分を足しあわせることで得られる。 γ_{i3}^ϵ は、座標系 Y での微分連鎖律に注意すると、最終的なひずみ成分は式(13)のように得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ii}^\epsilon &= -x_3 \left(\frac{\partial \theta_i^\epsilon}{\partial x_i} \right) = -x_3 \left(\frac{\partial \theta_i^0}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta_i^1}{\partial y_i} \right) \quad (i = 1, 2) \\ \gamma_{12}^\epsilon &= -x_3 \left(\frac{\partial \theta_2^\epsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_1^\epsilon}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x_3 \left(\frac{\partial \theta_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2^1}{\partial y_1} + \frac{\partial \theta_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_1^1}{\partial y_2} \right) \quad (13) \\
\gamma_{i3}^\epsilon &= \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_i} - \theta_i^\epsilon \\
&\cong \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_i} - \theta_i^0 \right) \quad (i=1,2)
\end{aligned}$$

ここで、ひずみ成分を巨視的成分 ϵ^0 と微視的成分 ϵ^1 に分けて表示すると式(14)のように表される。

$$\{\epsilon^\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^1\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\{\epsilon^0\}^T &= \left\{ \epsilon_f^0 \quad \epsilon_s^0 \right\} \quad \{\epsilon^1\}^T = \left\{ \epsilon_f^1 \quad \epsilon_s^1 \right\} \\
\{\epsilon_f^0\}^T &= \left\{ -x_3 \frac{\partial \theta_1^0}{\partial x_1} \quad -x_3 \frac{\partial \theta_2^0}{\partial x_2} \quad -x_3 \left(\frac{\partial \theta_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_1^0}{\partial x_2} \right) \right\} \\
\{\epsilon_f^1\}^T &= \left\{ -x_3 \frac{\partial \theta_1^1}{\partial x_1} \quad -x_3 \frac{\partial \theta_2^1}{\partial x_2} \quad -x_3 \left(\frac{\partial \theta_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_1^1}{\partial x_2} \right) \right\} \\
\{\epsilon_s^0\}^T &= \left\{ \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} - \theta_1^0 \right) \quad \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} - \theta_2^0 \right) \right\} \\
\{\epsilon_s^1\}^T &= \left\{ \left(\frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \right) \quad \left(\frac{\partial u_3^1}{\partial y_2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

ここで、下付添え字 f, s はそれぞれ面内応力成分と面外応力成分を表す。

3.2 仮想仕事の原理式

前章で示した材料構成式(式(2))をもとに、弾性体の仮想仕事の原理式を導くと式(15)のようになる。

$$\int_{\Omega^\epsilon} \bar{D}_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^\epsilon}{\partial x_j} d\Omega^\epsilon = \int_{\Omega^\epsilon} f_i v_i^\epsilon d\Omega^\epsilon \quad (15)$$

ここで、 v は仮想変位、 f は舗装体内部に働く物体力を意味する。この仮想仕事の原理式に式(14)を代入すると内力仕事を巨視的構造と微視的構造のひずみ成分に分けることができる。つまり、式(16)のように変換が可能である。

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^\epsilon} \bar{D}_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega^\epsilon + \int_{\Omega^\epsilon} \bar{D}_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial y_l} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} d\Omega^\epsilon \\
&= \int_{\Omega^0} f_i v_i d\Omega^0 \quad (16)
\end{aligned}$$

式(16)が成立するためには、式(17)と式(18)が恒等的に成立すればよい。そのようにして、それぞれの座標系における支配方程式が得られる。

◆微視的方程式

$$\int_{\Omega^\epsilon} \bar{D}_{ijkl}^\epsilon \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} d\Omega^\epsilon = 0 \quad (17)$$

◆巨視的方程式

$$\int_{\Omega^\epsilon} D_{ijkl}^H \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega^\epsilon = \int_{\Omega^\epsilon} f_i v_i^0 d\Omega^\epsilon \quad (18)$$

3.3 微視的構造の支配方程式

次に、微視的構造の変位 u_i^1 は、微視的構造内の乱れを表す特性関数(χ, ρ)を用いて式(19)のように表現できると仮定する。

$$\theta_k^1(x, y) = -\chi_k^{pq}(x, y) \frac{\partial \theta_p^0(x)}{\partial x_q} \quad (k=1,2)$$

$$\begin{aligned}
u_3^1(x, y) &= -\left\{ \rho_3^{13}(x, y) \left(\frac{\partial u_3^0(x)}{\partial x_1} - \theta_1^0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \rho_3^{23}(x, y) \left(\frac{\partial u_3^0(x)}{\partial x_2} - \theta_2^0 \right) \right\} \quad (19)
\end{aligned}$$

ここでの χ, ρ はそれぞれ面外方向成分(3成分)と面内方向成分(2成分)の特性関数であり、式(20)のように表される。

$$\begin{aligned}
\{\chi_k\}^T &= \left[\chi_k^{11}(x, y) \quad \chi_k^{22}(x, y) \quad \chi_k^{12}(x, y) \right] \\
(k=1,2) \quad (20) \\
\{\rho_k\}^T &= \left[\rho_3^{13}(x, y) \quad \rho_3^{23}(x, y) \right]
\end{aligned}$$

特性関数により、巨視的変形に結びつけられた微視的構造の変位 $\{u^1\}$ の式(式(19))を用いて、それを微視的方程式(式(17))に代入すると式(21)が得られる。

$$\int_{\Omega^\epsilon} D_{ijkl}^\epsilon (\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l}) \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} d\Omega^\epsilon = 0 \quad (21)$$

ここで、 Y の周期関数である $\Psi(y)$ には次の関係(平均化原理)があることを利用する。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi(x, x/\epsilon) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \Psi(x, y) dY d\Omega \quad (22)$$

式(22)と式(2)を式(21)に代入すると全領域における方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{1}{|Y|} \int_Y \int_{x_3} D_{ijkl}^\epsilon (\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l}) \\
&\quad \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dx_3 dy dA = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

ここで、 $dA = dx_1 \times dx_2$ 、 $dy = dy_1 \times dy_2$ であり、 $|Y|$ は微視的構造の面積を表す。また、巨視的構造のひずみに関係なく式(23)が成立するには式(24)を満たすことが必要となる。

$$\int_Y \int_{x_3} D_{ijkl}^\epsilon (\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l}) \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} dx_3 dy = 0 \quad (24)$$

これを有限要素法を用いて解くことにより、節点で離散化された未知の関数である特性関数 χ_k^{ml} が求められる。つまり、式(24)から、ひずみ成分の数(5成分)の特性関数が求まる。なお、 x_3 方向の積分は積層理論によって行う。

3.4 巨視的構造の支配方程式とその物性値

巨視的構造の支配方程式(式(18))の解は、特性関数を用いて式(25)のように表される。

$$\int_A D_{ijkl}^H \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dA = \int_A \int_{x_3} f_i v_i^0 dx_3 dA \quad (25)$$

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \int_{x_3} \bar{D}_{ijkl}^\epsilon (\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l}) dx_3 dy \quad (26)$$

ここで、 D_{ijkl}^H は均質化された巨視的構造の物性値である。もし、舗装体にあたる巨視的構造を1枚の平板でモデル化できる場合には、ここで得られた物性値(式(26))を巨視的方程式(式(25))に代入すればよい。しかし、実際の舗装体は複数の複合材料が重なり合うことで構成されており、特に平板でモデル化する場合は、数枚の平板が重なり合っていることが考えられる。この状態であると、それぞれの層(巨視的構造)の均質化された物性値を求めてさらには、重なり合ったことによる剛性変化をなんらかの方法で評価しなければならない。このように巨視的構造の平板が重なり合ったことによる物性値の変化を考慮するためには、次節で示す複合平板理論の導入が有効である。

3.5 複合平板理論の導入

巨視的構造の平板が n 層重なり合っているとする。上から $s(s=1,2,\dots,n)$ 層の巨視的構造における均質化された弾性テンソルは式(27)のようになる。

$$D_{ijkl}^{Hs} = \frac{1}{|Y^s|} \int_Y \int_{x_3} \bar{D}_{ijkl}^s (\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mns}}{\partial y_l^s}) dx_3 dy \quad (27)$$

複数の巨視的構造が存在するということは、本来の均質化理論に基づく、それぞれの巨視的構造における座標系をあらかじめ用意して定式化する必要がある。しかし、ここでは全ての巨視的構造のサイズが同じとし、さらにはその内部に混在する微視的構造のサイズも同じであることに加え、複合平板理論(図-4中②)を用いて統合化することにより、新たな座標系を用意することなく、微視的、巨視的、各一つの座標系のみで簡単に各物性値を求めることができる。上記の仮定は、道路舗装体構造については成立する仮定である。

n 層の巨視的構造がその境界面で完全に接合された平板を複合平板と呼ぶ。複合平板が曲げ変形を受けた場合、内部の応力分布と同じ応力分布が得られるであろう厚さを持つ1層の平板に置換することを考える。本研究で取り扱う複合平板のモデルは図-4中②に示すとおりである。上の層から第1層、その下の層を第2層とし、 i 番目の層を第 i 層、最も下にある層(n 番目の層)を第 n 層とする。いま、第1層下面から $\eta(-\infty < \eta < \infty)$ 上方に複合平板の中立面が存在すると仮定する。そして、各平板が曲率半径 R を持つとき、その曲げ応力は $\sigma_i = \frac{\bar{E}_i}{1-\bar{\nu}_i^2} \frac{x_3}{R}$ のようになる。ここで、 $\bar{E}_i$ 、 $\bar{\nu}_i$ は上から第 i 層に混在する複合材料の体積平均した弾性係数とポアソン比である。複合平板全体の曲げ応力の厚さ方向に関しての総和が0であることを利用することによって、式(28)が得られる。

$$\int_{\eta-h_1}^{\eta} \frac{\bar{E}_1}{1-\bar{\nu}_1^2} \frac{x_3}{R} dx_3 + \int_{\eta}^{\eta+h_2} \frac{\bar{E}_2}{1-\bar{\nu}_2^2} \frac{x_3}{R} dx_3$$

$$+ \dots + \int_{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_{i-1})}^{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_i)} \frac{\bar{E}_i}{1-\bar{\nu}_i^2} \frac{x_3}{R} dx_3 \\ + \dots + \int_{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_{n-1})}^{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_n)} \frac{\bar{E}_n}{1-\bar{\nu}_n^2} \frac{x_3}{R} dx_3 = 0 \quad (28)$$

ここで、 h_i は第 i 層の板厚である。そして、 R は同一平板要素内で一定であることに注意し、式(28)を解くことにより、中立面の位置 η が次式により求まる(式(29))。

$$\eta = \frac{\alpha_1 h_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(h_i + 2 \sum_{k=2}^{i-1} h_k \right)}{2 \sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (29)$$

$$\alpha_i = \frac{\bar{E}_i h_i}{1-\bar{\nu}_i^2}$$

次に、材料構成関係を組み立てることを考える。式(9)を参考にして、特にモーメント成分 M_1^ϵ を考えると式(30)が得られる。

$$M_1^\epsilon = \int_{\eta-h_1}^{\eta} \frac{\bar{E}_1}{1-\bar{\nu}_1^2} (\kappa_1^\epsilon + \bar{\nu}_1 \kappa_2^\epsilon) x_3^2 dx_3 \\ + \int_{\eta}^{\eta+h_2} \frac{\bar{E}_2}{1-\bar{\nu}_2^2} (\kappa_1^\epsilon + \bar{\nu}_2 \kappa_2^\epsilon) x_3^2 dx_3 \\ + \dots + \int_{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_{i-1})}^{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_i)} \frac{\bar{E}_i}{1-\bar{\nu}_i^2} (\kappa_1^\epsilon + \bar{\nu}_i \kappa_2^\epsilon) x_3^2 dx_3 \\ + \dots + \int_{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_{n-1})}^{\eta+(h_2+h_3+\dots+h_n)} \frac{\bar{E}_n}{1-\bar{\nu}_n^2} (\kappa_1^\epsilon + \bar{\nu}_n \kappa_2^\epsilon) x_3^2 dx_3 \quad (30)$$

同様に M_2^ϵ 、 M_{12}^ϵ を考えると、最終的に複合平板の材料構成関係が式(31)のように得られる。

$$\left\{ \frac{M^\epsilon}{Q^\epsilon} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{M_i^\epsilon}{Q_i^\epsilon} \right\} + \left\{ \frac{M_a^\epsilon}{0} \right\} \quad (31) \\ = [D^H] \left\{ \frac{\kappa^\epsilon}{\gamma^\epsilon} \right\}$$

$$[D^H] = \left[\begin{array}{c|c} \sum_{i=1}^n [D'^{Hi}] + [D_a'^H] & 0 \\ \hline 0 & [G^{Hi}] \end{array} \right] \quad (32)$$

ここで、 $[D'^{Hi}]$ は第 i 層で均質化された $[D']$ である。また、 $[D_a'^H]$ は合成版の中立軸の位置 η を用いて式(33)のように表される。

$$[D_a'^H] = \left[A [D'^{H1}] + \sum_{i=2}^n (B_i [D'^{Hi}]) \right] \quad (33)$$

$$A = 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta}{h_1} \right)^2$$

図-5 リンク要素の概念図

$$B_i = 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta + \sum_{k=2}^{i-1} h_k}{h_i} \right)^2$$

$[D_a^H]$ は、層の境界面が完全に接着している状況（ボンド構造）のときに生じる付加項であり、接着していない状態（アンボンド構造）のときは無視する。

また、 n 層からなる複合平板の $(n-1)$ だけ存在する境界面において、アンボンド構造とボンド構造の両方が混在する複合平板があるとする。そのような場合は、ボンド構造状態で結合しあっている層をそれぞれ一枚の合成版と考え、まずは、その合成版のみで弾性テンソルを求め、その後はそれを一枚の平板として他の平板とはアンボンド構造状態で境界面が結合されているとして、最終的な複合平板の弾性テンソルを求めることとなる。

3.6 リンク要素による上下層の結合

それぞれの平板の厚さ方向の変形を独立に扱えるように、重なり合う上下の層で2次的に同じ座標値を持つ節点は、Ioannidesらによって提案された剛性をもつリンク要素¹⁴⁾（図-4中③）によって結合されていると仮定する。リンク要素は、鉛直方向のみの力を伝達するものである。図-5にリンク要素の概念図を示す。第 i 層と第 $i+1$ 層の境界面に存在するリンク要素の剛性 k_{L_i} は式(34)のようになる。

$$k_{L_i} = \frac{k_i \cdot k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} \quad (34)$$

$$k_i = \frac{2\bar{E}_i(1 - \bar{\nu}_i)}{h_i(1 - \bar{\nu}_i - 2\bar{\nu}_i^2)}$$

3.7 微視的構造の応力

以上より得られた合成平板の弾性テンソル D_{ijkl}^H を用いて巨視的構造の支配方程式（式(18)）を解くことにより、舗装体全体の変位成分が求まる。舗装体全体の変位成分が求めれば、その値と周期特性関数 χ_{kl} を用いて

図-6 複合平板のひずみと応力の調整

微視的構造における各積層内の応力値（式(35)）が得られる。

$$\sigma_{ij} = \bar{D}_{ijkl}^\epsilon \epsilon_{kl} = (\bar{D}_{ijkl}^\epsilon - \bar{D}_{ijmn}^\epsilon \frac{\partial \chi_{kl}^m}{\partial y_n}) \epsilon_{kl}^0 \quad (35)$$

3.8 巨視的構造の応力

図-6は、ボンド構造のひずみおよび応力分布を曲げと軸力に分離する考え方を示したものである。 n 層の重ね合わせの場合、曲率による曲げとひずみ分布と、複合化した平板の中立軸の移動に伴う軸力のひずみ分布とに分けて考えると、その関係式は、式(36)のようになる。

$$\Delta \epsilon_{(2)}^\epsilon - \Delta \epsilon_{(1)}^\epsilon = \frac{h_1 + h_2}{2} \phi$$

$$\Delta \epsilon_{(3)}^\epsilon - \Delta \epsilon_{(2)}^\epsilon = \frac{h_2 + h_3}{2} \phi$$

$$\Delta \epsilon_{(4)}^\epsilon - \Delta \epsilon_{(3)}^\epsilon = \frac{h_3 + h_4}{2} \phi \quad (36)$$

$$\vdots$$

$$\Delta \varepsilon_{(n)}^{\varepsilon} - \Delta \varepsilon_{(n-1)}^{\varepsilon} = \frac{h_{n-1} + h_n}{2} \phi$$

ここで、 $\Delta \varepsilon$ はひずみ増分を表している。また、軸力の釣り合い関係式は式(37)となる。

$$\bar{E}_1 \Delta \varepsilon_{(1)}^{\varepsilon} h_1 + \bar{E}_2 \Delta \varepsilon_{(2)}^{\varepsilon} h_2 + \cdots + \bar{E}_n \Delta \varepsilon_{(n)}^{\varepsilon} h_n = 0 \quad (37)$$

式(36)、式(37)から、 $\Delta \varepsilon_{(i)}$ が式(38)のように求まる。

$$\Delta \varepsilon_{(i)} = C_i \phi \quad (38)$$

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \bar{E}_j h_j \sum_{k=j}^{i-1} (h_k + h_{k+1}) \right\} - \sum_{j=i+1}^n \left\{ \bar{E}_j h_j \sum_{k=i}^{j-1} (h_k + h_{k+1}) \right\}}{2 \sum_{j=1}^n \bar{E}_j h_j}$$

ここで、 C_i は複合平板の接着状態により決定されるパラメータであり、ボンド構造の場合 C_i に数値が入り、アンボンド構造の場合0となる。その後は各々の層の微視的構造内部の材料特性を考慮に入れた巨視的構造における上下境界面それぞれの応力値(式(39))を求めることができる。

$$\sigma_{ij}^s = \left(\mp \frac{6}{h_i^2} + \frac{12C_i}{h_i^3} \right) M_{ij}^s \quad (39)$$

ここで、 M_{ij}^s は第 s 層における3方向の曲げモーメントを意味する。

4. 数値解析例

4.1 2層複合平板解析の検討

数値解析例として、図-7に示す中央に集中荷重 $p = 39.2\text{N}$ を受ける $2a \times 2a$ ($a = 10.0\text{cm}$)の寸法をもつ周辺固定支持の正方形2層複合平板の曲げ問題を取り上げた。そして、その集中荷重載荷点における面外変位(3次元解析では厚さ方向における変位)を本手法(ボンド構造、アンボンド構造)と3次元解析(ボクセル要素を用いた、均質化法による解析)より求解し比較した。微視的構造については両者とも2種類の材料からなる同一モデルを上層と下層に仮定した。なお、板厚はそれぞれ h として、板厚の変化による結果の差異について調べた。解析に用いた材料定数は、黒い材料が弾性係数 $E = 21,575(\text{MPa})$ 、ポアソン比 $\nu = 0.35$ であり、白い材料が弾性係数 $E = 20,594(\text{MPa})$ 、ポアソン比 $\nu = 0.35$ である。また、この例題においては式(40)を用いて集中荷重載荷点の厳密解¹⁵⁾を知ることができる。

$$w = 0.0224 \frac{a^2 p}{D} \quad (40)$$

$$D = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{E(y) h^3}{12(1 - \nu(y)^2)} dY \quad (41)$$

本解析で用いる3次元解析、平板解析それぞれの板厚、及び有限要素分割を表-1に示す。複合平板解析におい

図-7 数値解析モデル

ては、厚さ方向の複合材料特性を再現するために、微視的構造には積層理論を、巨視的構造には複合平板理論をそれぞれ導入する。本例題に関しては微視的構造は2層の積層と考え、巨視的構造は2層の複合平板と考えている(表-1中の()の数字)。巨視的構造である上層、下層は同じ有限要素モデルであり、同じ座標を持つ節点はリンク要素により結合されている。また、3次元解析においては、微視的構造、巨視的構造ともに全てボクセル要素となり得る最小数の有限要素に分割し解析を行った(表-1参照)。

表-1 各層厚における有限要素分割数

層厚 $h[\text{cm}]$	微視的構造	
	3D	plate
0.2	$10 \times 10 \times 2$	$2 \times 2(\times 2)$
0.4	$10 \times 10 \times 4$	$2 \times 2(\times 2)$
0.5	$4 \times 4 \times 2$	$2 \times 2(\times 2)$
0.8	$10 \times 10 \times 8$	$2 \times 2(\times 2)$
1.0	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2(\times 2)$
2.0	$2 \times 2 \times 4$	$2 \times 2(\times 2)$

層厚 $h[\text{cm}]$	巨視的構造	
	3D	plate
0.2	$100 \times 100 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$
0.4	$50 \times 50 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$
0.5	$40 \times 40 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$
0.8	$25 \times 25 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$
1.0	$20 \times 20 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$
2.0	$10 \times 10 \times 4$	$20 \times 20(\times 2)$

図-8 集中荷重載荷点における面外変位量

図-9 CPU時間の比較

図-8はそれぞれの解析手法により求められた集中荷重載荷点における面外変位をプロットした図である。図より3次元解析では厳密解と良い一致を示している。また、本手法によるボンド構造とアンボンド構造それぞれの解析解は、その3次元解析や厳密解を挟み込む結果になっている。図-9は、各解析に要した計算時間を比較したものである。なお、計算機には中央大学所有のIBM RS6000/SPを用いた。図より、どの板厚の場合の解析においても、本手法は3次元解析に比べて圧倒的に計算時間が速いことがわかる。

4.2 FWD試験数値シミュレーション

応用例として、図-10-①に示す道路舗装モデル(巨視的構造)のFWD試験数値シミュレーション(円形載荷49kN, 載荷幅 $\phi = 300\text{mm}$)を取り上げ、たわみ量について実験値、3次元解析との比較を行った。解析領域は数値実験により、たわみ形状に変化がないことを確認した上で $1.9\text{m} \times 1.7\text{m}$ とした。実験では $1.1\text{m} \times 0.9\text{m}$

で路床まで掘削し、その後、路床を埋め戻し、路盤、表層の順にアスファルトを敷き直すことで舗装体を復旧している。そのため復旧後は掘削部分において表層と路盤に目地が発生すると考える。解析において目地は変位が生じたときに発生する剛性(98.0MPa)(図-4中④-⑤)で評価するものとする。図-11に示す巨視的構造(周辺固定支持)は、対称性を利用して1/4モデルを使用している。表層と路盤は同じ材料であり、普通加熱合材のアスファルト混合物である。路床の材料には関東ローム層を用いている。表層と路盤に関しては複合材料としての物性を評価するが、関東ロームに関しては弾性体の単一材料として扱い、無限遠深さの地盤状況を再現するために地盤バネモデル(図-4中⑥)を用いた。地盤バネの剛性は円形載荷、載荷板が剛体の場合の、式(42)に示す地盤反力係数を用いている。

$$k = \frac{1}{0.785(1-\nu^2)} \frac{E}{\phi} \quad (42)$$

ここで、 E, ν は路床の弾性係数とポアソン比であり、 ϕ は載荷幅である。

道路舗装モデルの有限要素分割は節点数16,714、要素数16,150である。微視的構造にはX線CTにより得られた実画像データをもとに、骨材同士の分離を考慮して作成された実画像モデル¹⁶⁾(図-10-②)を用いた。黒い部分が骨材(49.1%)、灰色の部分がアスファルトモルタル(50.9%)を示す。40mm $\times$ 40mm $\times$ 40mmの領域は40 $\times$ 40 $\times$ 40に分割され、節点数1681、要素数1600であり、面外方向に40層の材料が配置されている。表-2に、本解析で用いた、骨材、アスファルトモルタル、関東ロームの材料定数を、表-3に解析モデルの詳細を示す。解析においては、厚さ方向の複合材料特性を再現するために、微視的構造には積層理論を、巨視的構造には複合平板理論をそれぞれ導入する。

図-10 解析モデル

図-11 巨視的構造の有限要素分割図と荷重状況

表-2 材料定数

材料（表層，路盤）	$E(MPa)$	ν
骨材（49.1%）	201.0	0.21
アスファルトモルタル（50.9%）	0.294	0.17
材料（路床）	$E(MPa)$	ν
関東ローム	16.0	0.35

表-3 解析モデルの詳細

板厚	表層	10cm
	路盤	30cm
	路床	—
有限要素分割 (微視的構造)	表層	$40 \times 40(\times 40)$
	路盤	$40 \times 40(\times 40)$
	路床	—
有限要素分割 (巨視的構造)	8075×2 (節点数： 8357×2)	

図-12は、微視的要素の応力分布図である。上図が最上部、下図が最下部における微視的要素の応力分布図を示す。均質化法を用いることによって、内部微視的構造の応力状態を容易に捉えることができ、また、解析モデルにX線CTによる実画像モデルを用いているため、骨材部分に生じる局所的な高い応力値を捉えることも可能である。

図-13は、面外変位量における実験値との比較である。本手法、3次元解析、ともに妥当な解が得られ実験値と比較的良好一致を示している。特に荷重直下でボンド状態ではよい一致を示している。アンボンド状態では他に比べて目地以降の剛性の低下が見られる。また、ボンドとアンボンド状態の解析結果は3次元解析での結果を挟む形となっている。

図-12 微視的要素の応力分布図

図-13 実験結果との比較

表-4は、ボンド状態における本手法と3次元解析での計算負荷の比較である。実行ファイルサイズは3次元解析に比べて約1/13、計算時間は約1/6に削減されている。このことから、3次元解析に比べて、本手法は計算負荷の点で大変有利であるといえ、今後、計算負荷が大きい動的解析等への応用が期待できる。

表-4 計算負荷の比較

	本手法	3次元解析
実行ファイルサイズ	66MB	799MB
計算時間	1258s	7859s

5. まとめ

本論文では道路舗装体の構造解析手法として積層Mindlin板理論に基づく弾性理論に、均質化法と複合平板理論を導入したマルチスケール解析手法を提案した。本手法の妥当性および有効性を検討するために、本手法を理論解の存在する簡単な2層複合平板解析と応用例として実画像モデルを用いて道路舗装体のFWD試験問題に適用した。本手法によって得られた結論を示すと以下のようになる。

1. 本手法による計算結果はいずれの問題においても、理論解や実験結果と良い一致を示した。ボンドおよびアンボンド状態を仮定した計算結果は理論解および3次元の結果を挟む結果となった。また、実際のFWD試験問題においては、ボンド状態の方がアンボンド状態の結果に比べて実験結果に近い結果を与えた。
2. 均質化法を導入したことにより、道路舗装体内部の応力状態を容易に知ることが可能となった。このことから、本手法による材料配合設計の検討も可能である。
3. 本手法は3次元解析に比べて、圧倒的に高速かつ省メモリであり、大規模な実際問題の解析に有効である。

今後は、本手法を動的解析に適用していく予定である。

参考文献

- 1) 西澤辰男, 松野三朗: コンクリート舗装の構造解析における有限要素法の適用性について, 土木学会論文報告書, 第338号, pp207-215, 1983.10
- 2) 西澤辰男, 福手 勤, 国分修一: 弾性平板FEMに基づくコンポジット系舗装の解析法に関する研究, 土木学会論文集 No.613/V-42, pp237-247, 1999.2
- 3) 渡辺規明, 松井邦人, 菊田征勇, 西澤辰男: FEM弾性多層解析における解析領域の検討, 第1回舗装工学講演会講演論文集, pp1-6, 1996.12
- 4) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.83, pp.143-198, 1990
- 5) Terada, K., Yuge, K. and Kikuchi, N.: Elasto-Plastic Analysis of Composite Materials Using the Homogenization Method, 日本機械学会論文集 (A編), 62巻601号, 1996.
- 6) 寺田賢二郎, 菊池昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集, No.633/I-49, pp.217-229, 1999
- 7) 永井学志, 山田貴博, 和田章: 三次元実画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 第509号, pp.77-82, 1998
- 8) 永井学志, 山田貴博, 和田章: 微視構造の引張破壊を考慮したコンクリート材料の巨視的圧縮挙動の数値解析, 計算工学講演会論文集, 第4巻, 第2号, pp.729-732, 1999
- 9) 山田貴博, 永井学志: コンクリート材料のメソスケール解析のための高速な数値計算法, 応用力学論文集, Vol.3, pp.177-184, 2000
- 10) 宇尾朋之, 檜山和男, 寺田賢二郎: ラプラス変換を用いた均質化法に基づくアスファルト混合物の粘弾性解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.195-202, 1998. 8
- 11) 伊根達比古, 弓削康平: 制振床材の振動特性解析, 計算工学講演会論文集, Vol.3, No.3, pp.711-714, 1998
- 12) 福田 正: コンクリート舗装の荷重分散機構に関する研究, 土木学会論文報告集 第242号, pp.63-72, 1975.10
- 13) 山田嘉昭: 塑性の有限要素法-材料非線形型有限要素法-, 科学技術出版社 (1988)
- 14) Ioannides, A.M. and Khazanovich, L.: Analytical and Numerical Methods for Multi-Layered Concrete Pavements. Proceeding 3rd International Workshop on the Design and Evaluation of Concrete Pavements, C.R.O.W.Record 14, pp.113-121, 1994
- 15) 土木学会構造工学委員会, 構造力学公式集改訂委員会: 構造力学公式集, 土木学会 (1974, 第1版・第1刷発行, 1991, 第2版・第3刷発行)
- 16) 寛 貴明, 檜山和男, 宇尾朋之: 実画像データを用いたアスファルト混合物の均質化粘弾性解析, 第50回理論応用力学講演会講演論文集, pp.259-260, 2001

(2002年4月19日 受付)