有限要素解析における物体の角への壁関数適用方法の検討

Study of an application to employ the wall function to body corners in the finite element analysis

長谷部 寛*, 野村 卓史**
Hiroshi Hasebe, Takashi Nomura

*修士 (工学), 日本大学助手, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

**工博, 日本大学教授, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

In the finite element analysis, when using the wall function, the wall-law is applied to the tangential velocity component on solid boundary nodes. However, the tangential direction can not be defined at the body corner nodes. In this paper, two numerical treatments to evaluate the direction are attempted. One is the direction fixed to the geometrically tangential direction. The other is the variable direction evaluated by introducing the local flow field characteristics. A flow around a 2D square cylinder is simulated. As a result, the former treatment evaluates the aerodynamic forces quite poor, the latter one does in good agreement with the computational and experimental results.

Key Words: wall function, $k-\varepsilon$ model, finite element method, square cylinder

1. 序論

土木・建築構造物の耐風設計や構造物周辺の風況予測に対して, 数値流体解析を活用しようとする試みが盛んに行われている^{1)~4)}. 構造物周りの流れは大半が乱流であり, 現在の計算機的能力から直接解法 (Direct Numerical Simulation : DNS) は多大な計算資源を要するため, これらの研究の多くは, LES (Large Eddy Simulation) もしくは RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) による乱れのモデリングが行われている.

LES は普遍的な性質を持つ乱れをモデル化する手法であり, 乱流の慣性領域を解像する程度の空間分解能が要求される. LES は流れの変動成分が直接算出可能な点や, 各種の流れに対しモデル依存性が低いといった利点があるが, DNS 程ではないが細かな空間分割が要求され, 三次元計算を行うため, 計算負荷は高く, 実務的には, 計算時間の面で課題があると言える.

一方, RANS は流れの平均成分に着目し, 乱れ成分に関しては, 乱れの統計量を表現するモデル化された方程式を解き, 乱れの影響を見積もる. そのため, 解析対象とする流れに適したモデルを用いる必要があり, モデル依存性は高い. 一方, 流れの平均成分に着目した方程式を解くため, LES ほどの空間分解能は要求されず, 計算負荷は相対的に低い. そのため, RANS は計算時間の面から考えて, より実務的な解析手法であり, 要求される解の精度によっては有効な乱流解析手法であると言える.

RANS モデルを用いた乱流解析において, 物体境界を扱う手法の一つに壁関数⁵⁾がある. 壁関数は壁乱流の普遍的法則である壁法則を用い, 粘性底層をモデル化する手法であり, 流速勾配が非常に大きくなる粘性底層を離散化する必要がないため, 計算負荷を低減させることが可能である.

有限要素解析において壁関数を用いた場合, 壁面境界は以下のように扱われる. 計算境界は物理的な壁面境界上ではなく対数領域内に設置される. そして計算境界上節点の節点流速の壁面接線方向成分を, 壁法則⁶⁾から評価される壁面せん断応力を境界条件に用い, 未知数として扱う⁷⁾. しかし, この手順で物体周りの流れの解析を行なう場合, 物体の角にあたる節点では, 接線方向が定義できないため, 何らかの基準で壁関数を適用する方向を定める必要がある.

そこで本研究では, 有限要素法において壁関数を用いる際, 物体の角の節点の壁関数を適用する方向の評価方法を検討した. なお, 既往の研究でこの点に関して言及された例は見当たらない. また, 乱流解析で広く用いられている離散化手法である有限体積法を用いた場合, 壁近傍の変数配置の関係上, この問題は回避されている. これに関しては第3章で述べる.

本研究で検討した壁関数を適用する方向の評価方法は, 幾何学的な接線方向に固定する方法と, 周辺の流速に応じて方向を変化させる方法の二通りである. この二つの評価方法を二次元正方形角柱周りの流れの解析に用い, 比較検討した.

2. 乱流の解析手法

2.1 修正 $k-\varepsilon$ モデル基礎方程式

本研究では、乱流モデルとして修正 $k-\varepsilon$ モデル⁸⁾を用いた。修正 $k-\varepsilon$ モデルでは運動方程式にレイノルズ方程式を、連続条件式に平均流に関する連続条件式を用いる。レイノルズ方程式および平均流に関する連続条件式を以下に示す。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{uu}) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は平均流の流速ベクトル、 $\mathbf{f}$ は外力ベクトル、 ρ は空気密度、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり、次式により表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{U}) \quad (3)$$

$$\varepsilon(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right\} \quad (4)$$

P は平均圧力、 μ は粘性係数、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。

また、 $\mathbf{uu}$ は流速の変動成分の相関項であるレイノルズ応力であり、修正 $k-\varepsilon$ モデルでは Boussinesq 近似により、

$$\rho \mathbf{uu} = \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} - 2\mu_t \varepsilon(\mathbf{U}) \quad (5)$$

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

とモデル化される。ここで μ_t は渦粘性係数、 ν_t は渦動粘性係数、 k は乱流エネルギー、 ε はエネルギー散逸率、 $C_\mu (= 0.09)$ はモデル定数である。

乱流エネルギー k およびエネルギー散逸率 ε は以下の輸送方程式を解いて求める。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \varepsilon \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (8)$$

ここで P_k は各輸送方程式の生産項であり、修正 $k-\varepsilon$ モデルでは、無次元スカラーパラメータ S および Ω を用いて以下のように表現される。

$$P_k = C_\mu \varepsilon S \Omega \quad (9)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)^2} \quad (10)$$

$$\Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} - \nabla \mathbf{U}^T)^2} \quad (11)$$

また、 k, ε 方程式中のモデル定数として、以下の値が用いられる。

$$C_\mu = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (12)$$

2.2 Logarithmic form

乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ε は次式の定義からわかるように、正の値の変数である。

$$k = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (13.a)$$

$$\varepsilon = \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (13.b)$$

しかし、数値計算上、必ずしもそれが保証されるとは限らない。本研究においては計算途中で k, ε が負の値となり、それが原因で計算が発散することを回避するため、Ilinca らにより提案された logarithmic form⁹⁾ を適用した。以下に、 $k-\varepsilon$ モデルに logarithmic form を適用した場合の解析手順を示す¹⁰⁾。

$k-\varepsilon$ モデルに logarithmic form を適用した場合、乱流量を表す変数 k, ε の対数が、次式に示す新たな変数として定義される。

$$K = \ln k \quad (14.a)$$

$$E = \ln \varepsilon \quad (14.b)$$

そして、乱流量を表す方程式として、 k, ε 方程式の代わりに K, E の輸送方程式を解く。 K, E の輸送方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K &= \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] \\ &+ \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} \right) (\nabla K)^2 + e^{-K} P_k - \frac{C_\mu}{\nu_t} e^K \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla E &= \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E \right] \\ &+ \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) (\nabla E)^2 + C_{\varepsilon 1} e^{-K} P_k - C_{\varepsilon 2} e^{E-K} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで K 方程式は k 方程式全体を k で除した式、 E 方程式は ε 方程式全体を ε で除した式と数学的に等価である。 k, ε は直接 k, ε 方程式を解くことなく、 K, E 方程式を解いて求めた K, E の指数を取り、値が求められる。 K, E の指数をとることで、本来の変数である k, ε が負の値にならないことが保証される。

2.3 有限要素法による離散化

本研究では、基礎方程式の離散化手法として有限要素

図一1 壁近傍の有限要素および壁関数の変数配置 (有限要素法)

図二2 壁近傍のコントロールボリュームおよび壁関数の変数配置 (有限体積法)

図三3 BluffBody の角周辺の有限要素および壁関数の変数配置 (有限要素法)

図四4 BluffBody の角周辺のコントロールボリュームおよび壁関数の変数配置 (有限体積法)

法を用いた。解析は二次元空間を対象としているため、空間は双線形四角形要素を用いて分割した。

平均流速 U 、対数型の乱流エネルギー K 、対数型のエネルギー散逸率 E に対しては、双線形分布の補間関数を適用し、平均圧力 P および渦動粘性係数 ν_t に対しては、要素内一定分布の補間関数を適用した。

また、安定化手法としてSUPG (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin) 法¹¹⁾を適用し、時間積分法には predictor-corrector 法¹¹⁾を用いた¹⁰⁾。

3. 有限要素法において複雑な形状の物体に壁関数を適用するための具体化方法

3.1 壁関数に関する要素と変数の配置

有限要素解析において壁関数を用いる際の、固体境界近傍のメッシュ配置と、壁面せん断応力変数 τ_w およびそれを算出するための参照流速 U_{ref} の定義位置に関し

て、Mohammadi らの方法⁷⁾を紹介する。要素および変数の配置を図一1に示す。Mohammadi らの方法による壁関数の計算手順は以下の1) ~3) にまとめられる。

- 1) 図一1に示すように、有限要素は固体境界から δ_w 離れた位置に設置する。ここで δ_w は壁関数によりモデル化される領域の厚さであり、計算境界上の節点に対数領域内に配置されるよう経験的な値が定められる。
- 2) 計算境界上の各節点で、固体境界の接線方向の流速成分 U_{ref} を参照し、対数則⁶⁾

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (17)$$

$$\left(\begin{array}{l} u^+ = \frac{U_{ref}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau \cdot \delta_w}{\nu}, \\ \tau_w = \rho u_\tau^2, \quad u_\tau: \text{摩擦速度}, \quad \kappa = 0.41, \quad B = 5.5 \end{array} \right)$$

から壁面せん断応力 τ_w を求める。

- 3) 計算境界上節点の固体境界の接線方向流速成分 U_{ref} は、壁面せん断応力 τ_w の等価節点力を境界条件とする未知数として扱う。

以上が有限要素解析における一般的な壁関数の具体化手順である。図—1 では四角形要素を用いて示しているが、三角形要素を用いた場合でも壁関数具体化の手順は変わらない。

また、流体解析で広く用いられている有限体積法について、具体化の手順を加藤¹²⁾の方法を例として説明する。図—2 に加藤が壁関数を用いて解析を行なった際の、固体境界近傍のコントロールボリューム配置、変数の定義位置を示す。なお加藤はスタッガード配置をとっているため、ベクトル量である流速の定義位置と、スカラー量である k , ε の定義位置が異なっている。なお、壁面せん断応力 τ_w は、各流速定義点での固体境界に平行な流速成分を参照流速 U_{ref} とし、壁法則から算出され、これを運動方程式の境界条件として扱っている。このように有限体積法においても、壁関数の参照流速 U_{ref} と壁面せん断応力 τ_w との関係は、有限要素法と実質的には同じである。

壁関数を上記の手順に従い具体化し、角柱のような bluff body 周りの流れの解析を行なう場合、bluff body の角ではメッシュが図—3, 4 のように配置される。有限要素法では、図—3 に示すように計算境界の角にあたる位置 C に節点が配置されるが、ここでは対応する固体境界の接線方向が定義されないため、壁法則を適用する方向が明確ではなく、それを何らかの形で定める必要がある。この点に関しては第 4 章にて述べる。

一方、有限体積法では、図—4 に示すように、有限要素法の角の節点があった位置 C に、流速評価点が存在しないため、前述の問題が生じない。

3.2 固体境界上の節点流速の自由度

橋梁桁断面や都市のビル群などの複雑な形状の物体境界や、円柱や丘陵などの表面形状が曲線的に変化する境界では、固体境界の方向が全体座標系の座標軸の方向と一致しない。そのような任意形状の解析対象に壁関数を用いるために、本研究では汎用性を考慮し、図—5 に示すように、壁関数における固体境界上の参照流速 U_{ref} を表す節点流速の自由度の方向 (ξ_w 方向) と、それに直交する方向 (η_w 方向) で、固体境界上の節点流速の自由度を定義する。図—5 において、 $\bar{u}$ は節点流速の ξ_w 方向成分、 $\bar{v}$ は節点流速の η_w 方向成分、 $\bar{\theta}$ は ξ_w 軸の x 軸からの傾きである。本研究では $\bar{u}$ を未知数、 $\bar{v}$ をゼロとして扱った。 ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}$ の評価方法は第 4 章に記す。

上記のように、固体境界上の節点のみ節点流速の自由度を局所座標系で定義すると、固体境界に接する要素のみ局所座標変換が施された運動方程式および連続条件式の有限要素方程式を解く必要がある。なお、 K , E 方程式に対して局所座標変換は施さない。

固体境界上要素の局所座標変換マトリックスは以下のように導かれる。固体境界上節点 j において、節点流速

図—5 固体境界上節点の流速の自由度

の x , y 方向成分 u_j , v_j と、 ξ_w , η_w 方向成分 $\bar{u}_j$, $\bar{v}_j$ との関係は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = T(\bar{\theta}_j) \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta}_j & -\sin \bar{\theta}_j \\ \sin \bar{\theta}_j & \cos \bar{\theta}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (18)$$

これを流速の要素内節点ベクトルに拡張すると、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{u}_w^e \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^e \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

となる。ここで $\mathbf{u}^e$ は固体境界上以外の要素内節点流速ベクトル、 $\mathbf{u}_w^e$ は固体境界上の要素内節点流速ベクトル、 $\bar{\mathbf{u}}^e$ は節点流速の自由度を ξ_w 方向成分および η_w 方向成分に局所座標変換した固体境界上の要素内節点流速ベクトルである。 $\mathbf{L}^e$ は局所座標変換マトリックスであり、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{T}$ は要素の持つ固体境界上節点の数だけ $T(\bar{\theta}_j)$ を対角項に並べた対角行列である。同様の局所座標変換を重み関数に対しても施す。以上より導かれる局所座標変換が施された運動方程式および連続条件式の有限要素方程式は、

$$\mathbf{M}' \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{N}'(\bar{\mathbf{U}}) \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{D}' \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{G}' \mathbf{P} = \bar{\mathbf{F}} \quad (20)$$

$$\mathbf{G}'^T \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}' = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{L}^e, & \mathbf{N}'(\bar{\mathbf{U}})' = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{N}(\bar{\mathbf{U}})' \mathbf{L}^e \\ \mathbf{D}' = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{L}^e, & \mathbf{G}' = \sum_e \mathbf{L}^{eT} \mathbf{G}^e \end{cases} \quad (22)$$

となる。ここで、 $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{N}(\bar{\mathbf{U}})^e$, $\mathbf{D}^e$, $\mathbf{G}^e$ は全体座標系で表わされた各要素の質量、移流、拡散、勾配項に関する係数マトリックスである。 $\bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ は固体境界上節点のみ ξ_w 方向成分および η_w 方向成分に座標変換された、流速および外力ベクトル、 $\mathbf{P}$ は圧力の要素ベクトルである。

本研究では式 (20), (21) を predictor-corrector 法により時間積分を行った。以下にそのアルゴリズムを示す。

1) Predictor phase : $i = 0$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(0)} = \bar{\mathbf{U}}_n + (1-\theta)\Delta t \bar{\dot{\mathbf{U}}}_n \\ \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{P}_n \end{cases} \quad \begin{matrix} (23.a) \\ (23.b) \\ (23.c) \end{matrix}$$

2) Solution phase : $i = 1, 2$

$$\mathbf{M}_L \Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}} = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{M}' \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{N}'(\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)}) \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{D}' \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{G}' \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} \quad (24.a)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} + \theta \Delta t \Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}} \quad (24.b)$$

$$\left\{ \mathbf{G}'^T (\mathbf{M}_L)^{-1} \mathbf{G}' \right\} \Delta \mathbf{P}^{(i)} = \frac{1}{\theta \Delta t} \mathbf{G}'^T \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} \quad (24.c)$$

$$\Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}}_{n+1}^{(i)} = \Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}} - (\mathbf{M}_L)^{-1} \mathbf{G}' \Delta \mathbf{P}^{(i)} \quad (24.d)$$

3) Corrector phase : $i = 1, 2$

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} + \Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}}_{n+1}^{(i)} \quad (25.a)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} + \theta \Delta t \Delta \bar{\dot{\mathbf{U}}}_{n+1}^{(i)} \quad (25.b)$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{P}^{(i)} \quad (25.c)$$

圧力方程式 [式 (24.c)] の解法には CG 法を用いている。ここで、式 (24.c) , (24.d) 中の $\mathbf{M}_L$ は、局所座標変換を施した質量マトリックス $\mathbf{M}'$ からではなく、全体座標系によって表された質量マトリックス $\mathbf{M}$ から作られた lumped mass マトリックスである。

3.3 壁面せん断応力の評価点

有限要素法では、連続体の物理量の分布を補関数で近似し、節点値はその積分値である。そこで本研究では、壁面せん断応力 τ_w を図-6 に示すように、固体境界に接する要素の辺上に分布する量として扱う。本研究では要素内の流速の補間に 1 次の補関数を用いていることから、壁面せん断応力 τ_w は固体境界の辺上で一定に分布していると仮定できる。

図-6 に示すように、辺 a の壁面せん断応力 $\tau_{w,a}$ を算出するための参照流速 $U_{ref,a}$ の評価位置を辺の中点とする。図-6 中の l_a は辺 a の辺長である。辺 a の参照流速 $U_{ref,a}$ は、辺 a の両端の節点 i, j の節点流速の ξ_w 方向成分 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ を辺 a の方向に投影し、内挿することで算出する。すなわち辺 a の参照流速 $U_{ref,a}$ は次式で表される。

$$U_{ref,a} = \frac{1}{2} \left[\bar{u}_i \cos(\bar{\theta}_i - \hat{\theta}_a) + \bar{u}_j \cos(\bar{\theta}_j - \hat{\theta}_a) \right] \quad (26)$$

ここで、 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$ は節点 i, j における ξ_w 軸の傾きであり、 $\hat{\theta}_a$ は辺 a の傾きである。

図-6 壁面せん断応力の要素内での分布と参照流速の評価位置

辺 a で評価される壁面せん断応力 $\tau_{w,a}$ は、Launder ら⁵⁾ に従い、以下の 2 層モデルを用いて評価した。

$$\left[y^+ < 11.63 \right] \quad \tau_{w,a} = -\mu \frac{U_{ref,a}}{\delta_w} \quad (27.a)$$

$$\left[y^+ \geq 11.63 \right] \quad \tau_{w,a} = -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} \hat{k}_a^{1/2}}{\ln(C_E y^+)} \cdot U_{ref,a} \quad (27.b)$$

$$\left(\begin{aligned} y^+ &= \frac{C_\mu^{1/4} \hat{k}_a^{1/2} \delta_w}{\nu} \\ C_\mu &= 0.09, C_E = 9.793, \kappa = 0.4187 \end{aligned} \right)$$

ここで、 ν は動粘性係数である。 $y^+ < 11.63$ の場合は層流と判断して Newton の粘性法則を用い、 $y^+ \geq 11.63$ の場合は乱流と判断して対数則を用い壁面せん断応力 τ_w を評価している。 $\hat{k}_a$ は参照流速 $U_{ref,a}$ の参照点での乱流エネルギーであり、両端の節点の乱流エネルギーの節点値を内挿して求められる。

運動方程式に対しては、式 (27.a) もしくは (27.b) で求められた壁面せん断応力 $\tau_{w,a}$ の等価節点力の、 ξ_w 方向成分を境界条件として用いる。

なお、図-3 のような角柱の角付近で式 (27.b) が成立する明瞭な根拠はないが、現状では壁関数を用い粘性底層をモデル化する場合、壁法則を用いること以外に角付近での境界条件を与える明確な方法がなく、加藤の解析¹²⁾においても、角部に同様に壁関数が用いられ、良好な結果が得られていることから、本研究では角部においても式 (27.b) を用いることとした。

4. 物体角の節点の節点流速方向の評価

3.1 節で述べたように、有限要素解析で壁関数を用いる

際、物体の角にあたる節点において、壁法則を適用する方向 (ξ_w 方向) を定める必要がある。本研究では ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}$ の評価方法として以下の二つの方法を比較、検討した。

(Case1) 幾何学的な接線方向に固定する方法

図-7 に示す固体境界上節点 j の ξ_w 軸方向 $\bar{\theta}_j$ を左右の辺 a, b の傾き $\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b$ の平均値として定義する。

$$\bar{\theta}_j = \frac{\hat{\theta}_a + \hat{\theta}_b}{2} \quad (28)$$

この方法では ξ_w 軸の傾きは時間的に変化しない。

(Case2) 周辺の流速に応じて方向を変化させる方法

図-8 に示すように、固体境界上節点 j の節点流速 $\bar{u}_j$ は、上流側の流速が大きく、下流側の流速が小さい場合、辺 a の傾きにより近い方向 (図-8 黒矢印) を向き、上流側の流速が小さく、下流側の流速が大きい場合、節点 j の節点流速 $\bar{u}_j$ は辺 b の傾きにより近い方向 (図-8 灰矢印) を向く扱いにすることが、現象的な観点から節点流速の方向として、より妥当であると考えられる。

そこで、幾何学的な接線方向を基準とし、そこから周辺の流速の大きさに応じて、節点を共有する二辺のどちらか一方へさらに ξ_w 軸の方向 $\bar{\theta}$ を近づける扱いとした。 ξ_w 軸を着目する節点を共有する二辺のうちどちらへ傾けるか、その基準として、以下に記す固体境界上の要素の、境界を構成する辺上で定義された要素辺上流速を用いた。

図-9 に示す節点 j の ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}_j$ を算出するために用いる、辺 a 上で定義される要素辺上流速 $\hat{u}_{j,a}$ は、以下の手順で求める。辺 a の両端の節点 i, j の節点流速 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ を、辺 a の方向に投影し、投影された流速が辺 a 上で線形に分布していると仮定する。そして図-9 に示すように、着目する節点 i から見て辺 a の長さ l_a の $1/3$ の位置での流速を、辺 a の要素辺上流速 $\hat{u}_{j,a}$ とする。同様に辺 b に関しても、節点 i から見て辺 b の長さ l_b の $1/3$ の位置での辺に沿う方向の流速を、辺 b の要素辺上流速 $\hat{u}_{j,b}$ とする。要素辺上流速の評価点を、着目する節点から $1/3$ の位置とした背景には、着目する節点自身の節点流速の方向をより強く反映した評価にする狙いがある。

辺 a, b 上で定義される要素辺流速 $\hat{u}_{j,a}, \hat{u}_{j,b}$ は次式により算出される。

$$\hat{u}_{j,a} = \frac{1}{3} [\bar{u}_i \cos(\bar{\theta}_i - \hat{\theta}_a)] + \frac{2}{3} [\bar{u}_j \cos(\bar{\theta}_j - \hat{\theta}_a)] \quad (29.a)$$

$$\hat{u}_{j,b} = \frac{2}{3} [\bar{u}_j \cos(\bar{\theta}_j - \hat{\theta}_b)] + \frac{1}{3} [\bar{u}_k \cos(\bar{\theta}_k - \hat{\theta}_b)] \quad (29.b)$$

ここで $\bar{u}_i, \bar{u}_k$ は節点 j の両隣の節点 i, k の節点流速の ξ_w 軸方向成分であり、 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_k$ はその傾きである。

図-7 ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}$ を幾何的な接線方向に固定する方法 (Case1) における変数の定義

図-8 ξ_w 軸の傾きを周辺の流速に応じて変化させる際のコセプト

図-9 ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}$ を周辺の流速に応じて変化させる方法 (Case2) における変数の定義

$\bar{\theta}$ を周辺の流れの状況を考慮し、幾何学的な接線方向からさらに傾けるために、式 (29.a), (29.b) で評価した边上流速 $\hat{u}_{j,a}, \hat{u}_{j,b}$ を重みとして、辺 a, b の傾き $\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b$ の重み付き平均をとった。流速の重み $\hat{w}_{j,a}, \hat{w}_{j,b}$ は次式により評価される。

$$\hat{W}_{j,a} = \frac{\hat{u}_{j,a}}{|\hat{u}_{j,a}| + |\hat{u}_{j,b}|} \quad (30.a)$$

$$\hat{W}_{j,b} = \frac{\hat{u}_{j,b}}{|\hat{u}_{j,a}| + |\hat{u}_{j,b}|} \quad (30.b)$$

そして、節点 j の ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}_j$ は次式のとおり決定される。

$$\bar{\theta}_j = \hat{W}_{j,a} \cdot \hat{\theta}_a + \hat{W}_{j,b} \cdot \hat{\theta}_b \quad (31)$$

要素辺上流速 $\hat{u}_{j,a}, \hat{u}_{j,b}$ は、毎時間ステップ更新され、その結果、 ξ_w 軸の傾きは流れ場に応じて変化する。なお、時間積分の iteration 中では、要素辺上流速は更新せず、 $\bar{\theta}_j$ は固定している。

5. 二次元正方形角柱周りの流れの解析

5.1 解析条件

二次元正方形角柱周りの流れの解析を、第4章で記した Case1, Case2 の評価方法を用いて行った。図一10に解析条件を示す。流入流速 U_m 、角柱辺長 D から評価されるレイノルズ数は22,000であり、比較対象とした加藤の解析¹³⁾と等しく設定した。図一10中の境界 $\Gamma_1 \sim \Gamma_4$ に対して用いた境界条件を以下に示す。

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : U_m = 214.3 \text{ cm/s}, \quad I_u = 2\%, \\ k = (U_m \cdot I_u)^2, \quad v_t = 100\nu \end{aligned} \quad (32.a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \nabla K = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E = 0 \end{aligned} \quad (32.b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 : V = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \nabla K = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E = 0 \end{aligned} \quad (32.c)$$

$$\Gamma_4 : \text{壁関数} (\delta_w = 0.45 \text{ cm}) \quad (32.d)$$

図一11, 12に解析メッシュを示す。節点数は6378、要素数は6169 (90×76) で、双線形四角形要素により解析領域を分割した。時間積分間隔 Δt は 2.0×10^{-4} とした。なお、式 (32.d) の δ_w は、加藤の用いた値¹²⁾を参考に、物体境界上節点の大半が対数領域にあることを確認し、値を設定した。また、本解析の最小メッシュ幅は δ_w と等しくした。

図一10 二次元正方形角柱解析条件

図一11 解析メッシュ (全体図)

図一12 解析メッシュ (拡大図)

5.2 二次元正方形角柱の空力特性評価

図一13 (a) ~ (d) に Case1, 図一14 (a) ~ (d) に Case2 の瞬間流線および圧力 P 、乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ε の分布図を示す。なお、これらは揚力が最大となったタイミングでの分布図である。Case1, Case2 とともに周期的な渦放出が確認されたが、Case1 は Case2 に比べ変動が小さいことがわかる。

表1に空気力係数およびストローハル数の結果をまとめる。併せて加藤の解析結果¹³⁾およびLeeの実験結果¹⁴⁾を示した。なお、加藤の解析は有限体積法により、図一2, 4の壁関数の変数配置で行われたものである。ここで $\bar{C}_D$ は平均抗力係数、 C_L' は揚力係数のR.M.S.値である変動

(a) 瞬間流線

(b) 圧力分布

(c) 乱流エネルギー

(d) エネルギー散逸率

図—13 Case1 分布図

(a) 瞬間流線

(b) 圧力分布

(c) 乱流エネルギー

(d) エネルギー散逸率

図—14 Case2 分布図

表1 空気力係数とストローハル数の比較

	$\overline{C_D}$	C_L'	S_t
本研究 (Case1)	1.57	0.08	0.132
本研究 (Case2)	2.13	0.73	0.129
加藤 (解析値)	2.05	0.82	0.145
Lee (実験値)	2.05	1.23	0.122

表2 角柱四隅の節点流速の方向 $\bar{\theta}$

Comer	A	B	C	D
Case1	45° (fix)	315° (fix)	135° (fix)	215° (fix)
Case2	64.5° ±2.5°	295.8° ±2.3°	143.1° ±13.9°	217.3° ±13.9°

図 15 角柱上面の瞬間流線

図 16 角柱前縁の流速ベクトル図

揚力係数, S_L は流入流速 U_m , 角柱辺長 D から評価されるストローハル数である. Case2 は $\overline{C_D}$ は加藤, Lee の結果に近い値が得られ, C_L' は実験値より若干小さいものの加藤の結果に近い値が得られた. S_L は二次元正方形角柱の場合 0.12 ~ 0.13 程度の値とされており, 良好な結果が得られたといえる. 一方, Case1 は S_L に限って良好な値が得られたものの, 空気力係数は過小に評価された.

5.3 角の節点流速の傾きが空気力に及ぼす影響

図—15 (a), (b) に角柱上面の瞬間流線を示す. 描画のタイミングは図—13, 14 と同様, 揚力が最大となった時である. Case1 は Case2 に比べ, 剥離せん断層の発達を抑制されているのがわかる.

表 2 に角柱の四隅の節点流速の方向を示し, 図—16 (a), (b) に揚力が最大となった瞬間の角柱前縁角付近の流速ベクトルを示す. 表 2, 図—16 (a), (b) より Case1 は前縁角の流速ベクトルの傾きが Case2 と比べ小さいことから, 図—15 (a) に示すように剥離せん断層の発達が抑制され, 空気力係数が過小に評価されたと考えられる. なお, 第 3 章で述べたように, 固体境界上の節点は 1 自由度として扱っているため, 各固体境界上の節点の ξ_w 軸の傾きは流速ベクトルの傾きと一致している.

5.4 節点流速の傾きの変化量に対する制約

なお, この二次元正方形角柱の解析を行なった際, 4 章に述べたように ξ_w 軸の傾き $\bar{\theta}$ は毎時間ステップご

とに更新しているが, $\bar{\theta}$ の変化が大きくなり過ぎると圧力振動が生じた. そのため, それを回避するために, 1 ステップ間の $\bar{\theta}$ の変化に 1 ステップあたり 0.04° という上限を設けた. また, 図—9 に示した要素边上流速 $\hat{u}_{j,a}$, $\hat{u}_{j,b}$ がゼロに近い値をとった場合, 式 (30.a), (30.b) の流速の重みの分母が小さくなるため, 時間ステップごとの重みの変化が大きくなり, 上述の場合と同様, 圧力振動が生じる. これを回避するため要素边上流速 $\hat{u}_{j,a}$, $\hat{u}_{j,b}$ が, 流入流速の 1/50 以下になった場合, $\bar{\theta}$ の変化量を 1 ステップ前の変化量と等しくし, $\bar{\theta}$ が大きく変化することを防いだ. この $\bar{\theta}$ の変化量に対する処置は, 今後検討すべき点であると考えている.

6. 結論

本研究では, 有限要素解析において壁関数を具体化する方法として, 次の 3 点を留意した.

- ① 壁法則から壁面せん断応力を評価する位置を, 有限要素法の物理量の補間の概念から, 節点ではなく固体境界上に接する要素の辺の中点とした.
- ② 複雑な形状の物体に適用するために, 固体境界上節点の流速の自由度を, 壁法則を適用する方向 (ξ_w 方向) と, それに直交する方向 (η_w 方向) として扱った.

- ③ 物体の角にあたる節点で壁法則を適用する方向の評価方法に関して、幾何学的な接線方向に固定する方法 (Case1) と、周辺の流速に応じて方向を変化させる方法 (Case2) の二つの方法を比較、検討した。

二次元正方形角柱の解析において、周辺の流速に応じて方向を変化させる方法 (Case2) を用いた場合、空力特性は既往の研究に一致する良好な結果が得られた。

一方、幾何学的な接線方向に固定する方法 (Case1) を用いると、空気力係数を過小評価する結果となった。これは、Case2 で評価される角柱前縁の節点流速の傾きが、空気力係数の結果から判断して物理的に妥当な値であるとする、Case1 で評価される前縁の節点流速の傾きは小さく、結果として流れの剥離を抑制する方向へ強制してしまっていると考えられる。そのため、角柱上面の剥離せん断層の発達が抑制され、空気力係数が過小に評価されたものと解釈できる。

以上の結果から、有限要素解析において壁関数を用いた物体周りの流れの解析を行なう際、剥離が生じる物体の角に当たる節点において、節点流速の方向を物理的に妥当な傾きとすることが、解析精度を大きく左右する一つの要因であると考えられる。本研究で考案した上記 Case2 の扱いは、まだ改善する余地が残っているが、限られた計算能力の中で、より良好な解析結果を得る方策として有効ではないかと考えている。

参考文献

- 1) 黒田 眞一 : 2 方程式乱流モデルを用いた長大橋非定常空気力の数値計算, 土木学会論文集, No.654/I-52, pp.377-387, 2000
- 2) 山口 敦, 石原 孟, 藤野 陽三 : 力学統計的局所化による新しい風況予測手法の提案と実測による検証, 土木学会論文集A, Vol. 62, No. 1, pp.110-125, 2006
- 3) 富永 禎秀, ほか4名 : CFDを利用した高層建物周辺の風環境予測手法の開発 ―その3: 実存市街地モデルを対象としたベンチマークテスト, 日本建築学会技術報告集, 第19号, pp.181-184, 2004
- 4) 野澤剛二郎, 田村哲郎 : LESによる乱流境界層中の高層建築物表面の風圧予測, 日本風工学会誌, No.95, pp.169-170, 2003
- 5) B.E. Launder and D.B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.3, pp.269-289, 1974
- 6) 木田重雄, 柳瀬眞一郎 : 乱流力学, 朝倉書店, 1999
- 7) Mohammadi, B. and Pironneau, O. : Analysis of the K-Epsilon turbulence model, John Wiley and Sons, 1994.
- 8) Kato, M. and Launder, B.E. : The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, The 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Unsteady Flows 2, pp.10-4-1 - 10-4-6, Kyoto, 1993.
- 9) Ilinca, F. and Pelletier, D. : Positivity Preservation and Adaptive Solution for the $k-\epsilon$ Model of Turbulence, AIAA J., Vol36 (1), pp.44-50, 1998
- 10) 長谷部 寛, 野村卓史 : $k-\epsilon$ モデルにおける Logarithmic formの有効性の検討と非定常流れへの適用, 構造工学論文集 Vol.51A, pp.921-932, 2005
- 11) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.32, pp.199 - 259, 1982
- 12) 加藤真志 : 修正2方程式乱流モデルによる角柱の基本空力特性に関する研究, 名古屋大学学位論文, 1997
- 13) 加藤真志 : 修正生産項 $k-\epsilon$ を用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析, 土木学会論文集, No.577/I-41, pp.217 - 230, 1997
- 14) B.E. Lee, The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism, J. Fluid Mech. Vol.69, Part.2, pp.263-282, 1975

(2006年4月13日 受付)