盤圧から岩盤応力へ* - 地圧現象の解明に関する技術史的考察 -

西 松 裕 一¹

A Historical Review on the Theory of Rock Pressure

by Yuichi NISHIMATSU^a

a. Dr. Eng., Professor Emeritus, The University of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo,
113-8656, JAPAN (Corresponding author E-mail: nishimatsu-y@mug.biglobe.ne.jp)

Some technical difficulties caused by the rock pressure are firstly reported in late 19th century in German coal field. In the field of tunneling, the technical problem concerned with heavy load of tunnel support are observed and discussed in the last decade of 19th century.

However, from the scientific point of view, it had been difficult to explain the remarkable difference between the overburden pressure and the load of tunnel support as well as the increasing convergence of drift with time elapsed.

In early 20th century, it was recognized that the zone of loose, fractured or/and yield rock around the drift plays some important roles on the convergence and support load, both of which increase generally with time elapsed.

In 1930's, the theory of elasticity and plasticity was applied to make clear phenomena caused by the rock pressure. However, the theory did not succeed to explain the time-dependent behaviour concerned with rock pressure. Then, the theory of linear visco-elasticity was applied to explain the time-dependent behaviour of rock mass around the drift.

In early 1960's, a new theory called as NATM was proposed and applied for tunneling. This theory explicitly indicated the load bearing ability of rock mass around the drift and the dependence of the final support load on the setting time of support.

In late 1960's, a method of numerical analysis called as FEM was applied to various problems concerned with the rock pressure. Application of this method made possible to analyze the stress concentration and yield zone in the rock mass around various cross-sections of the drift. In 1970's, furthermore, FEM was applied to analyze such three dimensional problems as the convergence in the vicinity of the driving face of drift.

KEY WORDS: Earth Pressure, Rock Stress, Rock Mechanics, Roadway Support, Loose Zone, Convergence

1. は じ め に

坑道やトンネル、さらには坑内掘り鉱山の採掘跡や採掘切羽の周辺の岩盤の挙動と支保荷重の推定とは、古くから鉱山技術やトンネル技術の重要課題の一つであった。現在でも、地下発電所や原油等の岩盤内貯蔵タンクなどの建設・維持と関連してその安定性の確保は、岩盤工学上の重要課題である。

このような岩盤内空間の周辺に作用している応力や歪、その結果としての岩盤内空間の変形、断面積の縮小や周壁の崩壊、さらには、支保や覆工に作用する荷重など、すべてを含んだものを、かつては、鉱山では盤圧 (rock pressure)、トンネルでは土圧 (earth pressure) と呼んでいた。これらの言葉には一般的には「圧力」少なくとも「荷重」の意味が含まれている。しかし、研究が進むにつれて、このような坑道断面の減少や天盤や側壁の崩壊、あるいは支保に作用する荷重の増加、さらには支保の破壊などは、坑道の地表からの深度も含めて、単に圧力や荷重の大小だけで決まるのではなく、地下水、周辺岩盤の力学的性質の影響の他、坑道の

断面形状、掘削方法、支保の剛性や施工時期など、人為的な要因の影響も受けることがわかってきた。

そこで本報では、このような岩盤内に地下空間が形成されたことによって、周辺岩盤および支保が変形・崩壊する現象をすべてひっくるめて、地圧現象と呼び、地圧現象に関する学問を地圧論 (theory of rock pressure) とすることにする。

坑内掘りの炭鉱では、炭層の採掘によって緩傾斜の平板状の採掘跡が拡大して行くことが多いので、その上方の地層が徐々に沈降して、やがてその影響が地表におよぶ地表沈下 (surface subsidence) と呼ばれる現象がおこる。地表沈下は、単に農地、堤防、鉄道などの陥没だけでなく、教会の尖塔や工場の煙突の傾きを引き起こす。そのため、19 世紀中葉にはドイツや英国の炭鉱地帯で社会問題になり始めた。鉱山関係では、このような地表沈下の防止や予知と関連して、採掘跡上方の地層の挙動や充填の効果などの研究が行われるようになり、さらには坑道の周辺岩盤の状態の解明や支保の設計などが、技術課題の一つとして、取り上げられるようになった¹⁾。

トンネル関係では、19 世紀中葉から、アルプス山脈を貫く鉄道用のトンネルが建設されるようになり、大深度トンネルの支保や覆工を合理的に設計するために、トンネル周辺の岩盤の挙動に関する考察が行われるようになった。

*2008 年 1 月 31 日受付 3 月 25 日受理

1. 普通会员 工博 東京大学名誉教授
[著者連絡先] FAX: 048-465-8206

E-mail: nishimatsu-y@mug.biglobe.ne.jp

キーワード: 地圧, 岩盤応力, 岩石力学, 坑道支保, ゆるみ領域, 内空変位

このように、鉱山、特に炭鉱では、採掘跡周辺の岩盤の挙動とそれが坑道の維持に及ぼす影響、さらには採掘に起因して発生する地表沈下などが、地圧現象として最初に問題になった重要課題である。しかし、本稿では、問題が比較的単純な、岩盤内に直線状に掘削された、ほぼ水平な坑道やトンネル周辺の岩盤の挙動と支保荷重、さらにはそれらのそもそもの原因となる岩盤内の応力や歪に関する研究や技術の発達過程についてのみ考察する。

また、筆者の勉強不足や紙数の関係もあって、論考の範囲を1980年までにしたことを、予めお断りしておきたい。

2. 地圧現象と地圧論

2・1 地圧現象の特徴

地圧現象が坑道やトンネル上方に存在する岩盤 (overburden) の重量を主な原因としていることには、今も昔も異論はない。また、地圧現象が坑道やトンネルの地表からの深度だけでなく、周辺岩盤の力学的性質や地下水の有無によって、影響を受けることも古くから知られていた。

坑道やトンネルの断面の变形や崩壊も、地圧現象の一つである。坑道やトンネルが崩壊したり、断面が変形・縮小して、使用困難になることを防ぐために、木材、形鋼、煉瓦、コンクリートなど、いろいろな材料で、支保が施工される。支保の設計・施工にあたっては、支保に作用する荷重の推定が必要である。支保に作用する荷重の上限は、その坑道やトンネルの垂直上方に存在する岩盤の単位水平面積あたりの重量 (overburden pressure) に支保の支持面積を乗じたものであると、仮定することがまず考えられた。しかし、この考え方は、きわめて浅い坑道やトンネルでない限り、過大な推定であることが、早くから経験的に知られていた。特に地圧現象が問題になる程度の深度にある坑道では、技術的にも経済的にも、この仮定は非現実的であった。また、実際に、支保に作用する荷重が、経験的に決められた設計値よりも大きくて、支保が降伏、破断し、坑道天盤が崩落しても、崩落跡の空洞が地表まで達することはきわめて希で、多くの場合、坑道高さと同程度の高さで崩壊は停止して、アーチ状の天盤が「無支保」で維持されている空洞が形成されることも、鉱山、トンネル関係の技術者にとっては常識である。さらに、坑道の掘削直後、たとえば発破直後に切羽面や天盤が崩壊することは例外で、多くの場合、支保が施工されるまでの数十分ないしそれ以上の時間は、実質的に無支保でも坑道天盤の崩壊はおこらず、坑道の掘進が進むにつれて、すなわち時間が経過するにつれて、支保荷重が徐々に増加し、それとともに上下盤や坑道側壁が張り出して来て、断面積が減少して行くことが、炭鉱技術者には、古くから知られていた。

このような時間の経過とともに支保荷重が増加したり、坑道断面積が減少する現象を、どのように解釈するかが、地圧論の課題の一つである。

他方、比較的強固な岩盤を掘削することが多い金属鉱山では、坑道の掘進切羽付近や側壁が、大音響とともに突然破壊して、破片が飛散する現象である「山はね (rock burst)」の原因解明と予知予防とが、20世紀初頭から、問題になってきた²⁾。この問題は、作業員の安全に関わるので、鉱山の採掘深度やトンネルの最大深度が大きくなるにつれて、地圧論の重要な課題の一つとなっている。また、この現象は、前述の坑道やトンネルの断面が時間とともに徐々に減少し、支保荷重が増加してゆく、準静的な現象とは、発生機構もかなり異なると考えられている。

2・2 地圧論の課題と目的

既に述べたように、最初に地圧論の課題として、19世紀中葉から問題になったのは、炭鉱の採掘跡上方の地表沈下の範囲の予

測であった。その後、採掘深度が大きくなるにつれて坑道の維持、その手段である支保の設計・施工の方法が、19世紀末頃から議論されるようになった。

支保の設計のためには、まず支保荷重を知らなければならない。さらに、支保の变形許容度、剛性などを決定するためには、支保の構造、材料なども工夫しなければならない。技術者は、この問題に100年以上前から、取り組んできた。そして、理論よりもむしろ経験に頼って、丸太 (坑木) で作られた三つ杵、鋼製のレールや形鋼を用いたアーチ杵、煉瓦やコンクリートブロックを積んだアーチ形覆工、コンクリート製のセグメントリング、場所打ちコンクリートによる覆工、ロックボルト、吹き付けコンクリート、など、多種多様の支保を開発、使用してきた。

ある意味では、坑道支保の設計、施工の合理的な方法を確立することが、地圧論のもっとも重要な目的である。そのような意味で、坑道支保の発達の歴史は、本稿の主題である地圧論の発達史と密接に関連する問題であるが、紙幅の関係もあり、必要最小限にしか立ち入らない。

既に前節で述べたように、地圧現象はきわめて多種多様であり、周辺岩盤の力学的性質は、地下水の影響も含めて、岩種ごとに異なり、さらにピーク強度を過ぎた後での岩盤の变形特性が問題になることが多いので、線形弾性体で近似することが困難な場合も希ではない。そのため、弾性論をはじめ既存の力学理論を応用して理論解析を行うことは必ずしも容易ではない。このような理論解析が困難な問題の有力な研究方法の一つとして、光弾性実験や砂、粘土、石膏、セメント・モルタルなど、いろいろな材料と試験方法を用いた模型実験が、20世紀初頭から、多数行われてきた。地圧論における模型実験の最大の問題は支保も含めて、破壊特性や变形特性などが次元解析で要求される相似則を満たすような模型材料を見いだすことが困難なことである。

3. 地圧現象と地圧論の発祥

3・1 地圧現象の認識

多くの鉱山は、まず露頭によって発見され、当然のことながら、まず露頭付近の鉱石を露天掘りによって採掘することから始まる。採掘が進んで、露天掘りが困難になると、縦坑や斜坑、希には水平坑道 (通洞) を掘進して、鉱床に到達した後、坑口に近く、したがって浅い所から順次地下深部へと掘り進んで行くのが普通である。

他方、実用的なトンネルは、まず水路用のものが建設され、やがて人や車が通行するためのものが、建設されるようになったと言われている。トンネルの建設は技術的にも経済的にも容易ではないので、できるだけ短くすることが要望される。そのため、地表からの深度も浅いことが多かった。浅いトンネルでは、多くの場合、生成年代の新しい地質や風化して亀裂が発達した岩盤や粘土層あるいは土砂を掘削することになる。

このような、連続体よりむしろ粉粒体とみなした方がよいものと、連続体とみなした方がよい岩盤とは、その力学的性質がかなり異なるので、両者を区別して考えるべきであるという意見がある。また、土砂などの粉粒体と連続体に近い岩盤を合わせて、「地山 (ground)」という呼び方もある。しかし、本稿では以後、これらすべてを「岩盤 (rock mass)」ということにする。

このように、地表から浅い所では、岩盤が軟弱なことが多いので、掘削は比較的容易である。しかし、このことは逆に掘進切羽付近や使用中の坑道 (トンネル) の途中で、坑道上方の岩盤 (坑道の天盤) が崩落しやすいことを意味する。また、坑道の掘進によって、天盤はその支持力を失うので、多少たわんで、亀裂が発

Fig.1 Ritter's idea of the loose zone around the drift (by Kommerrell ⁵⁾).

生したり、以前から存在していた亀裂が拡大したりする。また、掘進直後は、崩落しなくとも、年月が経つにつれて、亀裂の数や大きさが増えて（劣化が進んで）、軟弱になる。このような天盤の崩落を防ぐために、掘削後の坑道には、支保を施工することになる。そこで今度は、どのような形式、仕様の支保をどこに何時施工するかという問題、すなわち支保の設計施工に関する問題がおこる。支保設計を行うとき、まず問題になるのは、支保に作用する外力、すなわち支保が支持すべき荷重である。

地表からの深さが小さい坑道やトンネルでは、地圧現象として問題になるのは、ほとんどの場合、天盤の崩落（以後簡単のため、落盤という）のみである。もちろん、このような落盤が地表にまで達して、地表に亀裂や陥没が発生して、農地や家屋に被害が及ぶこともある。

他方、岩盤が軟弱な炭鉱の坑道などでは、深度数百 m になると、また、アルプスを越えるトンネルのように、岩盤が強固な場合でも深度が 1,000 m 程度になると、天盤の沈降だけでなく、側壁や床面が徐々に坑道内に張り出して来るという地圧現象が観察されるようになった。

3・2 土質力学に基づく地圧論

支保荷重として誰しもまず考えるのは、坑道やトンネル（以後簡単のために、両者を特に区別する必要がない限り、単に坑道という）の上方の岩盤（トンネル技術者の間では、これを「土被り」と呼ぶことが多いが、本稿ではすべて、被覆岩盤ということにする）の重量、すなわち被覆岩盤圧（overburden pressure）であろう。この被覆岩盤圧は、深度 10 m の水平坑道で、天盤 1 m² あたり 250 kN 程度、すなわち約 250 kPa になるので、地表からの深度が数十 m になると、少なくとも、普通の木製支保では支持困難になる。もちろん、このような深度であっても、落盤が発生することも、大きな荷重が支保に作用することも、めったにないことが、古くから経験的に解っていた。このような経験的事実を説明するために、例えば穀物貯蔵用のサイロの底板に作用する圧力が、サイロ内の穀物の貯蔵高さから計算した値よりも小さいことから類推する考え方などが、19 世紀後半から 20 世紀初頭にかけて、いくつか提案された³⁾。

また、落盤が起こった後、崩落した岩屑や土砂を除去しても、さらに崩落が続くことはなく、天盤部に周囲を健全な岩盤に囲まれたドーム（アーチ）状の安定した空間が形成されていることが、しばしば観測された。このような事実から、支保荷重は、坑道天盤のたわみや亀裂の形成によって岩盤が劣化したドーム状の部分の重量であると考えるのは、当然のことである。このような坑道周辺の岩盤が劣化した部分は、当然、その荷重支持力も小さく、したがってまた、その内部の応力は、周囲の健全な岩盤内よりも小さい。このような部分の存在は 19 世紀末ごろには、技術者の間で広く知られるようになり、トンネル関係では、ゆるみ領域

Fig.2 Engesser's idea of the loose zone around the drift (by Kommerrell ⁵⁾).

(loose zone)、炭鉱関係では、免圧圏（destressed zone）、または降伏領域（yield zone）と呼ばれるようになった。このようないろいろな名称は、それぞれの研究者、技術者の地圧現象の理解の仕方を反映している。したがって、本来は、各時代、各産業界の当時の技術を反映したこれらの名称の由来について述べた上で、それぞれを使い分けるべきであろう。しかし本稿では、これらすべての名称をひっくるめて、最も包括的で現在もよく使われている「ゆるみ領域」と言うことにする。なお、ゆるみ領域については、後で改めて詳しく考察する。19 世紀半ばになるとヨーロッパ各国で鉄道が急速に普及し始めた。周知の通り鉄道は急勾配を嫌うので、山地を迂回するよりも、その両側を一直線にトンネルで結ぶ方が有利な場合が増えて、鉄道用トンネルがヨーロッパ各国で建設されるようになった。19 世紀後半になると、特に、アルプス山脈を越えてヨーロッパの南北を結ぶ長大トンネルが、次々に建設された⁴⁾。アルプス越えのトンネルは距離も長いが、深度も大きいので、それまでトンネル技術者には知られていなかった、トンネル側壁の張り出しなどの新しい現象が起こって、地圧の大きさや支保設計が重要な技術課題となった。このような事情を反映して、19 世紀末になると、上記の坑道天盤に形成されるゆるみ領域内の岩盤の重量が、支保荷重であるという前提の下で、ゆるみ領域の形状や高さを予測するための方法や仮説がいろいろと提案された。

たとえば、Ritter (1879) ^{*1} は、坑道の垂直断面について考えた場合、天盤のドーム状のゆるみ領域と健全な岩盤との境界線の形状（以後簡単のため、これを単にゆるみ領域の形状と言うことにする）を放物線と仮定して (Fig. 1 参照)、その高さは、坑道幅の自乗に比例するとした。また、支保荷重は、ゆるみ領域の岩盤の重量と、岩盤の引張り強度、または粘着力 (cohesion) による支持力との差であると考えた。したがって、支保荷重は、地表からの深度によって左右されないことになる。しかし、彼は坑道側壁や床部に作用する地圧については考慮していない^{5, 6)}。

また、Engesser (1882) は、天盤が僅かに沈下することによって、放物線形のゆるみ領域が形成されると考えた。さらに、Fig. 2 に示すように、坑道直上だけでなく、側壁部にも、ゆるみ領域が形成され、この部分のゆるんだ岩盤が滑り面に沿って動き出そうとして坑道側壁に作用する圧力を、主動土圧の理論を用いて計算している^{3, 5)}。

19 世紀末までは、坑道天盤に作用する圧力が、深度の影響を受けるのか否かが、しばしば議論的となっていた。この問題について、Kommerrell ⁵⁾ は、穀物サイロの側壁や底板に作用する圧力に関する研究や上記の Engesser の研究などを参考にして、「坑道天盤に作用する圧力は、深度が或る程度大きくなると、深度の

*1: 著者名の次に暦年があるものは、参考文献として記載した複数の著者が引用、解説しているが、筆者が原著論文を入手できなかったので、参考文献として記載しなかった論文ないし書籍の著者と発表年とを示す。

Fig.3 The loose zone and support load of the drift (by Terzaghi⁷⁾).

影響を受けない」と結論づけた。また、ドーム状のゆるみ領域の形状を半楕円形で近似して、その高さ（楕円の半長径）は、坑道天井の沈下量に比例するとした。さらに、坑道側壁に作用する圧力を Rankine (1857) の土圧理論によって計算して、岩盤が強固で側壁に滑り破壊が起こらないときと、岩盤が軟弱で土砂に近く、側壁が滑って主動土圧が作用する場合とを区別した。

このような土質力学の理論を用いてゆるみ領域の範囲を求め、さらには支保荷重を計算する方法は、その後も 1930 年代を通じて何人かの研究者によって研究された。

Terzaghi⁷⁾ は、これらの研究を集大成して、Fig. 3 に示すように、まず坑道側壁の土砂ないし、ゆるんだ岩盤の滑り線が、水平な坑道床面となす角が、 $\pi/4 + \phi/2$ であるとした。ここで ϕ は、内部摩擦角である。その結果、坑道天井でのゆるみ領域の幅 $2B_1$ は、

$$2B_1 = 2 \left\{ B_0 + H_0 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right\} \quad (1)$$

で与えられる。これより上方のゆるみ領域と健全な岩盤との境界は、Fig. 3 の実線で示すように、必ずしも垂直な直線ではないが、簡単のため、これを破線で示すような垂直線で近似する。そして、このゆるみ領域の任意の位置 z における微小厚さ dz の帯に作用する力の釣り合いについては、

$$2B_1 \gamma dz = 2B_1 (\sigma_v + d\sigma_v) - 2B_1 \sigma_v + 2\tau dz \quad (2)$$

が成立すると考える。ここで、 $\gamma = \rho \cdot g$ は岩盤の比重量、 τ は岩盤のせん断抵抗で Coulomb の破壊条件式

$$\tau = c + \sigma_h \tan \phi \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 c は岩盤（土砂）の粘着力、 σ_h は水平方向の圧力である。このような仮定から、地表から任意の深さ z での天井圧力 σ_v は、

$$\sigma_v = \frac{B_1 (\gamma - c/B_1)}{K \tan \phi} \left\{ 1 - \exp \left(-K \tan \phi \frac{z}{B_1} \right) \right\} \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $\sigma_h / \sigma_v = K$ である。さらに、深さ z が十分に大きいときは、この式の指数関数の部分が無視できるようになり、

$$\sigma_v \approx \frac{B_1 (\gamma - c/B_1)}{K \tan \phi} \quad (5)$$

が成立する。この式は明らかに、深度が大きいときは、坑道の天井圧力が深度と無関係であることを示している。

これらの式は、Terzaghi のトンネル土圧の式として、後述する

NATM 理論が普及するまで、トンネルの支保荷重の計算式として、広く利用された。

3・3 坑道周辺の圧力分布を考慮した地圧論

ドイツの炭鉱では、19 世紀後半になると、隣接する採掘跡空洞の影響を受ける採炭坑道の維持が重要な技術課題となって、多くの議論が行われるようになった。しかし、本稿では、紙幅の関係もあるので、採炭坑道に対する採掘跡空洞や採掘切羽の影響には、立ち入らないことにする。前節で既に述べたように、深度が大きくなると、採掘跡空洞の影響がない場所に掘削された水平坑道でも、天井だけでなく坑道側壁にも作用する地圧が、無視できなくなってきた。炭鉱の坑道では、周辺の岩盤が比較的軟弱なこともあって、坑道天井は崩落する前に徐々に沈降し、さらに床面の上昇（盤膨れ）や側壁の張り出しなど、坑道の全周で坑道空間に周辺岩盤が張り出して来る地圧現象が観測されるようになった。この現象は、わが国では天井沈下、上下盤接近など、などと呼ばれたこともあった。しかし、最近では、坑道断面の減少すべてをひっくるめて「内空変位 (convergence)」と呼ばれるようになっているので、本稿でも、これからは、この名称を用いることにする。

当時は、被覆岩盤の重量に基づく垂直方向に作用する圧力の他に、水平方向の圧力が作用する理由がよくわからなかった。この点について、スイスの地質学者 Heim (1878) は、被覆岩盤圧は、地下深部では、本来ほぼ静水圧的に作用しているが、坑道の掘削などで力の釣り合いが破られると、静水圧状態でなくなり、岩盤はその結合力（粘着力）を失って塑性変形を起こすと考えた。そして、この塑性変形を起こさせる性質を「潜在塑性」と名付けた。また、このような塑性変形は、粘性流体の流動と同様に岩盤の粘着力や内部摩擦の影響を受けて、ゆっくりと時間をかけて進行するのが特徴であり、このような塑性変形によってやがて地山内に、新しい力の釣り合いが形成されると述べた^{5, 8)}。彼の学説は、その後の地圧論、特に坑道断面の縮小（内空変位）や坑道周辺のゆるみ領域の形成に関する多くの学説に、大きな影響を及ぼした。

また、ドイツの Trompeter (1899) は、坑道周辺の岩盤には、深度に比例する膨張力が発生して、あらゆる方向から、周辺岩盤が坑道内へ押し出されて来ると述べた⁹⁾。

20 世紀に入る頃には、地圧の原因が被覆岩盤の重量にあるという点では、研究者たちの意見がほぼ一致するようになった。しかし、当時発達しつつあった弾性論についての、鉱山技術者の知識は未だ十分でなかったため、坑道天井が沈降することはともかく、床面が盛り上ったり、側壁が張り出してくる現象を説明するために、多くの議論が戦わされた⁶⁾。

また、このような坑道の全周から張り出して来た岩盤は、必ずしも脆性破壊をして粉粒体状になっているわけではなく、多少の巨視的亀裂はあっても、むしろ軟鋼や粘土のように塑性変形をおこしているように見えることが解ってきた。

v. Willmann (1911) は、まず坑道の天井だけでなく、下盤にもゆるみ領域が形成されるとした。また、坑道側壁には、掘削によって除去された岩盤がそれまで支持していた地圧が、一種のアーチ基脚圧 (abutment pressure) として作用し、その結果側壁部の岩盤が横方向に押されて、坑道内に張り出してくると述べた (Fig. 4 参照)。

Kommerell⁵⁾ は、坑道周辺のゆるみ領域は、掘削時の発破などによって発生する亀裂に起因すると考えた。また、v. Willmann の考えをさらに拡張して、このように亀裂がはいった側壁の岩盤では、地圧の支持力が減少するので、側壁部のゆるみ領域は、アーチ基脚圧の作用によってさらに外側に広がり、アーチ基脚圧は、

Fig. 4 V. Willmann's idea of the destressed zone of rock pressure around the drift (by Kommerell ⁵⁾).

より広い範囲の岩盤で支持されるとした (Fig. 5 参照)。

このような本節で今まで述べてきた坑道周辺の地圧とゆるみ領域に関する研究ないし意見は、いずれも主として現場での観察と経験とに基づいて得られたものであり、必ずしも厳密な力学理論に立脚したものではない。また、前節で述べた土質力学に基づく地圧論とは異なり、直ちに支保設計に結びつくものでもない。そのせいもあって、20世紀初頭には、地圧現象は、未知の自然力の作用に由来する現象であるという意見も、なお残っていた。

このような状況の中で、Eckardt ¹⁰⁾ は、地圧現象を材料力学の問題として解明することを試みた。そして、地圧は岩盤に作用する重力に起因する圧力であるという意見が妥当であるとした。また、地圧現象が特別なもののように見えるのは、岩盤が Hooke 弾性体でないこと、したがって、もっぱら鋼材を対象としていた当時の材料力学で無視されている塑性変形や時間の影響が重要であることを指摘した。彼はこのような前提の下で、坑道の掘削によって、坑道天盤はそれまでの支持力を失うが、坑道上部の岩盤全体の重量が減少したわけではないので、失われた支持力は、坑道周辺の岩盤が負担して、全体としての力の平衡が保たれるとした。また、独自の支持力線を仮定して、坑道の存在が近隣の採掘跡周辺の地圧に与える影響などを説明した。

第1次世界大戦の混乱が一応終息すると、アルプス越えのトンネル建設の経験を背景にして生まれた新しい地圧論が、炭鉱技術者にも注目され、紹介されるようになった。

まず、オーストリアの土木技術者である Kafka ⁶⁾ が、地圧現象の解明には科学的根拠に基づいた研究が重要であることを強調して、従来の研究を評価、解説した。彼は、まず岩盤は水分が増えると内部摩擦が減少して、強度が小さくなることを指摘した。また、坑道の掘削によって乱された岩盤内の応力の平衡状態は、最小エネルギー則にしたがって、新しい平衡状態に戻ると述べている。さらに、坑道、トンネルも含めた地下構造物では、作用する外力がよく解っていないことが問題であることを指摘し、従来の土質力学に基づく地圧論ではなく、弾性論を応用して地圧現象を解明することを試みたが、具体的な成果を得ることは出来なかった。

ドイツ・ルール地方の鉱山監督官である Haak ¹¹⁾ は、前述の Kommerell の学説を炭鉱の坑道に対して適用することを試みた。そして、坑道掘削によって岩盤内の当初の応力状態が変化して、圧力ドーム (pressure arch) が形成され、その基部には、大きなアー

Fig. 5 The destressed zone and abutment pressure around the drift (by Kommerell ⁵⁾).

チ基脚圧が作用する。他方、その内側では応力が解放されて、ゆるみ領域となると考えた。また、圧力ドームの形成によって、その外側の地圧が支持されるので、支保に作用するのは圧力ドーム内の岩盤重量のみであると述べている。

また、Spackeler ¹²⁾ は、採炭切羽前方にアーチ基脚圧として作用する地圧を利用して採炭を容易にしようという観点から、地圧問題を考察した。彼はまず前述の Heim (1878) の静水圧説を紹介した後、岩盤は水蒸気と同じく、「膨張圧」を持っていて、そのエネルギーによって、坑道周辺の岩盤は破壊されて、坑道内に押し出されて、その後再び固結すると主張した。また、Kommerell ⁵⁾ の圧力ドーム説を引用して、このように破壊された岩盤部分では、地圧も小さいと述べている。さらに、彼はこのような坑道周辺のゆるみ領域について、最初に述べたのは、Trompeter (1899) であるから、これを「Trompeter の免圧圏 (Trompeter's zone)」と呼ぶことを提案した。この提案はその後しばらくは、我が国も含めて多くの国で広く受け入れられた。しかし、その後、Trompeter は単に坑道周辺の岩盤には、深度に比例する膨張力が存在していると述べただけであるから、Spackeler の提案は受け入れがたいと批判されている ^{9, 13, 14)}。

ドイツ・ルール地方と比較すると浅い炭層を移行していた英国でも、1920年代になると、地圧現象とその対策としての支保設計が問題となってきた。その結果、1927年には、地圧・支保研究委員会が設立された ¹⁵⁾。この委員会の第1回報告 ¹⁶⁾ は、Yorkshire 地方の同じ炭層を採掘している4炭鉱に対するアンケートに基づいて、地圧現象を論じているが、その中で薄い地層が何枚も重なっているこの地域では、坑道天盤の圧力ドーム説は、適用出来ないと述べている。この委員会はその後も活発な活動を続けて、地圧問題以外の問題についても調査検討している。その第7回報告 ¹⁷⁾ では、深度 600 – 800 m の坑道で坑道高さの時間的変化 (上下盤接近) を測定した結果を報告している。この炭鉱では、坑道下盤が軟弱な粘土層なので、上下盤接近の大部分は、坑道床面の張り出し (盤膨れ) としておこる。この報告では、盤膨れの様式を圧潰、挫屈、流動 (塑性変形) の3種類に分類して議論している。

ドイツでも、1930年代にはいると、坑道の上下盤接近の時間的経過を測定することが試みられるようになった。たとえば、Fleischer ¹⁸⁾ は、Fig. 6 に示すように、天盤のボーリング孔底に固

Fig.6 Measurements of the convergence of the drift (by Fleischer¹⁸⁾).

(a) Measurement of the floor heave by the plumb line.

(b) Measurement of the distance between two steel bars cemented in the rock wall by the extensometer.

定したプラグから吊り下げた重錘の直下に床面の測点を設置して、上下盤接近を測定した他、坑道側壁に上下に 20–30 cm 間隔で、長さ 3 m のロックボルト 2 本を打ち込んで、その間隔の時間的変化をレバー式変位計で測定した。また、その結果から側壁に作用している地圧を求めるために、コアボーリングによって採取した直径 90 mm、高さ 80–120 mm の円柱形試験片について、1 軸圧縮試験をおこない圧縮強度と Young 率を測定した。

これらの現場での観察・計測に基づく研究とほぼ平行して、Dinsdale²⁾は、支保の荷重や変形量を測定するだけでは、地圧現象を解明することは出来ないで、岩盤内の応力状態や岩盤の破壊機構を解明しなければならないことを指摘した。そして、圧力ドーム説を採用した上で、材料力学のアーチ理論を応用して、ゆるみ領域の範囲すなわち圧力ドームの大きさを計算することを試みた。その結果、圧力ドームの大きさを求めるためには、アーチ基脚部に作用する水平方向の力を推定しなければならないと述べている。

4. 弾塑性理論に基づいた地圧論

4・1 弾性論の平面問題としての解析

弾性理論は、19 世紀末には既にその理論体系が確立されていた。塑性論は、弾性体の降伏条件と密接に関連しているが、1913 年に、von Mises が 3 次元応力状態での降伏条件を提案し、降伏条件式がそのまま塑性領域での応力状態でも成立するという理論を発表したことによって、その古典的理論体系が、ほぼ完成した¹⁹⁾。

地圧問題に弾性理論を応用して、坑道周辺の応力状態を解析することを最初に試みたのは、Schmid²⁰⁾であろう。彼は、Airy (1862) の応力関数を用いて、円形断面の水平坑道周辺の応力状態を、平面歪問題として解析した。我が国では、山口²¹⁾が、Schmid とは独立に、半無限弾性体に重力が体積力として作用している場合の水平円形坑道周辺の応力状態を、平面歪問題として Airy の応力関数を用いて計算した。またこれに続いて、楕円断面²²⁾や正方形（厳密にはハイポトロコイド (hypotrochoid)）断面²³⁾の水平坑道の周辺の応力状態について計算した論文が発表されている。しかし、このような Hooke 弾性体を仮定した理論計算だけでは、坑道周辺の岩盤のゆるみ領域の状態について議論することは、困難である。

Kühn¹³⁾は、まず Spackeler¹²⁾のこのような岩盤の「膨張圧」

については、科学的根拠がないことを指摘し、また、坑道周辺のゆるみ領域は、Kommerell⁵⁾が想定したように主として掘削時の発破によって形成されるとは考え難いと述べた。そして、ゆるみ領域は、弾性体の中に坑道という空間が出現したことによって周辺の応力場が乱された結果発生した応力集中によって形成されたと考えた方がよいとした。彼は自身のこのような考え方を裏付けるために、Airy の応力関数を用いて、一様応力状態の（体積力すなわち重力の影響のない）無限弾性体を貫通する円形断面水平坑道周辺の応力状態を計算した。その場合、境界条件として、垂直方向（z 方向）の圧力、すなわち被覆岩盤圧 $\sigma_z = p$ 、水平方向（x および y 方向）の圧力 $\sigma_x = \sigma_y = q$ としたとき、

$$q = \frac{1}{m-1} p \quad \dots\dots\dots (6)$$

を与えた。これは、無限遠点での水平（x および y）方向の変位を 0 とすることを意味する。ただし、 m は、Poisson 数である。

このとき、 $z-x$ 面内で坑道断面中心を原点、 z 方向を基軸とする極座標系を用いると*2、坑道周辺の半径方向の応力 (radial stress) σ_r 、周方向の応力 (circumferential stress) σ_θ 、およびせん断応力 (shearing stress) τ は、次式で与えられることになる。なお、本稿では、圧縮応力を、+ とする。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \frac{m}{m-1} \frac{r^2 - a^2}{r^2} + \frac{p}{2} \frac{m-2}{m-1} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \frac{m}{m-1} \frac{r^2 + a^2}{r^2} - \frac{p}{2} \frac{m-2}{m-1} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \quad \dots\dots\dots (7) \\ \tau &= \frac{p}{2} \frac{m-2}{m-1} \left(-1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

彼は、このような理論式を用いて、岩盤を弾性体と考えるかぎり、(1) 坑道周辺にはゆるみ領域は存在せず、むしろかなりの応力集中が起こること、(2) この応力集中の大きさは、岩盤の初期応力状態と Poisson 数に左右されること、(3) 坑道周壁が破壊するか否かは、応力と岩盤の強度との関係で決まること、(4) しかし、破壊後の挙動について弾性論は何も言えないことなどを指摘した。さらに、Kühn²⁴⁾は、1932 年には岩盤などの実在の材料は応力が弾性限を越えると、塑性域にはいり、載荷能力が低下するので応力の減少が起こり得ること、したがって、ゆるみ領域について知るためには、圧縮強度だけでなく、引張り強度やせん断強度も含めた岩盤の降伏条件を知ること、さらにこの降伏条件と結びついている塑性理論を応用する必要があることなどを指摘した。

このような Kühn の意見に対応するかのように、1930 年には、岩盤の変形、破壊特性について知るため、岩石の角柱試験片を用いた 1 軸圧縮試験がおこなわれている²⁵⁾。

4・2 塑性変形を考慮した地圧論

地圧論の研究に塑性理論を応用して、坑道周辺の応力状態を最初に議論したのは、おそらく Fenner²⁶⁾であろう。彼は、当時すでに得られていた弾性論における平面歪問題に関する理論解を引用して、式 (6) と同じ境界条件の下での、円形および楕円形断面の水平坑道周辺の応力状態を計算した。そして、その計算結果と岩石の降伏条件とを対比して、深度 500 m 以上になると、普通の砂岩では坑道周辺には降伏領域、すなわちゆるみ領域が存在する可能性が高いことを指摘した。

*2：ここで y 軸は水平坑道の軸方向であるから、弾性論的には、平面歪問題となる。

Fig.7 The state of stress around the circular drift under the initial state of hydrostatic stress.

次に、岩盤が完全弾塑性体であると仮定して、境界条件が静水圧状態であり、かつ3・2で述べたCoulombの降伏（破壊）条件を表す式(3)で、粘着力 $c=0$ であるときに、円形立坑周辺の応力状態を表す式を*3、式(3)とAiryの応力関数とを用いて、次のように与えた。

降伏（塑性）領域では、

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_{Ra} \left(\frac{r}{a} \right)^{K-2} \\ \sigma_T &= (K-1)\sigma_{Ra} \left(\frac{r}{a} \right)^{K-2}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (8)$$

弾性領域では、

$$\begin{aligned}\sigma_R &= p \left\{ 1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{K} \right) \right\} \\ \sigma_T &= p \left\{ 1 + \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2}{K} \right) \right\}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (9)$$

降伏（塑性）領域と弾性領域との境界線の半径 b を与える式は、

$$\frac{2p}{K} = \sigma_{Ra} \left(\frac{b}{a} \right)^{K-2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$K = \frac{2}{1 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また、 a ：坑道半径、 p ：静水圧、 σ_R ：坑道半径方向の応力、 σ_T ：坑道周方向の応力、 σ_{Ra} ：坑道支保の支持圧力、である。

これらの式が成立する場合の円形坑道周辺の応力状態を、内部摩擦角 $\phi=30^\circ$ 、 $p/\sigma_{Ra}=8$ として計算した例を、降伏領域がない場合と対比して、Fig.7に示す。

なお、これらの式から降伏領域の応力は、坑道支保の支持圧力 σ_{Ra} に比例して大きくなることがわかる。また、逆に坑道支保がない（支持圧力が0）場合は坑道が崩壊してしまうことになる。これは、Fennerが、これらの式を導くときに、円形立坑周辺の地質として流砂（quick sand）層を想定して、式(3)の粘着力（せん断強度） c を0、したがって1軸圧縮強度を0と置いたからである。粘着力 c が0でなく、かつ坑道支保が弾性体で支持圧力 σ_{Ra} が内空変位に比例する場合については、後に平松、岡が理論解を与え

ている^{27,28)}。

Fennerの研究が発表されると間もなく、Spackeler²⁹⁾は、彼の理論がRuhr地方の炭鉱に適用できるか、否かについて考察した。そして、深度600mを越えると坑道周辺の岩盤の状態の変化などの地圧現象が著しくなるという従来の経験が、Fennerの解析結果と矛盾しないこと、また、彼が理論的に求めた降伏領域の形状が現場で観測されるゆるみ領域の形状とほぼ一致することを示した。したがって、このような場合では、坑道周辺の応力集中によって、岩盤が降伏して塑性変形を起こし、塑性変形した部分は荷重支持力が低下して、ゆるみ領域となると言える。

4・3 1次地圧と2次地圧

前節で述べた坑道周辺の応力状態や岩盤の「降伏」後の変形特性などの理論的考察の正当性を検証したり、3.で述べたような、主として経験と定性的観察とに基づいて議論されて来た坑道周辺の岩盤の破壊、変形の状況、それに伴う坑道断面の変化や支保の変形、破壊などを定量的に議論するために、原位置計測が1930年頃からは行われるようになってきた。

当時は、坑道周辺の岩盤に作用している応力を直接測定する技術が未だなかったこと、また、岩盤応力と支保荷重とが明確に区別されていなかったこともあって、まずいろいろな形式の圧力計を支保の基部や部材継ぎ手部に挿入して、支保荷重を測定することが試みられた^{30,31)}。このようなコンクリート覆工も含めた支保に作用している荷重や応力を測定する試みは、第2次世界大戦後も世界各国で続けられた³²⁾。

もちろん既に3・3で述べたような、坑道の機能（運搬、通行、通気、排水、など）を維持するために重要な、坑道の断面積、特に高さ（上下盤の間隔）の時間的変化を測定する技術の開発も続けられた。

しかし、1950年代になると、坑道側壁や鑛柱に削孔したボーリング孔内に歪ゲージや光弾性素子などを埋設して、地圧の時間的変化を直接に測定する方法の開発に、重点が置かれるようになった³³⁻³⁵⁾。

もちろん、上下盤間隔の変化は、岩盤変位の測定であり、岩盤応力や支保荷重そのものではない。また、坑道側壁に作用している地圧の時間的変化は、岩盤応力の絶対値とは、全く異なる。そこで、1960年代になると、坑道や地下発電所用空間などの側壁に作用している地圧の絶対値（当時、絶対地圧と呼ばれた）を測定することが試みられるようになり、いろいろな測定法が開発された。これにはたとえば、歪ゲージなどを用いた受感体を埋設した1対のスロットの中間に、ダイヤモンド・ソーで油圧ジャッキを挿入するためのスロットを切り込む。その後、このスロットに

*3：静水圧状態であるから、立坑でも水平坑道でも、結果は同じである。

Fig.8 Measurement of the rock pressure in the side wall of drift by the hydraulic pressure cell (flat jack) (by Panek and Stock³⁶⁾).

Fig.9 Measurement of the state of stress on the surface of rock wall by the stress relieving.

平板状の油圧ジャッキ (hydraulic pressure cell) (Fig. 8 参照) を挿入して加圧し、受感体の示度が加圧用のスロットを切り込む前と同じ値になった時のジャッキ圧力から、側壁に作用している地圧の絶対値を知る方法、すなわち後に応力補償法 (応力再現法) (Stress compensation method) と呼ばれることになる方法がある³⁶⁾。この方法で使われる加圧用油圧ジャッキは、当初、矩形であったが、その後、円盤形のダイヤモンド・ソーで切り込まれるスロットの形に合わせて半月形のものに改良された³⁷⁾。

また、この方法とほぼ並行して、坑道壁面に電気抵抗線歪ゲージ 3～4 枚を組み合わせた受感体 (rosette gauge) を接着した後、コアビットでその周囲に円環状のスロットを切り込んで、円環内の応力を 0 にして、スロット切り込み前後の歪の差から、坑道側壁の応力状態を知る応力解放法 (stress relief method) (Fig. 9 参照) が開発された^{38, 39)}。しかし、このような坑道側壁に作用している応力ないし歪は、坑道掘削以前から岩盤内に存在していた岩盤応力、すなわち一次地圧 (primary rock pressure) ではなく、坑道掘削 (地下空間の存在) の影響を受けて、1 次地圧が乱された 2 次地圧 (secondary rock pressure) である。

このような認識が普及すると、後者の応力解放法は、一方では坑道壁面から十分に深い所までボーリングをおこなって、坑道の存在の影響がないと考えられる位置でボーリング孔の壁面の歪

を測定して、もともと岩盤内に存在していた応力、すなわち 1 次地圧を測定する孔壁歪法⁴⁰⁾、他方では、同じく 1 次地圧の測定法である孔底歪法 (borehole bottom strain method)⁴¹⁾へと発展していった。

1950 年代後半になると、前述の Kühn や Fenner の弾性論や塑性論に基づいた地圧論の理解や普及が進んだ他に、上述の原位置測定の結果の考察によって、坑道周辺のゆるみ領域の発生や坑道天盤の沈下、側壁の坑道内への張り出しなど、いろいろな地圧現象は主として、1 次地圧が坑道の掘削によって乱された結果発生した 2 次地圧によって生起することが、ほぼ共通の認識となった。そして、その結果として、1 次地圧を測定しようという試みが活発になり⁴⁰⁻⁴²⁾、現在もその測定法の開発改良が続けられている。また、それとともに 1 次地圧という呼び方も、徐々に初期岩盤応力 (initial rock stress)、そして 2 次地圧も付加 (岩盤) 応力 (induced rock stress) と呼ばれるようになってきている。しかし、本稿では、このような岩盤応力の測定に関する問題には、これ以上立ち入らない。

4・4 ゆるみ領域

坑道周辺の岩盤が坑道の掘削による応力集中などの影響によって、亀裂密度が増加したり、塑性変形をおこしたりして、掘削以前の自然のままの状態とは異なった状態になっていて、この部分が支保荷重に大きな影響を及ぼしていることは、19 世紀末までには既に経験的に知られていた⁵⁾。しかし、この「ゆるみ領域」内の岩盤の力学物性や応力状態については、当時からいろいろな意見があり、その名称も多種多様であった。本稿では、これらすべてを区別しないで、「ゆるみ領域」と呼んできた。それは、この「ゆるみ領域」内の岩盤の状態については、いまなお十分には解明されているとは言い難い所為でもあった。

4・2 で述べたように、Fenner は、岩盤が完全弾塑性体であり、したがってゆるみ領域は、岩盤が降伏して塑性変形している領域であると仮定した。しかし、1960 年代にはいると、いろいろな岩石の 3 軸圧縮試験の結果から^{43, 44)}、岩石は完全弾塑性体ではなく、鉱山の坑道やトンネルなどで問題になる周圧 20～30 MPa 以下の領域では、岩石の差応力一軸歪線図は、多くの場合、勾配が徐々に緩やかに (接線弾性率が小さく) なって、ピーク応力に

Fig. 10 A result of the tri-axial compression test of a limestone (by Byerlee⁴⁴⁾).

達した後、急激に荷重支持能力を失うことが明らかになってきた (Fig. 10 参照)。

このような岩石の破壊変形に関する実験結果などを考慮して、林ら⁴⁵⁾は、岩盤の破壊 (降伏) 条件が、Mohr の破壊応力円包絡線で与えられるとき、この包絡線と周辺岩盤の任意の位置での応力状態を表す応力円との最短距離 $d_{\min}$ の関数として、ゆるみ係数 R を定義した。

こうして、1970 年代になると、再びゆるみ領域をどのように定義し、その範囲を原位置でどのようにして測定するかが、問題になってきた。既に 4・2 で述べたように炭鉱などで見られる軟弱な岩盤では、深度数百 m を越える坑道では、ゆるみ領域は、坑道掘削による応力集中や湧水などの影響によって岩盤が降伏して塑性変形した部分であると考えられていた。しかし、金属鉱山などの比較的強固な岩盤中に掘削された坑道や比較的浅いトンネルなどでは、ゆるみ領域は、掘削時の発破や掘進切羽の隅部に発生する一時的、局所的な応力集中が主な原因となって生成された亀裂密度が増加した部分であるという意見もある。このような意見は、トンネル掘進機で掘削した坑道の方が、削岩・発破工法で掘削した坑道よりも、周辺岩盤の安定性が高いという経験によっても、裏付けられる⁴⁶⁾。

坑道周辺の岩盤の亀裂密度を直接測定することは、困難である。しかし、岩盤の P 波速度 v とその岩盤から採取した岩石試験片の P 波速度 V との比 v/V は、岩盤の亀裂密度ないし亀裂の平均間隔と密接な関係があるので^{47,48)}、トンネル周辺の岩盤について、両者を測定して、両者の比 v/V の値から、ゆるみ領域の範囲を推定する方法が提案されている⁴⁹⁾。

なお、近年は、このゆるみ領域内の岩盤は、掘削の影響によって、いわゆるピーク強度点を過ぎて荷重支持力が徐々に低下しては居ても、未だ完全には失われてはいない領域 (post-failure region)⁵⁰⁾ に属するという考え方が有力になりつつある。

5. 時間の影響を考慮した地圧論

5・1 NATM (New Austrian Tunneling Method)

周知のとおり NATM は、オーストリア・ザルツブルグ大学の Rabcewicz⁵¹⁾ が提案した山岳トンネルの設計・施工法である。彼は、オーストリアをはじめ、イラン、フランスなどのトンネル工事で強大な地圧によって支保が破壊されている場所では、支保の梁材が水平方向の圧縮荷重によって、せん断破壊を起こしている例が多いことに注目した。そして、Fig. 11 に示すように、(I) まず、

Fig. 11 The failure process of rock mass around the drift (by Rabcewicz⁵³⁾).

垂直方向に作用する主圧力によって、トンネル側壁部がせん断破壊を起こす。(2) その結果、主圧力の支持抵抗が減少した部分の幅 (スパン) が拡大し、そのため、トンネルの天盤層は下方に、下盤層は上方にたわんで、上下盤接近が起こる。(3) やがて、このようなたわみによって、上下盤に曲げ破壊がおこり、破断した岩盤層がトンネル空間内に侵入してくる、と考えた。

そして、このような現場での支保の破壊状況や坑道周辺の岩盤の破壊、変形状況に関する知見と経験とを総合して、次の 3 項目を指摘した。

- (1) 地圧現象が激しいトンネルで従来採用されてきた分割掘削工法は、切羽付近の応力状態を複雑にする。また、床面も含めた周壁すべてを早急に保護補強することが困難で、自由面がそのままで放置されている時間が長いので、採用しない方がよい。
- (2) 周辺の岩盤は、もともと構造部材の一部であると考えて、岩盤自身が持っている耐荷能力をなるべく活用すべきである。
- (3) 掘削によって形成された岩盤の自由面は、周辺の応力状態が不安定で吸湿などによって劣化しやすいので、床面も含めて、なるべく早く補強、保護すべきである。そのためには、ロックボルト (rock bolt) と吹き付けコンクリート (sprayed concrete) がきわめて有効である。

その後、Rabcewicz は、自身の学説をさらに発展・体系化して、従来の支保工法では、支保とトンネル壁面との間に空隙が残るので、周辺の岩盤がゆるむ。新工法では、これを避けるために、掘削後なるべく早くロックボルトを施工する。ロックボルトは打設後直ちに岩盤を補強するので、仮支保としてきわめて優れている。次に、吹き付けコンクリートをトンネル壁面全周に施工する。吹き付けコンクリートは、岩盤表面に密着するので、岩盤の補強、保護効果が大きく、周辺岩盤と一体になって「補助アーチ (auxiliary arch)」が形成される。この補助アーチが妥当な地圧支持能力を有しているか否かは、原位置計測によって、検証、補正する。と述べて、これを「新オーストリア工法」(NATM) と名付けた^{52,53)}。

このような NATM の考え方を説明するために、Pacher⁵⁴⁾ は、4・2 で述べた Fenner²⁶⁾ の弾塑性解析を参考にして、後に Fenner-Pacher 線図とよばれるようになる支保荷重と岩盤の力学特性との関係を表す模式図 (Fig. 12 参照) を発表した。この図で、横軸は内空変位、縦軸の上半は支保荷重、下半は掘削後の経過時間、である。また、岩盤特性曲線 (characteristic curve of rock mass) は、内空変位を安定させるのに必要な壁面支持力 (支保反力) と内空変位との関係を表し、初期地圧と岩盤の力学特性とで決まる。他方、曲線 I および II は、支保特性曲線 (characteristic curve of support) で、

Fig.12 The Fenner-Pacher diagram.

支保の荷重と変形との関係を表す。なお、支保特性曲線 I は、比較的早い時期に剛性の小さい支保を施工した場合、曲線 II は、少し遅れて比較的剛性が高い支保を施工した場合を表し、これから 2 種類の支保がそれぞれどのような状況で平衡状態に達し、周辺岩盤が安定した状態になるかを示す。下半の曲線は、内空変位の時間的変化を表す曲線で、ある意味ではクリープ曲線とも言えるが、NATM では、掘削後なるべく早く支保を施工することが強調されるので、後述の「切羽支持力」の影響を含んでいると考えるべきであろう。

Rabczewicz が NATM を提案したときは、定量的な指針はほとんどなかったが、その後、Fig. 11 に示したトンネル周辺の岩盤の破壊過程を前提として、定量的な支保の設計法が開発された^{55, 56)}。すなわち、この方法では、まず、周壁岩盤のせん断滑り面の形状寸法を岩盤の破壊基準に基づいて仮定する。次に、これを用いて吹き付けコンクリートやロックボルトなどの支持力を計算して、その値が、岩盤特性曲線の最小壁面（周壁）支持力よりも大きくなるように、吹き付け厚さやボルト密度を決定する。

このように、NATM は、2. で述べた Terzaghi の土圧論を除くと、直接には支保設計に役立たなかった従来の地圧論と違って、むしろ合理的、実用的な支保設計法に重点があった。もちろん、NATM 工法の背景には、既に述べたように、周辺岩盤を構造部材の一部とみなすこと、支保荷重は岩盤の変形特性と支保剛性および施工時期との相互作用で決まることなど、地圧現象の時間依存性と支保の力学特性とに関する深い理解と洞察が存在している。そのため、NATM 理論という呼び方もしばしば使われている。

さらに、NATM では、ロックボルトや吹き付けコンクリートなどの支保効果が早く発現する形式の支保を掘削後なるべく早く施工すること、および掘削以前には十分に解っていない岩盤特性を推定して実施した支保の設計・施工の結果を、掘削後に計画的な原位置計測を行って、検証・修正することなどが大きな特徴である。そのため、地圧現象に起因する困難を克服できる新工法として、世界中各国で採用されるようになった。我が国でも、1973

Fig.13 Two mechanical models of the linear visco-elastic body.

(a) Zener model.

(b) Burgers model.

年に上越新幹線の中山トンネルの工事に採用されて成功した後、急速に普及した。また、NATM 工法の普及とともに、支保の設計・施工の妥当性を判定するために、トンネルの内空変位、周辺岩盤の半径方向歪、ロックボルト張力などを計測、解析する技術も急速に発達した。

5・2 粘弾性論に基づく地圧論

3・3 で述べたように、坑道の内空変位が時間の経過とともに増加することは、19 世紀末から、経験的に知られていた⁸⁾。しかし、このような坑道周辺の岩盤の変形の時間依存性については、前章で述べた弾塑性論的な考察では、説明できない。5・1 で述べた NATM 理論では、このような岩盤の変形や破壊の時間依存性を考慮しているが、理論解析をしているわけではない。

他方、第 2 次世界大戦が終わって、ナイロンやポリエチレンなどの高分子化学製品が次々に開発されるに伴って、その力学的性質を表現するために、粘弾性論 (rheology) が発達してきた。粘弾性論として最も簡単なのは、言うまでもなく、線形粘弾性論である。線形粘弾性体 (linear visco-elastic body) の力学模型は、Fig. 13 にその例を示すように、弾性を表す要素模型スプリングと、粘性を表す要素模型ダッシュポットの組み合わせで表される。したがって、2, 3 個の要素模型の組み合わせで表される力学模型が、最も簡単なものになる。また、線形粘弾性体であれば、その線形性によって、Hooke 弾性体との間に、「対応原理 (correspondence principle)」が成立するので、これを用いてその構成方程式を弾性問題に変換することができる⁵⁷⁾。その場合は、100 年以上にわたって蓄積されてきた弾性問題の理論解を、線形粘弾性体に関する問題の解を得るために、容易に利用できる。このような理由もあって、坑道の内空変位の時間依存性などを説明するために、岩盤を線形粘弾性体と仮定して、坑道やトンネル周辺の応力や歪の時間的変化を理論的に求めることが試みられるようになった。たとえば、小田⁵⁸⁾ は、岩盤全体が Voigt (Kelvin) 体であると仮定して、静水圧下の円形断面坑道の内空変位や周辺岩盤の応力状態の時間的変化を計算した。1960 年代後半にはいると、Dimov⁵⁹⁾ は、静水圧下の円形断面坑道について、岩盤が線形粘弾性体である場合の周辺岩盤の応力、歪の時間的変化を計算する一般式を与えた。また、小島⁶⁰⁾ は、上述の対応原理を用いて、岩盤が Maxwell 体や Burgers 体 (Fig. 13 参照) である場合などについて、円形断面坑道周辺の応力状態の時間的変化を表す式を与えた。

また、林ら⁶¹⁾ は、岩盤が Zener 体 (Fig. 13 参照) であると仮定して、コンクリート覆工を有する円形断面トンネルの周辺岩盤や覆工内の応力状態の経時変化を後述の有限要素法を用いて計算した。

しかし、坑道からかなり離れた岩盤、特に地表付近も含めた岩盤全体を粘弾性体と仮定することには、経験的に考えても多少無

Fig.14 The difference of the yield zone around the drift without and with concrete lining (by Zienkiewicz⁶⁷⁾).

理がある。そこで、1970年代になると、坑道から遠く離れた岩盤はHooke弾性体で、坑道の掘削によって周辺の岩盤が弾性限界を超えたために形成された「ゆるみ領域」は、従来のように完全塑性体ではなく、線形粘弾性体であると仮定して、坑道周辺の地圧現象の時間依存性を説明することが試みられた^{62, 63)}。このような試みの結果、従来理論的にはほとんど説明できなかった内空変位の時間的な変化や支保荷重の経時的増加などを説明することができるようになった。しかし、岩盤、特に坑道周辺のゆるみ領域の岩盤の力学的性質には、現在も未知な部分が多く、上述の簡単な力学模型で表される線形粘弾性体が、どこまで岩盤の挙動を忠実に表しているのかについては、なお解明すべき問題が少なくない。

6. 数値解析法と3次元の考察

6・1 有限要素法の地圧論への応用

有限要素法(FEM)は、1950年代半ばに、M. J. Turnerらによって、航空機体の構造解析を目的として、開発された。周知のとおり、有限要素法では計算量は膨大になるが、従来の弾性解析法と比較すると、境界条件、特にその形状や、連続体の不均質性に関する制約がきわめて少ない。

有限要素法はこのような長所を持っているので、1960年代にはいると、応用力学の各分野で急速に普及し、その適用範囲も弾塑性問題など非線形問題や異方性問題にも広がった。地圧問題に関連する分野では、特に坑道断面形状が円形であることは、むしろ例外である。また、岩盤が一樣に等方等質であることもほとんどなく、異なった性質の地層が重なったり、異方性を無視できない場合が多い。したがって、従来の力学解析を適用することが困難な問題が多かったため、有限要素法の応用が急速に普及した。たとえば、1966年の第1回岩の力学国際会議(1st Congress of I.S.R.M.)で、Zienkiewiczら⁶⁴⁾は、直交異方性の地層内の円形断面坑道の周辺の応力場の状態を計算した結果を示した。なお、この論文で、彼は現在は計算機の記憶容量が小さいので、平面問題しか計算できなかったが、理論的には3次元問題を解くことも可能であると述べている。また、同じ国際会議で、Reyesら⁶⁵⁾は、垂直方向の初期応力 σ_v と水平方向の初期応力 σ_h とが異なる場合について、円形断面坑道周辺の降伏領域の差異を有限要素法を用いて計算した。このような地圧問題に対する応用例は、一般的な有限要素法の教科書⁶⁶⁾にもいくつか例示されている。また、1968年には、Fig. 14に示すように、いわゆる馬蹄形断面の坑道について、支保の影響も考慮した弾塑性解析の結果が発表され

た⁶⁷⁾。この計算は、平面歪問題として行われているので、当然のことながら、支保の施工時期や後述の「切羽支持力」の影響などは、考慮されていない。そのため、支保の効果が多少過大に評価されている。

わが国でも、林ら⁴⁵⁾が、地下発電所用の地下空洞を掘削する場合について、平面歪問題を仮定して有限要素解析をおこなった。その場合、大空洞が複数段に分割されて掘削されることを考慮して、掘削段階ごとに空洞周辺の岩盤内に、4・4で述べたゆるみ係数 R を用いて計算したゆるみ領域が発生するとした。また、その他に、発破による「直接損傷領域」が発生すると考えた。さらに掘削によって、それまで空洞周壁を支持していた岩盤応力が失われるためにクリープ変位が発生することも考慮して解析を行った。

また、Young率、Poisson比、さらには、強度(破壊規準)などが、要素ごとに異なっても計算時間に大きな違いがないのが、有限要素法の長所の一つであるから、この長所を利用して、岩盤の不均質性が、地圧現象に及ぼす影響を明らかにすることも試みられている⁶⁸⁾。

6・2 3次元解析と切羽支持力の影響

前節で述べた坑道周辺の岩盤の応力状態や内空変位などに関し、1960年代におこなわれた有限要素法による解析は、5・2までに述べた理論解析と同様に、平面ひずみ状態を仮定した2次元解析が主流であった。しかし、Zienkiewicz⁶⁴⁾が指摘しているように、有限要素法は、3次元問題についても応用することができる。地圧論における3次元問題として、まず問題になるのは、坑道掘削中の掘進切羽付近の地圧現象であろう。ただし、この問題は、静水圧状態の地山内に円形断面の坑道を掘削する場合については、軸対称問題であるから、数理的には、2次元問題と同じである。

Daemenn & Fairhurst⁶⁹⁾は、このような軸対称問題として計算できる場合について、掘進切羽周辺のゆるみ領域の大きさ、および掘進切羽からの距離と内空変位との関係を、岩盤が弾塑性体の場合と、Fig. 10に示したようなピーク応力を過ぎると荷重支持力が低下して行く場合との両者について、計算している。また、Deoscoeudres⁷⁰⁾は、いわゆる馬蹄形断面の坑道の切羽付近の応力状態と内空変位とを、初期地圧の垂直方向成分と水平方向成分の値が異なる場合について、文字通りの3次元解析をおこなった結果を発表している。

Hocking⁷¹⁾は、円形断面坑道の掘進切羽付近の応力状態を、境界要素法(Boundary Integral Equation Method, Boundary Element Method)⁷²⁾を用いて計算する方法について考察した。Ward⁷³⁾は、彼の計算法を利用して、垂直方向の初期応力が p_0 、水平方向の初期応力が $K_0 \cdot p_0$ の弾性岩盤内に掘削された円形断面坑道の掘進切羽付近の内空変位と切羽からの距離との関係を求め、いずれの場合も切羽からの距離 x が坑道半径 a の2.25倍以上では、掘進切羽の影響がほとんど無くなることを示した。また、彼は $K_0=1$ のとき、すなわち静水圧状態の場合について、弾性体と仮定した支保を施工する時期(厳密に言えば、掘進切羽からの距離)が、その後の支保荷重や内空変位に及ぼす影響を計算する式を次のように与えた(Fig. 15参照)。

平面歪問題と仮定したときの、すなわち掘進切羽から十分離れていて、掘進切羽の影響がない位置での、半径 a の坑道周壁の半径方向への変位(内空変位の1/2) u_0 は、

$$u_0 = \frac{a}{2G_r} p_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ここで、 G_r は、岩盤の剛性率である。次に、切

Fig.15 The effect of the fictitious radial support pressure in the vicinity of the driving face of drift (by Ward⁷³⁾).

羽からの距離 x である任意の位置 X で、掘進切羽が近いために未だ発現していない半径方向変位（内空変位の $1/2$ ） u_t と、式 (12) で与えられる掘進切羽の影響がなくなって、初期応力 p_0 による弾性変形が完全に発現したときの坑道半径方向変位 u_0 との比 F を

$$F = \frac{u_t}{\frac{a}{2G_r} p_0} \quad (13)$$

で定義して、 $F \cdot p_0$ を切羽支持力 (fictitious radial support) と名付けた。これは、もし、この位置で支保を施工しなければ、その後切羽が前進して十分に遠くなったとき、この坑道断面で計測可能な半径方向変位が、最終的には

$$u_t = F \frac{a}{2G_r} p_0 = F u_0 \quad (14)$$

で与えられることを意味する。もちろん、この位置 X では、既に岩盤の弾性に基づく半径方向変位

$$u_f = (1-F) \frac{a}{2G_r} p_0 = (1-F) u_0 \quad (15)$$

が発生している。なお、式 (15) で与えられる半径方向変位 u_f は、掘進切羽が、時間とともに前進する（位置 X から遠ざかる）ので、時間依存性の変位であると誤解されがちであるが、岩盤は弾性体であると仮定されているので、本質的には、「切羽支持力」の減少による弾性変位であることを忘れてはならない。

支保の総合剛性を K_s とすれば、支保抵抗 p_s のときの支保の半径方向変位 u_s は、

$$u_s = \frac{a}{K_s} p_s \quad (16)$$

で与えられる。他方、この支保抵抗 p_s による坑道周壁の半径方向変位の減少分は、

$$u_r = \frac{a}{2G_r} p_s \quad (17)$$

である。したがって、位置 X で支保を施工した場合には、式 (14)、(16) および (17) で与えられた各半径方向変位の間に、切羽から十分離れた位置で、

$$u_t - u_r = u_s \quad (18)$$

が成立しなければならない。式 (18) に上記の 3 式を代入すると、

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{K_s F}{K_s + 2G_r} \quad (19)$$

が得られる。^{*4}

既に述べたように、このような計算は岩盤が弾性体であることを仮定している。しかし、5. で述べたように、岩盤の変形には時間依存性がある。他方、切羽支持力が問題になるのは、坑道の掘削中なので、削岩・発破掘削では断続的に、機械掘削ではほぼ連続的に、掘進切羽は時間の経過とともに前進する。したがって、固定された任意の断面について考えれば、掘進切羽付近では、切羽支持力は時間とともに減少し、その分だけ、弾性的な内空変位が増加する。もちろん、岩盤が粘弾性体であることに起因するクリープ変形も、時間とともに増加する。桜井⁷⁴⁾ は、この点に注目して上記のような切羽支持力の概念を利用して、岩盤が Zener 体 (Fig. 13 参照) である場合について、切羽支持力の減少と岩盤のクリープ変形の両者を考慮した解析を行った。

7. 結 び

本稿では、もっぱら周囲に他の地下空洞が存在しない岩盤内に掘削された坑道やトンネルに関する地圧現象と、その原因や発生過程に関する学説や理論について考察した。このような学説や理論は、地圧論と呼ばれてきた。少なくとも鉱山、特に炭鉱では、19 世紀半ばから、採掘の影響による地表沈下や採掘跡の縁辺部にある坑道に及ぼす採掘の影響などの原因を解明し、対策を構ずるために、技術者や研究者の間で議論が行われてきた。また、20 世紀初頭には、山はね現象が無視できなくなってきたので、この問題を解明することも、地圧論の課題の一つになった。

トンネル技術についても、近年は、既存のトンネルに近接して、新しいトンネルが掘削されるなど、複数のトンネルの間の相互作用が問題になっているが、これらも当然、地圧論の課題である。しかし、本稿ではこのような複雑な問題には、敢えて立ち入らなかった。

地圧論の主要な目的の一つは、支保の設計施工法の確立である。

^{*4}：原著には、記号 F の使い方に多少の混乱が見られるので、本稿では、その部分を訂正整理した。

また、地圧現象は、既に 5. や 6. で述べたように、単なる岩盤の力学的現象ではなく、支保と岩盤の相互作用である。しかし、本稿では、支保の形式やその力学特性、施工などについては、詳しく述べることができなかった。

他方、地圧現象の解明のためには、坑道周辺の岩盤の力学的性質や応力状態、さらには、地下水压、含水率、温度などについても、原位置計測や室内実験によって十分に把握することが不可欠である。この方面については、周知の通り、1950 年頃から始まった岩石力学の発展や、1970 年頃からの NATM 工法の普及に伴う原位置計測技術の急速な発達などによって、多くの知見が得られている。しかし、本稿では、紙数の関係もあるので、この方面についても、必要最小限に触れるにとどめた。

謝辞 本稿は、東京大学大学院地球システム工学専攻の大久保誠介教授、福井勝則准教授、および羽柴公博助教に粗稿の段階で、読んでいただき、論考の不十分な箇所、表現のわかりにくい箇所など、多くの貴重なご教示をいただいた。また、参考文献の入手、付図の清書などで、大久保研究室の教職員各位にいろいろとお世話になった。ここに記して、改めて深く感謝の意を表する。

References

- 1) P. Hacket: Mine and Quarry Engg., **28**(1962), 215-219.
- 2) J. R. Dinsdale: Coll. Engg., **12**(1935), 406-409.
- 3) H. Kastner: *Statik des Tunnel- und Stollenbaues*, (Springer, Berlin, 1962), pp. 140-143.
- 4) A. Yokoyama, M. Shimokouchi and T. Suga: *Tonneru-Monogatari*, (Sankai-do, Tokyo, 2001), pp. 22-32.
- 5) O. Kommerell: *Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk*, (Wilhelm Ernst & Sons, Berlin, 1912), pp. 42-81.
- 6) R. Kafka: Glückauf, **57**(1921), 49-51.
- 7) K. Terzaghi: *Theoretical Soil Mechanics*, (John Wiley & sons, New York, 1943), pp. 69-76.
- 8) H. Schmid: *Statische Probleme des Tunnel- und Druckstollenbaues*, (Springer, Berlin, 1926), pp. 10-15.
- 9) F. Spruth: *Streckenbau in Stahl*, (Verlag Glückauf, Essen, 1955), pp. 3-9.
- 10) A. Eckardt: Glückauf, **49**(1913), 353-361.
- 11) W. Haak: Glückauf, **64**(1928), 711-719.
- 12) G. Spackeler: Glückauf, **65**(1929), 461-469.
- 13) P. Kühn: Glückauf, **67**(1931), 1477-1484.
- 14) C. H. Fritsche: *Lehrbuch der Bergbaukunde*, 2ter Band (Springer, Berlin, 1955), p. 6.
- 15) M. T. W. Adam and I. C. F. Statham: Trans. Instn. Min. Engrs., **117**(1957), 606-618.
- 16) J. Brass: Trans. Instn. Min. Engrs., **79**(1929/30), 324-369.
- 17) D. H. C. Briggs: Trans. Instn. Min. Engrs., **90**(1934/35), 328-347.
- 18) O. Fleischer: Glückauf, **70**(1934), 661-667, 685-693 and 716-721.
- 19) H. M. Westergaard: *Theory of Elasticity and Plasticity*, (John Wiley & Sons, New York, 1952), pp. 39-41.
- 20) H. Schmid: *Statische Problem des Tunnel- und Druckstollenbaues*, (Springer, Berlin, 1926), pp. 60-93.
- 21) N. Yamaguti: Civil Engg., JSCE., **15**(1929), 291-304.
- 22) T. Sugihara: Journal of MMIJ, **49**(1933), 147-164.
- 23) T. Sugihara: Journal of MMIJ, **49**(1933), 711-720.
- 24) P. Kühn: Glückauf, **68**(1932), 185-190.
- 25) O. Müller: Glückauf, **66**(1930), 1601-1612 and 1646-1652.
- 26) R. Fenner: Glückauf, **74**(1938), 681-695 and 705-715.
- 27) Y. Hiramatsu and Y. Oka: Journal of MMIJ, **73**(1957), 215-220.
- 28) Y. Hiramatsu and Y. Oka: Journal of MMIJ, **78**(1962), 505-510.
- 29) G. Spackeler: Glückauf, **74**(1938), 829-836.
- 30) C. H. Fritsche: Glückauf, **65**(1929), 146-147.
- 31) E. Gremmler: Glückauf, **69**(1933), 417-425 and 444-449.
- 32) F. Mohr: Mine and Quarry Engg., **22**(1956), 178-189.
- 33) K. Suzuki: Journal of MMIJ, **69**(1953), 5-10.
- 34) Y. Hiramatsu and Y. Oka: Journal of MMIJ, **71**(1955), 11-14.
- 35) O. Jacobi and E. Brändle: Glückauf, **92**(1956), 397-411.
- 36) L. A. Panek and J. A. Stock: USBM RI 6537, (1964).
- 37) M. Rocha: Proc. 1st Congress of ISRM, (Lisbon, 1966), Vol.2, pp. 57-65.
- 38) O. J. Olsen: Quarterly of Colorado Sch. Min., **52**(1957), No.3, 185-204.
- 39) Y. Hiramatsu and Y. Oka: Journal of MMIJ, **79**(1963), 1016-1022.
- 40) E. R. Leeman: Engg. and Min. J., **165**(1964), No.9, 104-107.
- 41) E. R. Leeman and D. J. Hayes: Proc. 1st Congress of ISRM, (Lisbon, 1966), Vol.2, pp. 17-24.
- 42) L. Obert: Min. Engg., **14**(1962), No.8, 51-58.
- 43) K. Mogi: Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. Tokyo, **44**(1966), pp. 215-232.
- 44) J. D. Byerlee: J. Geophys. Res., **73**(1968), 4741-4750.
- 45) M. Hayashi and S. Hibino: Proc. 2nd National Symp. Rock Mech., (Tokyo, 1967), pp. 69-74.
- 46) M. Arcypowski and H. Lautsch: Glückauf, **103**(1967), 839-844.
- 47) D. U. Deere, A. J. Hendron, Jr., F. D. Patton and E. J. Cording: *Failure and Breakage of Rock*, (ed. by C. Fairhurst), (AIME, 1967), pp. 237-302.
- 48) J. A. Hudson, E. J. W. Jones and B. M. New: Quarterly J. Eng. Geol., **13**(1980), 33-43.
- 49) K. Ikeda: Oyo Chishitsu, **7**(1966), 25-30.
- 50) W. R. Wawersik and C. Fairhurst: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **7**(1970), 561-575.
- 51) L. v. Rabcewicz: Gologie und Bauwesen, **27**(1962), 153-167.
- 52) L. v. Rabcewicz: Felsmech. und Ing.-geol., **1**(1963), 224-244.
- 53) L. v. Rabcewicz: Water Power, **16**(1964), 453-457, 511-515 and **17**(1965), 19-24.
- 54) F. Pacher: Felsmech. und Ing.-geol., Suppl.1 (1964), 149-161.
- 55) L. v. Rabcewicz and J. Golser: Water Power, **25**(1973), 88-93.
- 56) Y. Oka: Tonnneru to Chika, **7**(1976), No.4, pp.1-8 and No.5, pp. 9-14.
- 57) Y. Nishimatsu: *Ganban-Rikigaku*, (Univ. Tokyo Press, 1999), pp. 58-60.
- 58) E. Oda: J. Japan Soc. Civil Engrs., No.68 (1960), pp. 41-49.
- 59) I. Dimov: Proc. 1st Congress of ISRM, (Lisbon, 1966), Vol.2, pp. 273-278.
- 60) K. Kojima: Journal of MMIJ, **85**(1969), 483-490.
- 61) M. Hayashi, Y. Kitahara and S. Hibino: Proc. 5th Symp. Rock Mech., JSCE, (Tokyo, 1969), pp. 82-89.
- 62) S. Sakurai: Proc. Japan Soc. Civil Engrs., No.181 (1970), 77-89.
- 63) Y. Oka and Y. Hiramatsu: Proc. 3rd Congress of ISRM, (Denver, 1974), Vol.2B, pp. 1037-1042.
- 64) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung: Proc. 1st Congress ISRM, (Lisbon, 1966), pp. 661-666.
- 65) S. F. Reyes and D. U. Deere: Proc. 1st Congress of ISRM, (Lisbon, 1966), pp. 477-483.
- 66) O. C. Zienkiewicz: *The Finite Element Method in Engineering Science*, (McGraw-Hill, London, 1967), pp. 390-409.
- 67) O. C. Zienkiewicz: *Rock Mechanics in Engineering Practice*, (ed. by K. G. Stagg and O. C. Zienkiewicz) (John Wiley & Sons, London, 1968), pp. 237-273.
- 68) Y. L. Su, Y. J. Wang and R. Stefanko: *Rock Mechanics - Theory and Practice*, (AIME, 1970), pp. 253-266.
- 69) J. I. K. Daemen and C. Fairhurst: Proc. Int. Symp. Underground Openings, (Luzern, 1972), pp. 356-369.
- 70) F. Doscoedres: Proc. 3rd Congress of ISRM, (Denver, 1974), Vol.2B, pp. 1130-1135.
- 71) G. Hocking: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **13**(1976), 331-337.
- 72) Y. Nishimatsu: *Ganban-Rikigaku*, (Univ. Tokyo Press, 1999), pp. 117-136.
- 73) W. H. Ward: Geotechnique, **28**(1978), 133-171.
- 74) S. Sakurai: Int. J. Numerical and Analytical Methods, **2**(1978), 159-175.