4-D network relaxation 法を用いた 露天掘鉱山生産計画のアルゴリズム開発 *

玉 西 雄 三¹ 村 上 進 亮² 山 富 二 郎³

Algorithm Development of Production Scheduling for Open Pit Operations Using 4-D Network Relaxation

by Yuzo TAMANISHI^a, Shinsuke MURAKAMI^{a*}, Jiro YAMATOMI^a

a. School of Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan
(* Corresponding author: E-mail smurakam@sys.t.u-tokyo.ac.jp)

Open pit mine production scheduling can be formulated as an integer programming problem, which is well-known for demanding enormous storage capacity and a lot of calculation time. In order to avoid these problems, in this paper, 4-D network relaxation method is applied. The 4-D network relaxation method relaxes a few constraints with Lagrange multiplier method and allows us to apply the Lerchs-Grossman (LG) method, which gives the optimal solutions for the ultimate pit design of open pit mine, and find good suboptimal solution. However, previous studies reported the problem of huge calculation time. Therefore, we propose the algorithm to reduce calculation time. With the reduced calculation time, we examine the effect of price changes as a case study. In this study, we calculate the production schedules with three price scenarios; upward trend, constant and downward trend. A lot of price changes, which do not necessarily correspond to three scenarios, are applied onto the obtained schedules and calculate and examine the realized NPVs. The variance of realized NPVs in upper scenario is bigger than those of other two scenarios, but the probability of the realizing highest NPV is also highest. Therefore, it is better to schedule with upward trend, if mining companies can accept the risk. Furthermore, the reduced calculation time allows us to include capacity constraints not only for mill but also mining, this also means that the results become more realistic one.

KEY WORDS: Open Pit Mine, Production Scheduling, Integer Problem, Lagrangian Relaxation

1. 諸 言

鉱山開発は、探査、フィージビリティスタディ（以下 F/S）、開発などを経て鉱石の生産段階に至る。鉱山開発は大規模なプロジェクトであり、初期投資額が莫大であるという特性を考えると、F/S、なかでも経済性の評価が重要である¹⁾。

その重要な一部をなすものに、長期の生産計画がある。これは、毎期の採掘量を想定し、毎期の利益とコストを見積もり、全期間を通じた Net Present Value（以下 NPV）を算定し、その大小により経済性評価の指標とする。そこで用いる採掘計画は、条件下で最大の利益を生むようなものであるべきであり、これを知るためにオペレーションズ・リサーチなどで用いられる最適化手法を適用してきた²⁾。

露天掘鉱山における生産計画については、線形計画法、動的計画法、遺伝的アルゴリズムなど様々なアプローチにより研究がなされてきた³⁾。中でも 4-D network relaxation 法は、精度のよい実

用的な解を得られることがわかっている。より具体的には、ラグランジュ緩和を用いることにより問題を簡単にし、精度の良い準最適解を出すことができる⁴⁾。

本研究では、4-D network relaxation 法の高速度を実現することによって、よりよい生産計画の解を高速に得ることができるアルゴリズムの開発を行った。また、先行研究における 4-D network relaxation 法の適用例では、計算速度の問題などもあり、鉱石の選鉱場の生産容量のみ考慮に入れていたが、本稿で示す高速化の結果、複数の制約条件の考慮が可能になったために、生産容量（選鉱処理する鉱石の量）の他に鉱石とズリを合わせた採掘量の制約を含めることとし、その影響と効果についても考察する。

鉱山の F/S においては、価格の変化や割引率など様々な仮定を置く必要があり、これは生産計画の立案に対しても影響を与える。そこで、様々なシナリオ下でのケーススタディーを実施、その結果の変化等を検討する。

2. 露天掘鉱山における最適化問題と先行研究

露天掘鉱山における最適化問題としては、最終ピット設計と生産計画という 2 つの問題がある。最終ピット設計とは、時間的な概念は考慮せず、すべてのブロック価値を固定して、最大限の利益を得られるようなピット形状（これを最終ピットと称する）と利益を求めることである。一般的に、この最終ピット設計につい

*2011 年 2 月 28 日受付 2011 年 7 月 8 日受理

1. 学生会員 東京大学工学系研究科システム創成学専攻 修士課程

2. 正会員 准教授 博士（工学）東京大学工学系研究科システム創成学専攻

3. 正会員 教授 工学博士 東京大学工学系研究科システム創成学専攻

[著者連絡先] FAX: 03-5841-7044

E-mail: smurakam@sys.t.u-tokyo.ac.jp

キーワード：露天掘鉱山、生産計画、整数計画問題、ラグランジュ緩和

ては、Lerchs-Grossman 法 (LG 法)⁵⁾ が最適解を導く手法としてよく知られている。LG 法は、Lerchs と Grossman によるグラフ理論を用いたアルゴリズムであるが、Zhao と Kim によって改良されたものを指すことも多い⁶⁾。その一方で、最適解は保証されないが、実用的には十分に良好な解を簡単に求めることができるヒューリスティックな手法も好まれている⁷⁾。そして、その代表的な手法としては Moving Cone/Floating Cone 法が知られている⁸⁾。

しかしながら、鉱山の操業は長期間にわたり、金銭 (資金) の持つ価値が変化するので、割引率を導入した現在価値による評価が必要となる。また、操業期間中に資源価格も変化するので、価格がどのような影響を及ぼすかも興味のあるところである。

そこで、最終ピット設計では欠落している時間的な概念の導入が不可欠であるために、時間的な概念とこれに伴う処理方法の選択を取り入れた生産計画の研究が行われるようになった。しかし、生産計画は非常に大規模な混合整数計画問題となり、最適解を与えることが非常に困難な問題となっている¹⁰⁾。

本研究で用いる 4-D network relaxation 法は、採掘する際に必要となる制約条件には手を加えず、処理方法にのみ関わる制約条件をラグランジュ緩和で取り除く。よって、4-D network relaxation 法は、完全な最適解を保証しないという意味ではヒューリスティックな手法ではあるが、緩和問題に対して LG 法が適用することからその解の精度は非常に高いというプラス面がある。しかし、計算時間が非常に長くなるというマイナス面を持っていた。そこで、アルゴリズムを見直し計算速度を大幅に向上させ、一般的なヒューリスティック解よりもより良い解をより短時間で得ることができたので報告する。

3. 4-D network relaxation 法による解法

この手法では、対象となる鉱床とその周囲にある大きさのブロックに細分化したモデルとして表現する。その上で、個々のブロックをいつ採掘し、どの処理方法で処理するのかを決定変数として最適化問題を解く。

3・1 記号

- n : ブロック番号 ($n=1, \dots, n_{max}$)
- n_{max} : 総ブロック数
- m : ブロックの処理方法インデックス
- m_{max} : 処理方法の数
- c_{mn}^t : t 期において採掘され処理方法 m で処理されたブロック n の経済価値
- x_{mn}^t : ブロックが t 期に処理方法 m で処理される場合 $x_{mn}^t=1$, そうでない場合 $x_{mn}^t=0$
- v_m^t : t 期における処理方法 m の最大処理容量
- Γ_n : ブロック n を採掘するまでに取り除かれていなければならないブロックの集合
- u_n : Γ_n に含まれるブロックの数
- N_p : 処理方法 p で処理されるブロックの集合

3・2 整数計画法による定式化

まず、4-D network relaxation 法について説明を行う。まず、「生産計画問題」を以下の整数計画問題に定式化する。式 (1) の Z は目的関数で、 c_{mn}^t がブロックの経済価値を現在価値に割引いたものであるならば、 Z は NPV に等しい。

$$\max Z = \sum_t \sum_m \sum_n c_{mn}^t x_{mn}^t \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{s=1}^t \sum_m \sum_{j \in \Gamma_n} x_{mj}^s - u_n \sum_{s=1}^t \sum_m x_{mn}^s \geq 0 \text{ for } \forall n \forall t \quad (2)$$

$$\sum_t \sum_m x_{mn}^t \leq 1 \text{ for } \forall n \quad (3)$$

$$\sum_n x_{pn}^t \leq v_p^t \text{ for } \forall t \quad (4)$$

$$x_{mn}^t = \{0, 1\} \text{ for } \forall m \forall n \forall t$$

式 (2) は「斜面制約」と呼ばれ、あるブロックを掘るためにその上のブロックを採掘されなければならないという制約を表している。露天掘鉱山の場合は岩盤の強度と地質条件により許容される斜面の角度が変わるが、その角度内に含まれる上の段のブロックは全て採掘されなければならない。式 (3) は「採掘回数制約」と呼ばれ、あるブロックを採掘できる時期とその処理方法の一つしか選べないことを表している。最後に、式 (4) は「生産容量制約」と呼ばれ、一期ごとにある処理方法 p で処理できる量の制約を表している。一般的に式 (4) の処理方法 p は選鉱による鉱石処理を表し、制約は選鉱場のキャパシティーによって与えられる。また、参考文献 9) ではこの制約のことを採掘量制約としていたが、本研究では後に、一期ごとに採掘できる限界量である鉱石とズリをあわせた総採掘量制約を入れる。そのため、区別する意味で式 (4) を生産容量制約とした。

3・3 4-D network relaxation の適用

3・2 節の三つの制約から、採掘する上で制約となるのは式 (2) と式 (3) のみであり、真の意味での採掘制約である (2) と (3) に手を加えることができないが、(4) は実行可能解を得るために制約条件を緩和することができる。そこで、式 (4) を緩和し、ラグランジュ乗数 λ_p^t を用いて式 (1) の中に組み込む。緩和問題の式は次の式 (5) - (7) になる。ただし、 Z_{RP} は緩和問題の目的関数である。

$$\max Z_{RP} = \sum_t \sum_m \sum_n c_{mn}^t x_{mn}^t + \sum_t \sum_p (\lambda_p^t (v_p^t - \sum_{n \in N_p} x_{pn}^t)) \quad (5)$$

$$\text{s.t. } \sum_{s=1}^t \sum_m \sum_{j \in \Gamma_n} x_{mj}^s - u_n \sum_{s=1}^t \sum_m x_{mn}^s \geq 0 \text{ for } \forall n \forall t \quad (6)$$

$$\sum_t \sum_m x_{mn}^t \leq 1 \text{ for } \forall n \quad (7)$$

$$x_{mn}^t = \{0, 1\} \text{ for } \forall m \forall n \forall t$$

さらに目的関数の第二項を書き換えると、式 (8) になる。

$$\max Z_{RP} = \sum_t \sum_m \sum_n c_{mn}^t x_{mn}^t + \sum_t \sum_p (c_{pn}^t - \lambda_p^t) x_{pn}^t + \sum_t \lambda_p^t v_p^t \quad (8)$$

式 (8) の最後の項は定数であり、目的関数の最大化という観点からは無視できる。したがって、式 (8) は式 (9) のように書き換えることができる。

$$\max Z_{RP} = \sum_t \sum_m \sum_n \hat{c}_{mn}^t x_{mn}^t \quad (9)$$

ただし、 $\hat{c}_{mn}^t$ は次の (10) の条件で与えられる。

$$\hat{c}_{mn}^t = \begin{cases} c_{mn}^t & \dots m \neq p \\ c_{mn}^t - \lambda_p^t & \dots m = p \end{cases} \quad (10)$$

さらに, x_{mn}^t を

$$\bar{x}_{mn}^t = \sum_{s=1}^{t-1} \sum_l^{m_{\max}} x_{ln}^s + \sum_{l=1}^m x_{ln}^t \dots\dots\dots (11)$$

と変換し, 緩和問題に適用することで式 (12) - (15) に書き換えることができる。

$$\max Z_{RP} = \sum_t \sum_m \sum_n \bar{c}_{mn}^t \bar{x}_{mn}^t \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in I_n} \bar{x}_{m_{\max}j}^t - u_n \bar{x}_{m_{\max}n}^t \geq 0 \text{ for } \forall n \forall t \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{x}_{mn}^t - \bar{x}_{m+1,n}^t \leq 0 \text{ for } \forall n \forall t \text{ and } \forall m < m_{\max} \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{x}_{m_{\max}n}^t - \bar{x}_{ln}^{t+1} \leq 0 \text{ for } \forall n \text{ and } \forall t < t_{\max} \dots\dots\dots (15)$$

ただし, $\bar{c}_{mn}^t$ は

$$\bar{c}_{mn}^t = \begin{cases} \hat{c}_{mn}^t - \hat{c}_{m+1,n}^t \dots m < m_{\max} \\ \hat{c}_{mn}^t - \hat{c}_{m+1,n}^t \dots m = m_{\max} \cap t < t_{\max} \\ \hat{c}_{m_{\max}n}^t \dots m = m_{\max} \cap t = t_{\max} \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

である。

式 (12) - (15) を用いることによって, 生産計画問題を露天掘採掘の最終ピット設計に対する最適化手法を用いて解くことができるようになり, 元の問題を整数計画法を使って解くよりも実用的に解くことが可能となる。

3・4 劣勾配法の適用

さらにラグランジュ乗数を合理的に求めるために劣勾配法を用いる。劣勾配法は, 最適解が改善する方向にラグランジュ乗数を更新し, 更新を繰り返しながら解を収束させる手法である。 k 回目のラグランジュ乗数を $\lambda_p^{(k)}$ とすると, 式 (17) のように $k+1$ 回目のラグランジュ乗数 $\lambda_p^{(k+1)}$ を求める。

$$\lambda_p^{(k+1)} = \text{Max} \left\{ 0, \lambda_p^{(k)} - \zeta^k \left(v_p^t - \sum_{n \in N_p} x_{pn}^{(k)} \right) \right\} \text{ for } \forall t \dots\dots\dots (17)$$

ここで, ステップ幅 ζ_k は式 (18) より算出するのである。

$$\zeta_k = \frac{Z_{RP}^{(k)} - Z_P^*}{\sum_t (v_p^t - \sum_{n \in N_p} x_{pn}^{(k)})^2} \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) と式 (17) を使って, ステップ幅とラグランジュ乗数を更新して計算を繰り返す。

またラグランジュ乗数を更新し, 計算を繰り返す行なので, 収束判定をする必要がある。そのときに, Gap と称するものを用いる。Gap とは, 緩和問題の目的関数の最適値 Z_{RP}^* (上界値) と主問題の最適値 Z_P^* (下界値) の差を表したものであり, 本研究では式 (19) を用いて表現される。

$$\text{Gap} = \frac{Z_{RP}^* - Z_P^*}{Z_{RP}^*} \times 100 \dots\dots\dots (19)$$

Gap が小さくなることは, 上界値と下界値が近づいたことを意味する。Fig. 1 の横軸はラグランジュ乗数の更新回数を表しており, 縦軸は NPV を表している。Gap は Fig 1 のように, 上界値と下界値の差を意味する。収束判定は, 指定した数値よりも Gap が小さくなったかどうかで判定する。

Fig.1 Improvement of the gap between lower and upper bounds.

4. 新たな提案とアルゴリズムの改良

本節では, 4-D network relaxation 法を取り入れた解析プログラムで, 計算時間の短縮と精度の改善にどのような手法, アルゴリズムの改良が行われたか, また適用範囲を拡張したか, その実装の過程を明らかにする。

4・1 高速化について

計算時間を長くしている原因は2つある。ラグランジュ緩和した問題の最適解から実行可能解へ解を変更する部分と, 最終ピット計算で用いられる LG 法を適用する部分に改善の余地が存在する。

緩和解から実行可能解へ解を変更する際の効率を上げることができると, ラグランジュ乗数の更新回数を減らすことができ, 結果的に LG 法の計算回数を減らすことができる。この部分に関しては, 従来の解析プログラムで効率的といえない手法が用いられてきていたため改良を行った。

次に LG 法を適用する部分に関しては, 変数の数が大きく関わる。変数の数が多くなればなるほど, 多くのメモリが必要となり探索範囲も多くなるため計算時間が大幅に増加してしまう。そのため, LG 法の計算を行う前に変数の数をできる限り少なくすることが必須となる。変数を少なくする手法については, 先行研究が示している通り, 処理方法を決定した上で問題を解く方法が提案されている。この手法を用いることにより, 変数の数を $1/m_{\max}$ 分だけ減らすことができ, 計算時間を少なくすることに成功している⁴⁾。本稿では, 変数を減らす手法に加え, 問題を子問題化して解く方法を新たに導入した。子問題化して解くことにより, 探索範囲も小さくなり計算時間を短縮することができる。さらに, 計算時間が短縮できたことを用いて, 探索すべき位置を取り除く手法を提案する。

本研究では, 緩和解から実行可能解の導出プロセスの改良 (4・1・1) と問題の子問題化による効率化 (4・1・2), と探索範囲を減少させること (4・1・3) によって, 計算の高速化を実現した。

4・1・1 実行可能解の導出における価格概念の導入 ラグランジュ緩和した問題を解く場合, 緩和問題の最適解から, 主問題の実行可能解へ変更する作業が必要となる。従来法では, ある期の制約違反が起こった (採掘しすぎた) 場合, 制約条件を違反しないように超過採掘分は単純に次の期に移す作業を行っていた¹⁾。しかし, この手法を最終期に適用した時には, 主問題の目的関数の値 (下界値) は改善できず, また必ずしも価値の高い期に多くの採掘を行う結果にはならない。

そこで, 本研究では, 新たに価格概念を取り入れた実行可能解の組み直しを導入した。つまり, 割引後の地金価格が最も高くなる期から順に, 制約条件に違反しない範囲内で採掘量を調整する。

すなわち、価格の現在価値が高い時期に容量の余裕があれば、それを利用するように生産量を調整する。単純に超過分を後期に繰り越すことよりも、NPVが改善させることで、最終的には収束に至る反復回数が減少することを期待している。

4・1・2 期数分割による子問題化 本手法では、期数が増えればその分だけ変数が増え、問題は複雑化する。それに応じて計算時間も長時間化しやすい傾向がある。

そこで、本研究ではより簡単に問題を解くために、問題を複数の子問題に分割し、その子問題を解いた後に元の問題を求める手法をとる。具体的には、適当な期数を設定して、期数の数に応じて問題を分割する。つまり、最初1期のみの場合の最適解を出し、この最適解を基に、2期までの場合の最適解を出す。このように期数を増やすごとに、子問題で得られた最適解を基に最適解を簡単に得ることで、高速化が実現できる。

4・1・3 探索範囲の減少 本手法では、変数の数が増えれば増えるほど計算時間が長時間化しやすい。そのため、変数をできるだけ少なくすることが必要である。従来の手法では、探索する範囲を小さくするために、ブロック価値が正のブロックから斜面制約にかかるブロックのみを計算に加えるという手法を用いて、探索すべきブロックの数を減少させていた。しかし、正のブロックの中には、採掘する可能性が全くないものも含まれている。そこで、本稿では斜面制約と採掘回数制約以外の制約を取り除いた上で生産計画を立て、その上で採掘されないブロックを除外する。具体的には、生産容量制約などの制約条件を緩和した問題の最適解で採掘されるブロックのみを探索対象にする。これにより、採掘する可能性が全くないブロックを探索範囲から除外することができ、計算時間を短縮することができる。また、単に緩和する場合に得られる解と、ラグランジュ緩和とラグランジュ乗数が0で得られる解は同じである。そのため、本稿ではラグランジュ乗数を0にして得られる解を用いて計算を行う。

4・2 モデルの拡張について

鉱床は一般に地中深くに存在し、露天掘の場合、剥土を行う必要がある。そのため、例えば鉱床の上部に大きなズリがある問題では、生産容量制約のみを制約条件とすると、表層部のズリ剥土にはいかなる制約も存在しないので、一期だけで表層部の全ズリが採掘され、二期目から鉱石が採掘され生産容量制約が働くが、鉱山が有しているトラックフリート、ローダフリートの能力を無視したものとなり一期目のズリ採掘は非現実的なものとなる。

そのため、本研究では、選鉱場で処理する鉱石量の制約のみではなく、ズリと鉱石の合計採掘量に対する制約である総採掘量制約を加えることでこの問題を回避する。つまり、一期ごとに採掘できる鉱石とズリを合わせた量を制約条件として取り入れる。この制約を入れることにより、一期目に多く採掘しすぎることだけでなく、例えば複雑な鉱床の場合に非常に大量のズリを採掘するような非現実的な生産計画が生まれる可能性も排除することができ、現実に近い解を得ることができた。具体的に、式(1) - (4)に式(20)を制約条件として加える。ただし、 w^t は一期ごとの採掘量の限界を表している。

$$\sum_m \sum_n x_{mn}^t \leq w^t \text{ for } \forall t \quad (20)$$

生産容量制約と同様に総採掘量制約もラグランジュ乗数 α^t を導入して緩和するので式(12)を、以下のように変形することができる。

$$\max Z_p = \sum_t \sum_m \sum_n \bar{c}_{mn}^t x_{mn}^t \quad (21)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \Gamma_n} \bar{x}_{maxj}^t - u_n \bar{x}_{maxn}^t \geq 0 \text{ for } \forall n \forall t \quad (22)$$

$$\bar{x}_{mn}^t - \bar{x}_{m+1,n}^t \leq 0 \text{ for } \forall n \forall t \text{ and } \forall m < m_{max} \quad (23)$$

$$\bar{x}_{maxn}^t - \bar{x}_{[n]}^{t+1} \leq 0 \text{ for } \forall n \text{ and } \forall t < t_{max} \quad (24)$$

ただし

$$\bar{c}_{mn}^t = \begin{cases} \hat{c}_{mn}^t - \hat{c}_{m+1,n}^t \cdots m < m_{max} \\ \hat{c}_{mn}^t - \hat{c}_{m+1,n}^t \cdots m = m_{max} \cap t < t_{max} \\ \hat{c}_{m_{max}n}^t \cdots m = m_{max} \cap t = t_{max} \end{cases} \quad (25)$$

$$\hat{c}_{mn}^t = \begin{cases} c_{mn}^t - \alpha^t \cdots m \neq p \\ c_{mn}^t - \lambda_m^t - \alpha^t \cdots m = p \end{cases} \quad (26)$$

である。

解析プログラムの効率化と改善によって計算時間が減少したこともあり、総採掘量制約を追加して現実的な計算時間で問題を解くことが可能になった。その結果、生産量（鉱石の選鉱処理量）制約のみではときに非現実的な解が算出されていたが、より現実的で実用的な解を得ることができるようになった。

5. ケーススタディー

ある北米の金鉱床を用いて、ケーススタディーを行った。この鉱床のブロックモデルは、東西7,000ft、南北3,700ft、深さ方向1,000fの大きさを持ち、一つのブロックは100ft×50ft×40ftで、約15,000tの重量を持つ。ブロックの数は、東西70ブロック、南北74ブロック、深さ方向25ブロックで、ブロックモデルは全体で129,500個のブロックから構成されている。個々のブロックには金品位が割りつけられており、ブロックの経済価値を計算することができる。具体的には、129,500ブロックのうち品位が0ではないブロックの数は8,124ブロックある。その品位は0.3[g/ton]から184[g/ton]の間で分布しており、これらの平均は12.9[g/ton]である。また、金属価格は、近年の価格に合わせるために2008年7月から2010年6月までの月別の平均金価格の平均(1,013US\$/oz)を参考にし、1,000US\$/ozとする。

5・1 計算に使用した前提条件

選鉱・製錬実収率：90 %
最大ピット傾斜角：45 deg
ブロックの重量：15,320 t
採掘コスト：1 \$/t
処理コスト：5 \$/t
期数：5 期
割引率：10 %
生産容量制約：1,000 ブロック
総採掘量制約：6,000 ブロック
収束判定：Gap5% 以下

5・2 提案手法の時間比較

3・1節で提案した高速化の比較を行った結果をFig. 2に示す。(使用した計算機は、Intel (R) Core (TM) i7 (2.93GHz) RAM 8.00 GBである。)その効果の検証のため、先行研究1) - 2)におけるものに近いアルゴリズム、すなわち4・1節で紹介した手法を導入しない場合の計算も行った。

Fig. 2で、Cが提案手法を導入しない場合の計算時間を、P1が4・1・1節、P2が4・1・1節と4・1・2節、P3が4・1・1節と4・1・2節と4・1・3節すべての提案手法を取り入れたものの計算時間

Fig.2 Reduction of calculation time with proposed algorithm.

Fig.3 Difference in NPV and calculation time for each case.

を表している。従来の手法と比べて、計算時間が大幅に短縮されている。個別に見ると、まず C と P1 の比較から、緩和解から実行可能解を導出する際の価格概念の導入が、計算時間を約 3 分の 1 へと大きく減少させていることが分かる。さらに、P1 と P2 の比較から、計算時間がさらに約 3 分の 1 に減少しており、子問題化により問題を分割したことによる効果だと考えられる。これらに比べると、P3 に見られる 4・1・3 節で示した探索範囲を小さくする手法は計算時間の減少幅が少なかった。これは、金の価格を 1000US\$/oz と非常に高く設定したため、採掘する必要がない鉱石ブロックが少なかったためだと考えられる。金属価格が低いあるいはカットオフ品位が高い鉱床モデルの場合は非常に大きな効果を示すことが予想される。いずれにせよ、4・1・3 節で示した手法を取り入ただけで計算時間が約 2 割減少できていることはこの手法の効果だと考えられる。

5・3 ブロックサイズの変更の比較

ここでは同じ鉱床モデルを変化させて比較する。具体的には、100ft×50ft×40ft の現在の問題を、100ft×100ft×40ft と 200ft×100ft×40ft のように一つのブロックサイズを大きくする。それに対して、全体のブロックの数は 74×70×25 (=129,500) ブロックである現在の問題から、37×70×25 (=64750) 個と 37×35×25 (=32375) 個と少なくなる。

Fig. 3 の棒グラフはそれぞれのケースの NPV を、折線グラフは計算時間を表している。棒グラフに示されるように、ブロックを結合すると NPV が小さくなっている。NPV が小さくなる理由は、ブロックが大きくなると、小さなブロックでは採掘すべきブロックが、採掘する必要がないブロックとあわさることで、採掘すべきではないと判断されるためだと考えられる。つまり、できる限り細かいブロックで大規模な問題を解いた方が、解として

Fig.4 Realized NPV for each price path by each schedule.

はより良い解を得られることがわかる。一方で、線グラフに示されるように計算時間に差がみられるが、変数の数が減少したことによって生まれた計算時間の短縮だと考えられる。本研究で取り入れた解析プログラムの改良前の計算法では計算時間が長くなった場合には、解の最適性を犠牲にしてブロックサイズを大きくして、問題を解いていた。しかし、解析プログラムの改良により、計算効率が大幅に改善されブロック数の大きな問題でも 71 秒で計算が完了していることから分かるように、ブロックサイズの変更をすることなく大規模な問題への対応が可能になったことが本研究で開発したプログラムの一つの重要な成果である。

5・4 価格変動

本研究で開発した解析プログラムでは、価格変動を組み込んだ計算が可能になっており、このことが大きなアドバンテージとなっている。そこで、価格変動シナリオとして 3 パターンを考え、それぞれに対するモデルの解の変化を考える。具体的には 2008 年 7 月から 2010 年 6 月までの月別の平均金価格の分散を計算し、これが正規分布に従うものとして累積確率が 25% (-186US\$/oz) と 75% (186US\$/oz) になるような上下動の幅を設定、この幅だけ毎期価格が下降、上昇していくものと、価格が一定である三つのシナリオに基づき生産計画を求める。価格上昇シナリオを U、一定シナリオを C、下降シナリオを D と呼び、そのシナリオ (U, C, D) にしたがって生産計画 (毎期の生産量) を計算する。しかし、実際にはシナリオ通りの価格変動が起きないので、これが結果 (NPV) にどのような影響を与えるかを検証した。価格パスについては、先ほどの分散の累積分布関数で 10% から 90% まで 10% づつ異なる値の 9 通りの変動幅での上下動が起こるパスを考える。一期目の価格は 1000US\$/oz に固定し、二期目は 9 通りに価格が変動するものとし、三期目以降は前期の価格に対してさらに 9 通りの価格変動が生じるものとした。これにより、生産計画を 5 期としたので、合計 6,561 通りの価格パスを 3 つの生産計画に与えることで NPV を計算、シナリオの違いについて考察する。また、生産計画に対しては割引率による影響が存在するが、本節では純粋に価格変動が起きた場合の影響と効果を考察するために、割引率を考慮せず 0 とする。さらに、本節では後に 6,561 通りという非常に多くの価格変動を考慮に入れるため、厳密な解が求められる。そのため、本節の計算では、Gap を 1% 以下となることを収束判定の条件に使用した。

Fig. 4 の棒グラフは 3 つの価格シナリオにしたがって計算した 6,561 通りの価格パスを設定して計算した所、価格上昇シナリオ

Fig.5 Amount of metals recovered in each schedule.

のNPVが最大となったのが44.8%で、価格一定と価格下降シナリオのNPVが最大となったのは、それぞれ19.4%と35.8%であったことを示している。Fig. 5の棒グラフは三つのシナリオで生産計画を立てたときの、各期の金属生産量を表している。価格シナリオによって、各期のカットオフ品位が変化する。価格上昇シナリオであれば、カットオフ品位は期毎に減少する。にも関わらず、Fig. 5の折線グラフに示した各期の粗鉱平均品位から分かるように、高品位なブロックは後で掘ろうとするために粗鉱平均品位そのものは上昇することになる。

Fig. 4をみると、価格一定シナリオ（カットオフ品位一定）よりも、価格上昇・価格下降シナリオを設定すると、より高いNPVを出す割合が高くなることがわかる。Fig. 5をみると、価格一定シナリオの場合、4期目と5期目以外の期の金属生産量はほぼ同じになる。4期目と5期目の金属生産量が少ないのは、4期目と5期目に生産する鉱石の品位が低くなる鉱床モデルであるからだと考えられ、粗鉱品位からもそのことがわかる。一方で、価格上昇や下降を前提として解いた場合、毎期の金属生産量は期によって大きく変化する。その結果、実際の価格パスにおいて価格変動が起こった際に、価格一定シナリオの場合、毎期の価格変動の影響を均等に受けるのに対して、上昇や下降シナリオの場合は、価格変動の影響の大きさが変わってくる。ただし、一般には粗鉱品位（平均値）が大きく変動する（ばらつく）ことによって、選鉱成績（選鉱実収率）に対して影響を与えることが考えられる。本稿では選鉱成績（選鉱実収率）の変化を考慮していないが、ブロック処理（鉱石として選鉱場に送るかズリとして堆積場に送るか）の第3の手法として、ストックパイルを取り入れた計算も考えるべきである。これについては、すでに計算を行っているが、別の機会に発表したいと考えている。

さらに、Fig. 4のように価格上昇シナリオの方が価格下降シナリオよりもNPVが高くなる割合が多くなっているのは、今回の鉱床モデルについてはFig. 5からもわかるように上昇シナリオの方が一期毎の金属生産量の変化が大きいためだと考えられる。毎期に得られる金属生産量の変化が大きいと、前の期に比べて価格が上昇する期が一度でもある場合は、価格上昇の方が高いNPVを得やすくなる。これは逆に、下降シナリオの時にも起こることではある。しかし、今回の鉱床モデルにおいては、上昇シナリオの方が、毎期の金属生産量の変化が大きい結果となった。よって、下降シナリオよりも上昇シナリオの方が、NPVを高く出す割合が大きいのだと考えられる。

またFig. 4のMaximum, Minimum, Averageは、6,561通りの価格パスを3つの計画に与えた際のNPVの最大値と最小値と平均値を表している。これから、もう一つの知見として、価格が上昇シナリオを仮定してスケジューリングを立てた場合は、NPVの最大値と最小値の幅が最も大きくなるという結果が得られたことである。期数が先になればなるほど、価格の不確実性が高くなるが、価格上昇シナリオの場合、金属価格がより高くなる後期に金属生産量を増やすことになるので、シナリオとは異なる価格が実現するといういわば不確実性が増すので、NPVの変動幅が大きくなる。言い換えれば、下降シナリオを用いれば、NPVの不確実性も下がると考えられる。

つまり、最終的に得られるNPVの変動幅を小さくしたければ、下降シナリオを想定して生産計画を立てるべきである。しかし、NPVが大幅に下がるリスクを取ってでも、できる限り大きなNPVを得たい場合には、価格上昇を前提としてスケジューリングを立てた方が、NPVが大きくなる可能性があるといえる。

このように、スケジューリングを立てる段階で、価格変動を入れることによって、不確実性に対する選好をある程度反映した生産計画の立案が可能になると考えられる。この結果は鉱床によっても変化することが考えられるために、常にいくつかの価格シナリオの下で計画を行い、さらに様々な価格パスを与えることで確認を行うべきである。しかし、本研究で実現した計算時間の大幅な短縮をもたらすアルゴリズムを開発したことで、はじめて得られた重要な知見と考えている。今後、異なる鉱（ex. 斑岩銅鉱）で、異なる規模、異なる幾何学的特徴を持つものに対しても検証を試みたいと考えている。

5・5 総採掘量制約の導入とその影響

生産量制約のみ考慮した場合と、これに加え総採掘量制約を導入した場合の各期の採掘量をFig. 6に、NPVと計算時間とGapをTable 1に示す。

Fig 6の棒グラフは毎期の鉱石とズリをあわせた総採掘量を表している。また、折線グラフは総採掘量に占める鉱石の割合を表している。棒グラフからわかるように、総採掘量制約を加えることによって毎期の採掘量のばらつきが少なくなっていることがわかる。二期目の採掘量が他の期に比べて採掘量が少ないのは、一期目にズリを中心として採掘した結果、生産容量制約に達し、それ以上の採掘が行われなかったためである。つまり、鉱石の割合が増えていることからわかるように、二期目は鉱石を中心として採掘している。NPVは、生産容量制約のみの方が総採掘量制約を付加したものよりも高い。これは、総採掘量制約を付加した問題の方が、新たに制約を加えたため実行可能領域が小さくなり、NPVが小さくなったのだと考えられる。

また、本手法にはGap問題という問題が存在する。これは、制約条件を増やすことによって、ラグランジュ乗数の更新を行っても、Gapが減少せずGapによる収束判定が困難となる問題である。本稿のように、総採掘量制約という新たな制約条件を導入することによって、Gap問題が生じる。この場合、計算を続けることによって下界値（実行可能解）あるいは上界値（緩和解）が改善されることもあるため、計算を続けることも可能である。一方で、計算を続けてもより良い解が得られる可能性が乏しいと判断し、時間やラグランジュ乗数の更新回数などで計算を打ち切るという判断もできる。本節では、後者を用いて下界値が5回以上更新されない場合計算を打ち切り、その時までの計算時間とGapをTable 1に示す。計算時間もGapも、総採掘量制約を付加した問題の方が大きくなっている。これは、制約条件を新たに付加したことによる結果だと考えられる。

Fig.6 Excavated ore and waste blocks.

一方5・1節のように、収束判定をGap 5%以下にした場合、同じ問題で計算時間が13670秒かかり、NPVは2527million US\$という結果が得られた。このように、計算時間をかけることによって、Table 1に示したものより良いNPVを得ることは可能である。しかし、計算時間に対するNPVの解の改善が悪い場合もあり、収束判定に関しては、新たな判定基準を設けるなど今後検討すべき課題である。

6. 結 言

露天掘鉱山における最適化手法の一つである4-D network relaxation法の説明を行い、それを実装する上で問題となってい

Table 1 NPV and calculation time.

	Prodction Constraint Only	Production and Mining Constraints
NPV [10 ⁶ US\$]	2,591	2,310
Calculation Time [sec]	157	298
Gap[%]	2.18	19.40

る計算時間を短縮するための手法と、問題の拡張を提案し、さらにそれによるケーススタディーの結果を示した。計算時間を短縮することによって、価格変動を導入したケーススタディーや問題の拡張を行うことができた。

また、本論文では計算時間の短縮を主眼においたものであったが、今後ストックパイルなど他の処理方法の選択枚を増やした上での検討をしていくことが必要であると考えられる。

謝辞 本研究の一部は、環境省の環境研究総合推進費(S-6-4)の支援により実施された。ここに感謝の意を示す。

References

- 1) JOGMEC: *Kinzoku Shigen Kaihatu no Kiso*, (Asakura Syoten, Tokyo, 2008), pp.1-22.
- 2) B. Elekli: International Journal of Surface Mining, **9** (1995), 149-153.
- 3) M. Osanloo, J. Gholamnejad, B. Karimi: International Journal of Mining, **22** (2008), 3-35.
- 4) A. Akaike: Ph D. thesis, the Colorado School of Mines, 241p., (1999).
- 5) H. Lerchs and I. F. Grossmann: Canadian Institute of Mining Bulletin, **58** (1965), 47-54.
- 6) Y. Zhao and Y. C.Kim: Proc. of the 23rd APCOM, p.423-434 (1992).
- 7) M. Ino, H. Konno and K. Tone: *Saitekika Handobukku*, (Asakura Syoten, Tokyo, 1995), pp.436-504.
- 8) E. A. Wrigh.: Mining Science and Technology, **4** (1987), 97-104.
- 9) G. Mogi, T. Adachi, A. Akaike, J. Yamatomi: Journal of MMIJ, **117** (2001), 599-603.
- 10) B. Andreas, B. Natashaia, F. Christopher and F. Gary: Computers & Operations Research, **37** (2010), 1641-1647.