堆積岩の圧縮破壊過程における 変形特性と浸透性に関する個別要素法を用いた解析 *

高 田 迪 彦¹

Numerical Study of Deformation Properties and Permeability of Sedimentary Rock in the Compression Failure Process Using the Discrete Element Method

by Michihiko TAKADA^a

a. Sedimentary Rock Research Group, Horonobe Research Inst. for the Subsurface Environment, Northern Advancement Center for Science & Technology (H-RISE), 3-15 Sakaemachi Horonobe-cho Teshio-gun Hokkaido, 098-3221, Japan
(Corresponding author, E-mail: michihiko.takada@h-rise.jp / FAX: 81+1632-9-4113)

Deformation properties and permeability of sedimentary rock in the compression failure process was numerically studied using the distinct element method. Elastic tensors were estimated using the finite element method (D^{fem}) and the method assuming the affine deformation (D^{affine}). Permeabilities were estimated using the effective medium approximation and the fluid flow network. In agreement with the experimental results, the linear stress-strain relation under low differential stress and the nonlinear inelastic stress-strain relation near peak differential stress level were observed in the simulations. The change of D^{fem} was relatively small in the linear elastic region, then D^{fem} evidently changed and became anisotropic after the peak strength. On the other hand D^{affine} did not varied significantly compared with D^{fem} but also became anisotropic. After peak strength inelastic deformation was the dominant deformation process. The permeability estimated using the effective medium approximation was increased after the failure. The permeability estimated using the fluid flow network exhibited anisotropy. The anisotropy of the elastic tensors and the permeability estimated from the fluid flow network could be attributed to the structural change of the rock model due to differential stress.

KEY WORDS: Sedimentary Rock, Failure, Permeability, Discrete Element Method

1. は じ め に

岩石の浸透性は地下環境における流体の挙動を把握する上で不可欠な性質であり、石油・天然ガスの開発や地熱エネルギーの開発、CO₂ 地中貯留など様々な問題において重要である。また岩石の浸透性は岩石内部の空隙の構造と密接に関係し、岩石の変形や破壊によって変化する。地下構造物周辺の岩石は掘削によるダメージや、応力の再配分による変形等がおこるためこうした場合に浸透性がどのように変化するかの浸透性変化を引き起こすメカニズムを明らかにすることは重要であると考えられる。

既往の研究において様々な環境における岩石の浸透性に関する実験的研究が行われている。Brace et al. (1968)¹⁾, Zoback et al. (1975)²⁾, Kiyama et al. (1996)³⁾, Oda et al. (2002)⁴⁾ は様々な環境における花崗岩の浸透率を室内実験によって調査した。実験の結果、静水圧下では圧力の増加に伴い、浸透性が減少すること、差応力下ではピーク強度に近づくにつれて浸透率は増加し、ピーク強度を越えるとさらに急激に増加することなどが明らかにされた。

Paterson (1978)⁵⁾ によると脆性領域における岩石の三軸圧縮応力下の変形挙動は四段階に分けられ、第一段階では岩石内部に元から存在するマイクロクラックの閉塞が起こり、第二段階では線形弾性的な応力ひずみ関係が見られ、第三段階では安定的なクラックの成長が起こり、第四段階で不安定なクラックの成長が生じ破壊に至ると考えられている。浸透率はこの第一段階において減少、第二段階では大きく変化せず、第三段階から第四段階において破壊によって大きく増大するとされている⁵⁾。この浸透率変化の傾向は上に挙げた花崗岩など多くの岩石において共通している。ただし、堆積岩の場合には必ずしもこの傾向に沿わない実験結果も報告されている。

堆積岩を対象とした実験としては Takahashi et al. (1991)⁶⁾, Main et al. (2002)⁷⁾, Ngwenya et al. (2003)⁸⁾, Takada et al. (2010)⁹⁾ などが挙げられる。Takahashi et al. (1991)⁶⁾ は白浜砂岩、来待砂岩、新第三紀泥質岩について様々な環境における浸透率を調査した。静水圧下ではどの岩種においても有効応力の増加によって浸透率が減少することが確認されたが、差応力下の実験では岩種により異なる傾向が認められた。白浜砂岩ではピーク強度付近の差応力が比較的大きい状況において浸透率が増加したのに対し、泥質岩では差応力の高い状況で浸透率の減少が見られた。Main et al. (2000)⁷⁾ や Ngwenya et al. (2003)⁸⁾ の Clashach 砂岩を用いた実験ではピーク強度後に一時的に浸透率が増大するものの、その後は軸ひずみ

*2011 年 8 月 29 日受付 2012 年 4 月 17 日受理

1. 正会員 公益財団法人 北海道科学技術総合振興センター 幌延地圏環境研究所 堆積岩特性研究グループ 研究員

[著者連絡先] FAX: 01632-9-4113

E-mail: michihiko.takada@h-rise.jp

キーワード: 堆積岩, 破壊, 浸透性, 個別要素法

の増加に従い浸透率の減少が見られた。

Takada et al. (2010)⁹⁾ は来待砂岩を用い、三軸圧縮破壊過程における浸透率に封圧が及ぼす影響を調査した。実験の結果、封圧が低い場合には破壊によって浸透率の増加が見られたが、封圧が比較的高い場合には破壊後も浸透性の変化は小さいという結果が見られた。

岩石の浸透性に関して、実験だけでなく数値シミュレーションに基づいた調査も行われている。数値シミュレーションによって現実の岩石の挙動を完全に再現できるわけではないが、実験においては測定が困難であるデータを収集することも可能であり、実験結果と共に利用することで、現実の岩石挙動への理解を深めるために利用できると考えられる。数値シミュレーションによる解析手法の一つである個別要素法 (discrete element method)¹⁰⁾ は破壊の過程についても扱うことが可能であり、様々な検討において利用されている。

Min et al. (2004)¹¹⁾ は個別要素法を用い亀裂性の岩石を個別のブロックの集合としてモデル化し、応力が浸透率に及ぼす影響について調査した。彼らはブロック間に働く力と亀裂の開口幅との関係に非線形な関係を導入し、垂直応力による亀裂の閉塞と、せん断によるダイレイタンスを考慮して浸透率の評価を行なった。数値シミュレーションの結果、差応力が低い段階では浸透率は減少し、差応力が増加するにつれて、最大主応力方向の浸透率が増加し異方性が生じる結果が見られた。Baghbanan and Jing (2008)¹²⁾ は同じく個別要素法を用いて、亀裂長さの開口幅との分布に統計的な関係性がある岩石モデルの浸透率に応力が及ぼす影響を調査した。亀裂長さの開口幅に統計的な関係性があるモデルでは、関係性が無い場合と大きな違いが生じ、浸透率のスケール依存性はより大きくなるという結果が見られた。

堆積岩を対象とした研究としては Bruno (1994)¹³⁾ や Shimizu et al. (2010)¹⁴⁾ などがある。Bruno (1994)¹³⁾ は円形要素間に結合を導入したモデルを用い、個別要素法によって破壊や応力が堆積岩の浸透性に及ぼす影響について調査した。このシミュレーションにおいても、差応力が低い段階には浸透率が低下し、差応力が増加するにつれて最大主応力方向の浸透率が増加する結果が見られた。また同じく浸透率は差応力によって異方性が生じる結果が見られた。Shimizu et al. (2010) は個別要素法を用いて、水圧破壊法に関する数値シミュレーションを行い、流体の粘性が及ぼす影響などについて調査を行なった。

先に述べたように、実験や数値シミュレーションによって様々な研究が行なわれているが、破壊過程における浸透性の変化や、浸透性変化を引き起こすメカニズム、破壊過程における構造の変化と浸透性変化や変形特性変化の関係などに関しての知見は十分ではなくさらに検討が必要だと考えられる。本研究では堆積岩を対象として個別要素法を用い、岩石圧縮試験を模した数値シミュレーションを行い、破壊過程における変形特性と、浸透性について調査を行なった。数値シミュレーションは封圧 5.0 MPa と封圧 10.0 MPa の 2 つの条件で行い、封圧が及ぼす影響を調査した。また圧縮破壊過程における応力、ひずみ、弾性定数、浸透率を計算し、数値シミュレーションによって得られた結果を元に圧縮破壊過程における堆積岩の変形特性と浸透性について考察を行なった。

2. 数値計算の方法

2・1 個別要素法による岩石モデル

本研究では粒子間の相互作用として、変位と力が線形な関係を用いた¹⁰⁾。本研究において用いた相互作用のモデルを Fig. 1 に示す。また岩石のセメンテーションを表現するため初期配置の状

Fig.1 Models of particle interactions.

態で接触する粒子間に結合を導入した。これにより結合が存在する粒子間では設定した強度までの引張力が働くことが許容される。また、結合には引張強度とせん断強度とを設定し、粒子間に働く力がどちらかの強度を超えた場合に結合は取り除かれるようにした。

粒子間に働く力ベクトル $\mathbf{f}$ は法線方向力ベクトル $\mathbf{f}_n$ とせん断方向力ベクトル $\mathbf{f}_s$ の和として計算した。

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_s \quad (1)$$

粒子 AB 間に働く法線方向力ベクトル $\mathbf{f}_n^{AB}$ は以下の式を用いて計算した。

$$\mathbf{f}_n^{AB} = \{k_n(R^A + R^B - |\mathbf{x}^B - \mathbf{x}^A|) - \gamma_n(\dot{\mathbf{x}}^B - \dot{\mathbf{x}}^A) \cdot \mathbf{n}\} \mathbf{n} \quad (2)$$

ここで k_n は法線方向ばね定数、 R^A , R^B は粒子 A , B の半径、 $\mathbf{x}^A$, $\mathbf{x}^B$ は粒子 A , B の位置ベクトル、 γ_n は法線方向減衰係数、 $\mathbf{n}$ は法線方向単位ベクトルを表す。また縦線で挟まれたベクトルはそのベクトルの大きさを表す。

粒子 AB 間に働くせん断方向力ベクトル $\mathbf{f}_s^{AB}$ は以下の式を用いて計算した。

$$\mathbf{f}_s^{AB} = \begin{cases} \{-k_s u_s - \gamma_s \dot{u}_s\} \mathbf{s} & \cdots \quad \text{contact} \\ -\mu \frac{u_s}{|u_s|} |\mathbf{f}_n^{AB}| \mathbf{s} & \cdots \quad \text{sliding contact} \\ \{-k_s u_s - \gamma_s \dot{u}_s\} \mathbf{s} & \cdots \quad \text{bond} \end{cases} \quad (3)$$

k_s はせん断方向ばね定数、 u_s はせん断変位、 γ_s はせん断方向減衰係数、 $\dot{u}_s$ はせん断変位の時間変化、 μ は摩擦係数、 $\mathbf{s}$ はせん断方向単位ベクトルを表す。接触時は contact と sliding contact とのうち絶対値が小さい方が適用される。また sliding contact が適用される場合にはせん断変位は変化しない。

せん断変位増分とせん断変位の時間変化は粒子の変位増分 $\Delta \mathbf{x}^A$, $\Delta \mathbf{x}^B$ と角度増分 $\Delta \phi^A$, $\Delta \phi^B$ から以下のように計算される。

$$\Delta u_s = -(\Delta \mathbf{x}^B - \Delta \mathbf{x}^A) \cdot \mathbf{s} + R^A \Delta \phi^A + R^B \Delta \phi^B \quad (4)$$

$$\dot{u}_s = -(\dot{\mathbf{x}}^B - \dot{\mathbf{x}}^A) \cdot \mathbf{s} + R^A \dot{\phi}^A + R^B \dot{\phi}^B \quad (5)$$

2・2 岩石圧縮試験のシミュレーション

本研究では岩石圧縮試験を模して、二軸圧縮応力下における数値シミュレーションを行なった。二軸圧縮試験の模式図を Fig. 2 に示す。境界の制御は y 軸方向には変位速度一定、 x 軸方向では封圧一定となるように制御した。封圧の条件は 5.0 MPa と 10.0 MPa の二条件とし、 y 軸方向に最大 2% まで変形を加える数値シミュレーションを行なった。数値シミュレーションでは個別要素法によって岩石を構成する粒子間の相互作用に基づいて、粒子一

Fig.2 Schematic of biaxial compression test.

Fig.3 Tensor representing the shape of a model.

一つ一つの運動方程式を数値的に解き、粒子の位置と速度の変化を求めた。また個別要素法によって求めた粒子配置から、後述する方法を用いてひずみ、応力、変形特性、浸透率の評価を行ない圧縮破壊過程における巨視的性質の変化を調べた。

2・3 ひずみと応力の評価方法

通常の室内実験において得られる応力やひずみなどの物理量は岩石供試体の巨視的な性質を表すものがほとんどであるため、実験結果と数値シミュレーション結果の対応を見るためには数値シミュレーションの結果から巨視的な物理量を評価することが必要である。本研究で用いたひずみと応力の評価方法について述べる。

ひずみを評価するために岩石モデルの外形を表す形状テンソル h_{ij} を導入した。本研究では岩石モデルの上下左右に平坦な壁を配置し、境界の制御を行っておりこの境界の形状をモデルの外形とした。 h_{ij} は Fig. 3 のようにモデルの外形を表す二つのベクトルからなっており、各成分は以下のように表される。

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

形状テンソル h_{ij} を用いてひずみテンソル e_{ij} は以下のように評価することができる¹⁵⁾。ただし本論文では圧縮ひずみを正にとるため符号が引用文献とは逆になる。

$$e_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 F_{ik}^t F_{kj} - I_{ij} \right) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{0ik}^{-t} h_{kl}^t h_{lm} h_{0mj}^{-1} - I_{ij} \right) \dots\dots\dots (7)$$

Fig.4 Nodes and elements in FEM analysis.

ここで行列の右上の添字 t は転置行列, -1 は逆行列, $-t$ は転置行列の逆行列を表す。また $\mathbf{F}_{ij}$ は変形勾配テンソル, h_{0ij} は変形前のモデル外形を表す形状テンソル, $\mathbf{I}_{ij}$ は単位行列を表す。

次に応力テンソルは以下の式を用いて評価することができる^{19, 20)}。応力も圧縮を正としているため、引用文献中とは符号が逆である。

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{2V} \sum_{a=1}^M (f_i^a d_j^a + d_i^a f_j^a) \dots\dots\dots (8)$$

ここで f_i^a は a 番目の接触での力ベクトル, d_i^a は接触が生じている二粒子の中心位置を結んだベクトルである。 a 番目の接触において粒子 A と粒子 B が接触しているとする

$$d_i^a = x_i^B - x_i^A \dots\dots\dots (9)$$

である。

2・4 弾性定数テンソルの評価方法

弾性定数テンソルは応力とひずみの関係を表し、変形特性に関する代表的なパラメーターであると考えられる。また計測されるひずみには、弾性ひずみと非弾性ひずみが含まれている。弾性定数テンソルを評価することにより、変形のうち弾性ひずみがどの程度の割合を占めるかを評価することができ、有用であると考えられる。ここでは本研究で用いた二種類の弾性定数テンソルの評価方法について説明する。なお本研究では弾性定数テンソル $\mathbf{D}$ を

$$D_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \dots\dots\dots (10)$$

として計算している。

2・4・1 有限要素法による評価 有限要素法は様々な分野で用いられている数値解析手法であり、本研究で扱う問題に対しても有効であると考えられる。接触と結合の状態が変化しない微小変形の範囲では、岩石モデルは Fig. 4 のように個別要素法で用いた粒子の中心の位置に節点を設定し、粒子の接触と結合に対して2節点要素を対応させた構造と力学的に等価であると考えられる。この構造はトラス構造などと同様の方法により有限要素法を用いて解析することができる。なお接触と結合の状態が変化しない微小変形の範囲という条件は有限要素解析に対するものであり、大変形過程の任意の時点での粒子配置に適用が可能であると考えられる。各要素における節点変位と力の関係は、接触や結合の状態によって式 (1), (2), (3) から決定される。節点 A , B からなる要素に生じる力増分 $\Delta \mathbf{f}^{AB}$ と節点変位 $\Delta \mathbf{x}^A$, $\Delta \mathbf{x}^B$ の関係はすべりが生じない場合には以下になる。

$$\Delta \mathbf{f}^{AB} = \begin{pmatrix} k_n \cos^2 \phi^{AB} + k_s \sin^2 \phi^{AB} & \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} (k_n - k_s) \\ \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} (k_n - k_s) & k_n \sin^2 \phi^{AB} + k_s \cos^2 \phi^{AB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^B - \Delta x_1^A \\ \Delta x_2^B - \Delta x_2^A \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

ここで ϕ^{AB} は節点 A, B からなる要素と x 軸との成す角である。接触にすべりが生じている場合には以下のようになる。

$$\Delta \mathbf{f}^{AB} = \begin{pmatrix} k_n \cos^2 \phi^{AB} - \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} \\ k_n \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} + \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \cos^2 \phi^{AB} \\ k_n \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} - \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin^2 \phi^{AB} \\ k_n \sin^2 \phi^{AB} + \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta x_1^B - \Delta x_1^A \\ \Delta x_2^B - \Delta x_2^A \end{pmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

弾性定数テンソルを評価するために e_{11}, e_{22}, e_{12} をそれぞれ微小に変化させる三つの境界条件を与え、式 (8) からそれぞれの状態の応力テンソル増分を計算し、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \approx \frac{\Delta \sigma_{ij}}{\Delta e_{kl}} \dots\dots\dots (13)$$

として計算を行った。

2・4・2 一様な変形を仮定した方法 先に述べたように弾性定数テンソルは応力テンソルをひずみテンソルによって偏微分することで得られると考えられる。式 (8) で示した応力テンソルのひずみテンソル (式 (7)) による偏微分はこのままでは計算できないが、次の二つ7の条件下では計算できると考えられる。この条件は、変形が微小な時生じる変形は一様な変形 (アフィン変形) とみなすことができることと、平行移動と剛体回転が生じず変形勾配テンソルが対称行列となることである。

一様な変形となるという条件は特別な粒子配置の場合にのみ成り立ち、一般的な場合には個々の粒子の変位には巨視的な変形と線形でない変位が含まれている。この巨視的な変形と線形でない変位は内部変位と呼ばれている。2・4・1 で示した方法で評価される弾性定数テンソルには内部変位の影響が含まれているため、この方法による評価と比較することで内部変位の起こりやすさを見ることができると考えられる。

平行移動と剛体回転が生じないという条件については、本研究で行なった境界の制御下ではこれらは生じにくいため妥当であると考えられる。また平行移動と剛体回転が生じやすい場合にも、座標軸をモデルの平行移動と剛体回転に追従するように設定することでこの条件を満たすことができると考えられる。

この方法では先に述べた有限要素法を用いた方法のように大規模な連立方程式を解く必要がないため、計算コストは比較的低く、内部変位の影響が小さい場合に、おおよその弾性定数テンソルを評価するために利用できると考えられる。巨視的な弾性定数テンソルから k_n や k_s などの粒子間相互作用のパラメータを見積もる際にも用いることができると考えられる。また粒子間相互作用が非線形な場合には、有限要素法を用いる場合、Newton-Raphson 法などにより非線形な連立方程式を解くことが必要になり、計算

量は大きく増加するが、この手法では必要な計算量はあまり変化しないという利点がある。ただし内部変位の影響が大きい場合には Ray (1988) の Fluctuation Formula による方法²¹⁾ などを用いる必要があると予想される。

この方法によって計算される弾性定数テンソルを $\mathbf{D}^{\text{affine}}$ とする。 $\mathbf{D}^{\text{affine}}$ は以下の式によって計算される。

$$D_{ijkl}^{\text{affine}} = \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial d_i^{\alpha}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial e_{kl}} f_j + f_i \frac{\partial d_j^{\alpha}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial e_{kl}} \right) + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^n \left(d_i^{\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial d_q^{\alpha}} \frac{\partial d_q^{\alpha}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial e_{kl}} + \frac{\partial f_i}{\partial d_q^{\alpha}} \frac{\partial d_q^{\alpha}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial e_{kl}} d_j^{\alpha} \right) \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで $\mathbf{F}$ の $\mathbf{e}$ による偏微分は以下のようになる。ただしこれは二次元の場合のみである。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial e_{11}} & \frac{\partial F_{11}}{\partial e_{12}} & \frac{\partial F_{11}}{\partial e_{22}} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial e_{11}} & \frac{\partial F_{12}}{\partial e_{12}} & \frac{\partial F_{12}}{\partial e_{22}} \\ \frac{\partial F_{22}}{\partial e_{11}} & \frac{\partial F_{22}}{\partial e_{12}} & \frac{\partial F_{22}}{\partial e_{22}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{F})\det(\mathbf{F})} \begin{pmatrix} \det(\mathbf{F}) + F_{22}^2 & -2F_{12}F_{22} & F_{12}^2 \\ -F_{12}F_{22} & 2F_{11}F_{22} & -F_{11}F_{12} \\ F_{12}^2 & -2F_{11}F_{12} & \det(\mathbf{F}) + F_{11}^2 \end{pmatrix} \dots\dots (15)$$

$\mathbf{d}^{\alpha}$ の $\mathbf{F}$ による偏微分は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial d_1^{\alpha}}{\partial F_{11}} & \frac{\partial d_1^{\alpha}}{\partial F_{12}} & \frac{\partial d_1^{\alpha}}{\partial F_{22}} \\ \frac{\partial d_2^{\alpha}}{\partial F_{11}} & \frac{\partial d_2^{\alpha}}{\partial F_{12}} & \frac{\partial d_2^{\alpha}}{\partial F_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{012}d_2'^{\alpha} + h_{011}d_1'^{\alpha} & h_{022}d_2'^{\alpha} + h_{021}d_1'^{\alpha} & 0 \\ 0 & h_{012}d_2'^{\alpha} + h_{011}d_1'^{\alpha} & h_{022}d_2'^{\alpha} + h_{021}d_1'^{\alpha} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

ここで $\mathbf{d}'^{\alpha}$ は

$$\mathbf{d}'^{\alpha} = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{d} \dots\dots\dots (17)$$

である。

本研究で用いた粒子間相互作用では変位増分と力増分の関係は式 (11)、式 (12) で示した。これにより $\mathbf{f}$ の $\mathbf{d}^{\alpha}$ による偏微分は

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}^{\alpha}} = \begin{pmatrix} k_n \cos^2 \phi^{AB} + k_s \sin^2 \phi^{AB} & \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} (k_n - k_s) \\ \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} (k_n - k_s) & k_n \sin^2 \phi^{AB} + k_s \cos^2 \phi^{AB} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

接触にすべりが生じている場合には

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}^{\alpha}} = \begin{pmatrix} k_n \cos^2 \phi^{AB} - \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} \\ k_n \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} + \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \cos^2 \phi^{AB} \\ k_n \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} - \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin^2 \phi^{AB} \\ k_n \sin^2 \phi^{AB} + \mu k_n \frac{u_s}{|u_s|} \sin \phi^{AB} \cos \phi^{AB} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

となる。

Fig.5 Voids recognized in the permeability estimation using EMA.

2・5 浸透性に関するパラメーターの評価方法

空隙の三次元的な構造が既知であれば、Navier-Stokes 方程式などの流体の運動を記述する方程式を数値解析によって解き、多孔質体の浸透率を評価することができる。しかし、本研究における検討は二次元的なもので、得られるのは空隙の二次元的な構造だけである。このため空隙の二次元的な構造から浸透率を評価することが必要である。ここでは本研究で浸透率評価のために用いた方法について述べる。

2・5・1 EMA による評価 EMA (Effective medium approximation) はパーコレーション理論の分野で提案された方法で、ランダムな抵抗ネットワークの巨視的な電気伝導度の推定や、多孔質体の浸透率の推定などに利用されている¹⁶⁾。岩石の薄片試料などから得られた空隙の二次元的な構造から EMA を用いて、浸透率を推定することも試みられている^{17, 18)}。

Lock et al. (2002) によると以下の式から浸透率が評価できる¹⁷⁾。

$$\sum_{i=1}^N \frac{C_{\text{eff}} - C_i}{(z/2 - 1)C_{\text{eff}} + C_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$C_i = \frac{A_i^3}{2\Gamma_i^2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$K_{\text{ema}} = \frac{NC_{\text{eff}}}{A_{\text{total}}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで K_{ema} は EMA によって評価された浸透率を表す。 C_i は空隙 i のコンダクタンスを表し、 A_i はこの空隙の面積、 Γ_i は輪郭長を表す。本研究では Fig. 5 に示したような粒子で周りを囲まれて区切られた領域を空隙とし、この面積と輪郭長をコンダクタンスの計算に用いた。 C_{eff} は全体の有効コンダクタンスであり、これは式 (20) を解くことで求められる。 z は一つの空隙が接続する流路の数を表す。また N は空隙の数、 A_{total} は解析の対象となる領域全体の面積を表す。EMA は空隙の 2 次元的形状に基づく評価であり、モデルの奥行き方向の浸透率を評価していると考えられる。本研究では Lock et al. (2002) と同様に z の値を 6 として計算を行なった。 z の値を変化させ 5 と 7 の場合について計算を行なったところ、 z が 5 の場合には浸透率は小さく、7 の場合には大きくなったがオーダーまでは変わらなかったため z の値が及ぼす影響は大きくないと予想される。

2・5・2 空隙ネットワークによる評価 先に述べたように二次元の個別要素法岩石モデルでは、空隙一つ一つは粒子同士の接触によって遮られ孤立した状態となっている。このためそのままでは流体解析などによって浸透率を評価することはできない

Fig.6 Schematic of void flow network.

が、粒子の結合間及び接触間に流路を仮定することで浸透率を評価することが試みられている¹³⁾。二次元のモデルでは Fig. 6 のように孤立した空隙が含まれる領域は空隙周辺の粒子の中心を結んだ多角形によって分割することができ、多角形の各辺上に粒子同士の結合や接触が一つずつ割り当てられる。三次元モデルの場合にも類似した領域の分割が可能であり、この場合モデルは多面体によって分割される。ただし三次元の場合は空隙同士は接続しており多面体の各面に一つ流路が存在することになる。空隙中の流体の流れはこの流路の浸透率によって支配されると仮定し、空隙を流路で接続した空隙ネットワークに境界条件を与え、流体の支配方程式を解くことで浸透率を評価することが可能であると考えられる。

本研究では粒子間の流路の流れの関係式として Shimizu et al. (2010)¹⁴⁾ のものを用いた。Shimizu et al. (2010) の用いた式は以下である。

$$Q = \frac{w^3}{12\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$L = 2 \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$w = \frac{w_0 F_0}{F + F_0} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで Q は流量、 ΔP は水圧差、 L は流路の長さ、 μ は粘性係数を表す。 w は流路幅を表し、式 (25) から計算される。 w_0 は接触や結合に働く法線方向力が 0 のときの流路幅、 F_0 は流路幅が 1/2 となるときの法線方向力の大きさを表すパラメーターである。

この流路の流れの関係式と境界条件から、岩石モデル全体の流れを表す連立方程式を作りこれを解くことで全体の浸透率を評価した。 x 軸方向と y 軸方向とについて評価するため、二つの境界条件についての計算を行いダルシーの法則によって固有浸透率を求めた。 x 軸方向の浸透率評価では x 軸と平行な上下の境界を流速 0 の固体境界条件、 x 軸と直交する左右の境界を圧力境界条件として水圧勾配を加える条件とした。 y 軸方向の浸透率評価では y 軸と平行な左右の境界を流速 0 の固体境界条件、 y 軸と直交する上下の境界を圧力境界条件として水圧勾配を加える条件とした。

2・6 岩石モデルの生成方法と入力パラメーターの設定方法

Takada et al. (2010)⁹⁾ の実験に基づいて岩石モデルを設定した。ただし本研究では主に変形挙動と浸透性の定性的な変化や、これを引き起こすメカニズムについての検討を目的としているため、

Table 1 Input parameters.

Parameters	Values
Initial model width (m)	0.040
Initial model height (m)	0.081
Particle mean radius (mm)	0.4
Number of particles	5129
Particle density (kg/m^3)	2500
Normal spring stiffness (GN/m)	10.0
Shear spring stiffness (GN/m)	5.0
Tensile strength of bonding (MPa)	8.0
Shear strength of bonding (MPa)	40.0
Normal damping coefficient (N·s/m)	3500
Shear damping coefficient (N·s/m)	2500
w_0 (μm)	0.4
F_0 (kN)	20
Friction coefficient between particles	0.8
Friction coefficient between particle and wall	0.0

Fig.7 Packing method.

あくまでおおよそその値を一致させるよう入力パラメーターを設定し、数値シミュレーションと実験結果を完全に一致させるような精密なキャリブレーションは行っていない。

岩石モデルの生成には Fig. 7 のように長方形の四つの辺のうち三つを固定し、残りの一つに圧力を加えピストンを押し込むようにしてパッキングする方法を用いた。モデルの縦横比は室内実験で多く採用される 1:2 程度の比率とし、モデルのサイズも室内実験で用いられるものと近い長さ 80 mm、幅 40 mm 程度に設定した。粒子の平均半径は顕微鏡観察に基づき $400 \mu\text{m}$ に設定し、粒子の密度は真密度の計測に基づき 2500 kg/m^3 に設定した。

法線方向ばね定数と接線方向ばね定数は、実験結果で計測された応力ひずみ線図と数値シミュレーションによって得られた応力ひずみ線図が近くなるように試行を繰り返し設定した。法線方向減衰定数と接線方向減衰定数は臨界減衰定数¹⁰⁾よりも小さくなるように設定した。また引張強度及び、せん断強度、摩擦係数は実験と数値シミュレーションのピーク強度に近い値になるように試行を繰り返し設定した。

空隙ネットワークに基づく浸透率に関係したパラメーターである w_0 と F_0 は実験結果の固有浸透率と近くなるよう試行を繰り返し設定した。

Fig.8 Transition of stress.

Fig.9 Stress strain relation.

EMA に基づく浸透率に関わるパラメーターである空隙率や空隙の輪郭長、空隙の面積は粒子配置や粒子の半径などと関係するため独立にキャリブレーションすることが困難であった。また数値モデルでは膠結物質の影響なども考慮されていないため無理に値を近づけることはせず、EMA の結果については定性的な検討にのみ用いることとした。

3. 数値計算の結果と考察

3・1 二軸圧縮応力下における破壊過程数値

シミュレーションは時間刻み $1.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ で 1×10^7 ステップ程度までの計算を行なった。設定封圧は先に述べたように 5.0 MPa と 10.0 MPa とした。Fig. 8 に応力の推移を示す。結果から封圧はおおよそ設定値に制御されていた。 σ_{xy} の絶対値は σ_{xx} , σ_{yy} の絶対値よりも二桁程度小さい値であった。また差応力がピークに達するのは軸ひずみが 0.45% から 0.6% 程度の段階であり、差応力ピーク値は封圧 5.0 MPa で 25MPa 程度、封圧 10.0 MPa で 40 MPa 程度であった。Fig. 9 にシミュレーションによって得られた差応力・ひずみ線図を示す。Fig. 9 中の Area strain は面積ひずみであり、これは軸ひずみと横ひずみの和に等しい。2 次元解析では面積ひずみがダイレイタンスの指標となると考えられる。

Fig. 9 を見ると応力ひずみ差応力がピークに近づくにつれて、ひずみが非線形に変化し、ピーク強度付近からダイレイタンス挙動を示していた。また残留強度状態では等体積変形に近い挙動を示した。

差応力が低い段階での応力とひずみの直線的な関係や、差応力がピークに近い段階での非線形な応力・ひずみ関係とダイレイタンス挙動は室内実験において見られる岩石の応力・ひずみ関係と定性的に一致している。また入力パラメーターを適切に設定することでヤング率やピーク強度を実験結果に近い値に設定することが13できた。このことから数値シミュレーションによって、現実の岩石の挙動をある程度再現できていたと考えられる。

3・2 弾性定数テンソル

Fig. 10 (a), Fig. 10 (c) に有限要素法を用いた方法によって得られた弾性定数テンソル D^{fem} の値を示す。全体を通して D^{fem}_{xxxx} , D^{fem}_{yyyy} については他の成分よりも2オーダー程度小さい値であり、これらの成分の影響は小さいと考えられる。 D^{fem}_{xxxx} , D^{fem}_{xyxy} , D^{fem}_{yyxy} , D^{fem}_{xyxy} の値は軸ひずみ0.2%程度までの差応力が低い段階ではあまり変化していないが、ピーク強度後は減少するという結果が見られた。特に D^{fem}_{xxxx} の値がピーク強度に近づくにつれて著しく減少し、 D^{fem}_{xxxx} と D^{fem}_{yyxy} の値はシミュレーション開始時にはおおよそ同じ値であるが、軸ひずみ2.0%時では D^{fem}_{xxxx} の値は D^{fem}_{yyxy} の半分程度まで減少し、異方性が生じる結果となった。また残留強度状態では弾性テンソルの各成分の値はほぼ一定値に収束した。封圧5.0 MPaと封圧10.0 MPaでの結果は、ピーク強度に達する軸ひずみが異なるため、変化開始の段階や、収束する段階は異なるものの、シミュレーション開始時での値と残留強度状態での値は、封圧5.0 MPaと封圧10.0 MPaとでほぼおおよそ同じ程度の値となった。

Fig. 10 (b), Fig. 10 (d) に一樣な変形を仮定した方法により得られた弾性定数テンソル D^{affine} の値を示す。 D^{affine} の値は D^{fem} に比べて変化は小さかったが、 D^{fem}_{xxxx} と D^{fem}_{yyxy} の値については同様に異方性が生じる結果となった。有限要素法による結果と同じく、シミュレーション開始時での値と残留強度状態での値は、封圧5.0 MPaと封圧10.0 MPaとでほぼおおよそ同じ程度の値となった。

Fig. 11 に封圧5.0 MPa条件における D^{affine} と D^{fem} の差を正規化した値を示す。図中の ΔD_{ijkl} は $(D^{affine}_{ijkl} - D^{fem}_{ijkl}) / D^{fem}_{ijkl}$ を表す。先に述べたように D^{fem}_{xxxx} , D^{fem}_{yyxy} は他の成分よりも2オーダー程度小さい値であり、これらの成分の影響は小さいと考えられるためここでは無視した。 ΔD は線形弾性領域ではあまり変化しないが、ピーク差応力が近づくにつれて ΔD_{xxxx} と ΔD_{xyxy} が大きくなった。このことから、破壊の進行によって内部変位が起こりやすい構造へと変化したことが考えられる。また ΔD の値は差応力が低い段階では0.2以下と小さく、 D^{affine} をおおよそその弾性定

Fig.10 Estimated D^{fem} and D^{affine} for the confining pressures of 5.0 MPa and 10.0 MPa.

Fig.11 Normalized difference of D^{fem} and D^{affine} .

数テンソルを評価するために用いることは可能だと考えられる。

3・3 弾性ひずみと非弾性ひずみ

数値シミュレーションによって計測した結果から、弾性ひずみと非弾性ひずみの割合を見ることができると考えられる。Chaboche (2008)²²⁾ によるとひずみには弾性ひずみ e^{el} と非弾性ひずみ e^{inel} が含まれており

$$e_{ij} = e_{ij}^{el} + e_{ij}^{inel} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と表される。またフックの法則から弾性ひずみは弾性コンプライアンステンソル E を用いて

$$e_{ij}^{el} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 E_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \dots\dots\dots (27)$$

と表せる。非弾性ひずみは全ひずみと弾性ひずみの差

$$e_{ij}^{\text{inel}} = e_{ij} - \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 E_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。弾性コンプライアンステンソルは先に述べた有限要素法によって計測した弾性定数テンソルから求めた。Fig. 12 に全ひずみ、弾性ひずみ、非弾性ひずみと差応力の関係を示す。ただし、このグラフでは実験開始時のひずみを 0 として比較するために、ひずみへの封圧による静水圧影響分が除かれている。軸ひずみを見るとピーク差応力までの段階では弾性ひずみの割合が比較的大きかった。またピーク強度以降では応力解放によって弾性ひずみは減少するが、軸ひずみは境界の制御によって一定速度で増え続けるため、非弾性ひずみの影響が大きくなっている。横ひずみはピーク強度以降に急激に増加しており、この影響によって Fig. 9 のように、面積ひずみはピーク強度後膨張に転じている。ピーク強度後の横ひずみの増加は大部分が非弾性ひずみによるものである。

3・4 浸透性

Fig. 13 に EMA によって評価した二軸圧縮破壊過程における浸透率の変化を示す。このグラフの縦軸は EMA によって評価した固有浸透率を封圧 5.0 MPa 条件での初回評価値で割った値を表す。これを見ると、浸透率は差応力が低い段階で若干低下し、ピーク強度付近から増加に転じ封圧 5.0 MPa 条件では軸ひずみ 2.0 % 時で 1.4 倍程度まで増加している。封圧 10.0 MPa の場合には封圧 5.0 MPa の場合と比較して浸透率が低い結果が見られた。Takada et al. (2010)⁹⁾ の実験結果においても、差応力が低い段階での浸透率低下と、ピーク強度付近からの浸透率増加が見られており浸透率変化の傾向は定性的な一致が見られた。また封圧の影響についても定性的な一致が見られた。

Fig. 14 に空隙ネットワークから評価した浸透率を示す。封圧 5.0 MPa、10.0 MPa とともに x 軸方向よりも y 軸方向の浸透率が大きく、異方性が生じる結果となった。封圧 5.0 MPa 条件の y 軸方向浸透率は差応力が低い段階で若干減少し、ピーク強度付近から増加が見られ、大きいところでは 1 オーダーほど浸透率が大きくなる結果が見られた。またピーク強度後は、浸透率が一時的に減少する部分もあった。封圧 5.0 MPa 条件の x 軸方向浸透率はピーク強度付近までは減少し、その後は若干の増加傾向が見られた。封圧 10.0 MPa 条件の y 軸方向浸透率は 5.0 MPa の場合よりも小さく、ピーク強度付近においても大きな変化は見られなかったが、残留強度状態では一時的に浸透率が増加する部分が見られた。封圧 10.0 MPa 条件の x 軸方向浸透率は差応力が低い段階で若干減少し、その後の変化は比較的小さかった。

Takada et al. (2010)⁹⁾ の実験では x 軸方向にあたる载荷軸直交方向の浸透率は計測されていないため、y 軸方向についてのみ比較であるが、差応力が低い段階において浸透率が若干減少したことや、封圧が比較的低い場合には破壊によって浸透率が大きく増加したこと、封圧が高い場合には浸透率増加が抑えら

Fig.12 Elastic strain and inelastic strain.

Fig.13 Permeability estimated using EMA.

Fig.14 Permeability estimated from the flow network of voids.

れたことについては実験結果との定性的な一致と考えられる。

3・5 堆積岩の圧縮破壊過程における変形特性と浸透性に関する考察

数値シミュレーションにおいて、破壊過程の変形特性の変化を示す結果として、弾性定数テンソルの変化と異方性の発生が見られた。弾性定数テンソルの変化は主に、非弾性ひずみが大きく増加するピーク強度付近で生じており、岩石モデルを構成する粒子の配置の変化などの構造の変化に伴って生じたことが予想される。Thornton(1986)¹⁹⁾、Bruno (1994)¹³⁾によると差応力を加える変形によって、粒子の接触方向に異方性が生じ接触数は最大主応力方向に多く分布するようになったとされており、弾性定数の異方性はこうした構造の変化によって生じたことが考えられる。

破壊過程における構造の変化は、浸透率の変化とも密接に関係していることが予想される。数値シミュレーションの結果、空隙ネットワークによって評価した浸透率は最小主応力方向では比較的变化が小さかったが、最大主応力方向において増加が見られ、異方性が生じる結果が見られた。先に述べたように、差応力を加えることによって粒子の接触方向は最大主応力方向において増加するため、接触の総数が大きく変わらなければ、逆に最大主応力方向に直交する最小主応力方向では接触が減少すると考えられる。空隙ネットワークによる評価における流路は、粒子同士の接触の方向に直交するため、最小主応力方向の接触の減少によって、最大主応力方向の流路が発達し、これによって浸透率の増加が生じたことが考えられる。また非弾性ひずみの増加が著しくなるピーク強度付近からは、最小主応力方向への膨張が生じたため、これによって最大主応力方向に平行な方向に空隙が発達し、浸透率の増加に寄与したことが考えられる。室内実験においては、載荷方向の浸透率のみが計測されることが多いが、浸透率に異方性が生じる場合には、一方向のみの評価では浸透率を正確に把握することはできないため、複数の方向について計測することが望ましいことが予想される。

EMA による評価では差応力が低い段階で浸透率は若干減少し、ピーク強度後は増加する傾向が見られ、封圧が高い場合には浸透率は小さくなる結果が見られた。先に述べたように EMA による評価は空隙の形状に基づいており、空隙ネットワークによる評価とは異なり、二次元モデルの面と直交する方向の浸透率を評価していると考えられる。封圧 5.0 MPa における浸透率の増加は、破壊時の非弾性的な膨張挙動に伴う、個々の空隙の大きさの増加や空隙率増加などによって生じ、封圧 10.0 MPa の場合には、封圧の増加によって膨張が抑えられ空隙の大きさがあまり変化しなかったことなどが要因として考えられる。

4. ま と め

本研究では個別要素法による数値シミュレーションによって圧縮破壊過程における堆積岩の変形挙動と、浸透性について調査した。本研究により得られた結果をまとめると以下のようになる。

- (1) 封圧一定、載荷速度一定の数値シミュレーションを行い、Takada et al. (2010)⁹⁾の実験における応力・ひずみ関係に近い、変形挙動を得ることができた。粒子間の相互作用には線形な関係を用いたが、数値計算の結果、差応力の増加に伴い、非線形な応力・ひずみ関係とダイレイタンス挙動が見られた。

- (2) 有限要素法を用いた方法と、一様変形を仮定した方法により圧縮破壊過程のシミュレーションにおける弾性定数テンソルの計測を行なった。有限要素法を用いて評価した弾性定数テンソルは差応力が低い段階では変化が小さかったが、差応力がピークに近付くにつれ徐々に変化が見られた。残留強度状態までに D_{xxxx}^{fem} 成分が D_{yyyy}^{fem} の半分程度まで減少し、異方性が生じる結果が見られた。

一様変形を仮定した方法により評価した弾性定数テンソルは、有限要素法により評価した値よりも変化が小さかったが、同様に破壊の進行に伴い異方性が生じた。また差応力が低い段階における正規化された弾性定数の差は 0.2 以下であり、 D^{affine} をおおよその弾性定数テンソルを見積もるために用いることは可能であると考えられる。異方性を伴う弾性定数テンソルの変化は、破壊の進行による、岩石モデルを構成する粒子の構造の変化によって生じたと考えられる。

- (3) 弾性定数テンソルから弾性コンプライアンステンソルを計算し、弾性ひずみと非弾性ひずみの比率を求めた。ピーク強度までの段階では、軸ひずみに占める弾性ひずみの割合が比較的大きかったが、ピーク強度後は非弾性ひずみの影響が大きくなった。

またピーク強度後に横方向の非弾性ひずみが急激に増加した。

- (4) EMA を用いた方法と、空隙ネットワークを利用した方法によって圧縮破壊過程における浸透率を評価した。差応力が低い段階での浸透率の減少や、ピーク強度付近からの浸透率の増加、封圧の増加によって浸透率増加が抑えられる傾向など Takada et al.(2010)⁹⁾の実験と定性的に一致する傾向が見られた。空隙ネットワークにより評価した浸透率は、異方性を示す結果が見られ、最大主応力方向では増加し、これに直交する方向では比較的变化は小さかった。最大主応力方向における浸透率の増加は、差応力による岩石モデルの構造の変化に伴う最大主応力方向の流路の発達によると考えられる。

References

- 1) Brace, W. F., Walsh, J. B. and Frangos, W. T.: J. Geophys. Res., **73** (1968), 2225-2236.
- 2) Zoback, M. D. and Byerlee, J. D.: J. Geophys. Res., **80** (1975), 752-755.
- 3) Kiyama, T., Kita, H., Ishijima, Y., Yanagidani, T., Aoki, K. and Sato, T.: Rock mechanics and tools and techniques: NARMS'96, (Balkema, Rotterdam, 1996), pp.1643-1650.
- 4) Oda, M., Takemura, T. and Aoki, T.: Mechanics of Materials, **34** (2002), 313-331.
- 5) Patterson, M.S.: *Jikken Gansetsu Rikigaku* (Kokonsyoin, Tokyo, 1986).
- 6) Takahashi, M., XuE, Z. and Koide, H.: Bull. Geol. Surv. Japan, **42** (1991), 305-331.
- 7) Main, I. G., Kwon, O., Ngwenya, B. T. and Elphick, S. C.: Geology, **28** (2000), 1131-1134.
- 8) Ngwenya, B. T., Kwon, O., Elphick, S. C. and Main, I. G.: J. Geophys. Res., **108** (2003), 2343.
- 9) Takada, M., Fujii, Y. and Kodama, J.: Journal of MMIJ, **127** (2010), 151-157.
- 10) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: Geotechnique, **29** (1979), 47-65.
- 11) Min, K. B., Rutqvist, J., Tsang, C. F. and Jing, L.: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **41** (2004), 1191-1210.
- 12) Baghbanan, A., Jing, L.: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **45** (2008), 1320-1334.
- 13) Bruno, M. S.: Mechanics of Materials, **18** (1994), 31-48.
- 14) Shimizu, H., Murata, S. and Ishida, T.: Journal of MMIJ, **126** (2010), 124-130.
- 15) Hisada, T.: *Tensor Kaiseki no Kiso*, (Maruzen Kabushikigaisya, Tokyo, 1992).
- 16) Kirkpatrick, S.: Rev. Mod. Phys., **45** (1973), 574-588.
- 17) Lock, P. A., Jing, X., Zimmerman, R.W. and Schluter, E. M.: J. Appl. Phys., **92** (2002), 6311-6319.
- 18) Okabe, H. and Blunt, M. J.: Phys. Rev. E, **70** (2004), 066135-1-10.
- 19) Thornton, C. and Barnes, D.: Acta Mechanica, **64** (1986), 45-61.
- 20) Christoffersen, J., Mehrabadi, M. M. and Nemat-Nasser, S.: Journal of Applied Mechanics, **48** (1981), 339-344.
- 21) Ray, J. R.: Computational Physics reports, **8** (1988), 109-151.
- 22) Chaboche, J. L.: International Journal of Plasticity, **24** (2008), 1642-1693.