ドリフトフラックスモデルによる 大口径管エアリフトシミュレーターにおける構成方程式*

島 山 信 夫¹ 清 水 賀 之² 益 山 忠³

Constitutive Equations for a Simulator of Airlift Pump in a Large Diameter Pipe using Drift-Flux Model

by Nobuo HATAKEYAMA^a, Yoshiyuki SHIMIZU^b and Tadashi MASUYAMA^c

- a. Ex-prof., Ichinoseki National College of Technology
(Corresponding author, E-mail: hatake@my.email.ne.jp)
b. Prof., School of Marine Science and Technology, Tokai University
c. Ex-prof., School of Marine Science and Technology, Tokai University

One of the authors has developed a numerical simulator of airlift pump to solve governing equations represented by the drift flux model. The solver is based on the finite volume method which is known as SIMPLER algorithm for numerical scheme. The calculated results using the simulator were comparatively in good agreement with experimental ones by Weber et al. and Saito et al., despite lack of appropriate correlations used in the constitutive equations.

In this study, the simulator is improved by a recent study (Ishii and Hibiki, 2011) on the constitutive equations of the drift flux model in the gas-liquid two-phase flow. The effect of newly incorporated correlations versus original ones in the constitutive equations is studied on the lifting characteristics such as relation between inputting air and lifted water. Also, flow characteristics along axial direction of pipes are examined to compare numerical results with experimental ones over wide range of pipe diameter and pipe length. Furthermore, pressure losses are grasped from the standpoint of the pump head, the relation between various pressure losses and lifting characteristics is discussed.

KEY WORDS: Large Diameter Pipe, Airlift Pump, Drift-Flux Model, Constitutive Equation, Numerical Simulation, Gas-Liquid Two Phase Flow

1. は じ め に

新たな海洋基本計画が平成 25 年 4 月に閣議決定され、「海洋エネルギー・鉱物資源開発計画」が改定された¹⁾。鉱物資源開発については海底熱水鉱床、コバルトリッチクラフト、マンガン団塊ならびにレアアース堆積物の採鉱・揚鉱技術を確立するとされている。

さて、著者らの 1 人は、既に、マンガン団塊などの深海底鉱物資源をエアリフトポンプによって揚鉱するために、一次元ドリフトフラックスモデルによる基礎方程式^{2, 3)}を SIMPLER 法⁴⁾によって数値計算するシミュレーターを開発している⁵⁻⁷⁾。シミュレーターの検証を Weber ら⁸⁾ および斎藤ら⁹⁾ による比較的大口径管を用いたエアリフトポンプ実験結果と比較することによって行い、比較的良好な結果を得ている⁵⁻⁷⁾。その際、数値計算における格子分割数および非定常計算における時間刻みの影響についても検討している。これらのことを踏まえ、深海底鉱物揚鉱用エアリフトポンプを設計および運転するための基礎資料を提供するため、5,000m 級エアリフトポンプについてシミュレーションを行い、揚水・揚鉱特性に及ぼす構成方程式の相関式に関わる係数

等の影響について検討¹⁰⁾ し、さらに拡大揚鉱管・背圧装置を用いた流動特性¹¹⁾、送気および揚鉱開始・停止特性等^{12, 13)} について検討した。

なお、シミュレーターを開発した時点では、大口径管に対するドリフトフラックスモデルの構成方程式に関わる相関式は整理されていなかったが、近年、Ishii²⁾、Kataoka ら¹⁴⁾ ならびに Hibiki ら^{15, 16)} の研究結果を踏まえて、Ishii-Hibiki によって著書¹⁷⁾ にまとめられている。特に大口径管においては、スラグ気泡は界面の不安定性によって持続せず、球冠状気泡 (cap bubble) に崩壊することが指摘されており、それに対するドリフト速度の相関式が提示されている。

本研究は、先に著者らが開発したエアリフトシミュレーターにドリフトフラックスモデルの構成方程式に関わる近年の研究結果を取り込むと共に、以前に用いた相関式と対比しながら、それらが揚水特性 (送気量に対する揚水量との関係) に及ぼす影響について検討したものである。また、管径および管長の広い範囲の既往の実験結果^{8, 9, 18-20)} と数値計算結果とを比較すると共に、数値計算によって得られた流動方向の分布等について詳細に検討した。さらにポンプの揚程という観点から圧力損失を捉え、諸損失の比率および揚水特性との関わりについて考察した。

2. 支配方程式および数値解法

2・1 基礎方程式

エアリフト管内の流動状態は、等温であり、かつ相変化がないと仮定する。混合体モデルの一つであるドリフトフラックスモデ

*2017 年 9 月 21 日受付。2017 年 12 月 1 日受理

1. 正会員 元一関工業高等専門学校 教授

2. 正会員 東海大学教授 海洋学部

3. 正会員 元東海大学 海洋学部 教授

【著者連絡先】E-mail: hatake@my.email.ne.jp

キーワード: 大口径管, エアリフトポンプ, ドリフトフラックスモデル, 構成方程式, 数値シミュレーション, 気液二相流

ル^{2, 17)}に基づく質量および運動量保存式は、次のように表される。

混合体の質量保存式：

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_M V_M) = 0 \quad (1)$$

混合体の運動量保存式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_M V_M) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_M V_M^2) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{4\tau_w}{D} - \rho_M g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_G \rho_G \rho_L}{f_L \rho_M} V_{Gj}^{*2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

気相の質量保存式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_G \rho_G) + \frac{\partial}{\partial z}(f_G \rho_G V_M) = (\Gamma_G)_{ai} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_G \rho_G \rho_L}{\rho_M} V_{Gj}^* \right) \quad (3)$$

ここに、 $(\Gamma_G)_{ai}$ は単位体積当たりの送気質量流量であり、混合体の平均密度 ρ_M 、質量中心速度 V_M および気相の平均ドリフト速度 V_{Gj}^* は、それぞれ次式によって定義される。

$$\rho_M = f_G \rho_G + f_L \rho_L \quad (4)$$

$$f_G + f_L = 1 \quad (5)$$

$$V_M = (\rho_G J_G + \rho_L J_L) / \rho_M \quad (6)$$

$$V_{Gj}^* = V_G - J_M \quad (7)$$

また、混合体の体積流束 J_M は次式によって表される。

$$J_M = J_G + J_L \quad (8)$$

なお、気相の平均速度 V_G は、分布パラメータを C_{G0} 、気体体積率加重断面平均ドリフト速度を V_{Gj} とすれば、次式によって表される。

$$V_G = C_{G0} J_M + V_{Gj} \quad (9)$$

したがって、式(9)を式(7)に代入すれば、気相の平均ドリフト速度 V_{Gj}^* は、次式によって表される。

$$V_{Gj}^* = (C_{G0} - 1) J_M + V_{Gj} \quad (10)$$

さて、密度は状態方程式によって与えられる。それゆえ、壁面せん断応力 τ_w および気相の平均ドリフト速度 V_{Gj}^* を構成方程式とすれば、基礎方程式(1)ないし(3)は、 f_G 、 V_M および P を未知数とする連立非線形方程式とみなされる。なお、 τ_w ならびに V_{Gj}^* に関わる C_{G0} および V_{Gj} に対して相関式として与える必要がある。

2・2 構成方程式に対する相関式

2・2・1 平均ドリフト速度に関する相関式 大口径管における分布パラメータおよび気体体積率加重断面平均ドリフト速度の相関式がKataokaら¹⁴⁾およびHibikiら^{15, 16)}によって提示されており、Ishii-Hibikiによる著書¹⁷⁾にまとめられている。大口径管の判定は、無次元管径 N_D を用いて、次式によって行われる。

$$N_D \geq 30 ; \text{大口径管} \quad (11a)$$

$$N_D < 30 ; \text{小口径管} \quad (11b)$$

なお、無次元管径 N_D は次式によって表される。

$$N_D = D/l_C \quad (12)$$

ここに、 l_C は、物性値によって一義的に決まる特性長さであり、次式によって表される²¹⁾。

$$l_C = \sqrt{\sigma/(g\Delta\rho)} \quad (13)$$

$$\Delta\rho = \rho_L - \rho_G \quad (14)$$

さて、気体体積率加重断面平均ドリフト速度 V_{Gj} は、無次元化した次式によって表示される。

$$V_{Gj}^+ = V_{Gj} / V_{KU} \quad (15)$$

ここに、 V_{KU} は特性速度であり、次式によって表される²¹⁾。

$$V_{KU} = \left(\frac{\sigma g \Delta\rho}{\rho_L^2} \right)^{1/4} \quad (16)$$

式(16)は、特性長さ l_C を用いれば、次式のように変形することができる。

$$V_{KU} = \sqrt{g l_C \Delta\rho / \rho_L} \quad (17)$$

ここで、本研究で採用した分布パラメータ C_{G0} および無次元化した気体体積率加重断面平均ドリフト速度 V_{Gj}^+ を流動様式ごとに示す。ただし、流動様式の区分は大局的に行い²²⁾、気泡流、間欠流（球冠状気泡流・スラグ流・団塊波流を含む）および環状流の3つとした。

気泡流に対して^{2, 15, 17, 21)}：

$$C_{G0,B} = (1.2 - 0.2\sqrt{\rho_G/\rho_L}) \{1 - \exp(-18f_G)\} \quad (18)$$

$$V_{Gj,B}^+ = 1.41(1 - f_G)^{1.75} \quad (19)$$

間欠流に対して^{2, 14, 16, 17, 21)}：

$$C_{G0,I} = 1.2 - 0.2\sqrt{\rho_G/\rho_L} \quad (20)$$

$N_{\mu L} \leq 2.25 \times 10^{-3}$ の場合；

$$V_{Gj,I}^+ = 0.0019 N_D^{0.809} (\rho_G/\rho_L)^{-0.157} N_{\mu L}^{-0.562}, N_D \leq 30 \quad (21a)$$

$$V_{Gj,I}^+ = 0.030 (\rho_G/\rho_L)^{-0.157} N_{\mu L}^{-0.562}, N_D \geq 30 \quad (21b)$$

$N_{\mu L} > 2.25 \times 10^{-3}$ の場合；

$$V_{Gj,I}^+ = 0.92 (\rho_G/\rho_L)^{-0.157} \quad (21c)$$

ここに、 $N_{\mu L}$ は液相の無次元粘度であり、次式によって表される。

$$N_{\mu L} = \frac{\mu_L}{\{\rho_L \sigma \sqrt{\sigma/(g\Delta\rho)}\}^{1/2}} \quad (22)$$

なお、式(22)は特性長さ l_C を用いれば、次式のように簡潔に表され、 l_C を代表長さとするOhnesorge数と一致する。

$$N_{\mu L} = \frac{\mu_L}{\sqrt{\rho_L \sigma l_C}} \quad (22)'$$

環状流に対して^{2, 16, 17, 21)}：

$$C_{G0,A} = 1 + C_A \quad (23)$$

$$V_{Gj,A}^+ = \frac{C_A}{V_{KU}} \sqrt{\frac{g D \Delta\rho (1 - f_G)}{0.015 \rho_L}} \quad (24)$$

ここに、 C_A は次式によって表される。

$$C_A = \frac{1 - f_G}{f_G + \sqrt{\{1 + 75(1 - f_G)\} \rho_G / (\sqrt{f_G} \rho_L)}} \quad (25)$$

なお、式(24)は無次元管径 N_D を用いれば、次式のように簡潔に

Fig.1 Weighted factors of interpolation for flow regime transitions.

表される。

$$V_{Gj,A}^+ = C_A \sqrt{\frac{(1-f_G)N_D}{0.015}} \quad (24)$$

ところで、流動様式の変化は徐々に起こるため、流動様式間に遷移領域を設け、その領域において遷移に関わる相間式に重み係数を掛けて補間したが、Fig. 1 に示すように、遷移領域は簡便さを考慮し気体体積率のみによって決定されるものとした。各流動様式に対する重み係数をそれぞれ w_{fB} 、 w_{fI} および w_{fA} とすれば (付録 A 参照)、分布パラメータ C_{G0} および無次元化した気体体積率加重断面平均ドリフト速度 V_{Gj}^+ は次式によって与えられる。

$$C_{G0} = w_{fB} \cdot C_{G0,B} + w_{fI} \cdot C_{G0,I} + w_{fA} \cdot C_{G0,A} \quad (26a)$$

$$V_{Gj}^+ = w_{fB} \cdot V_{Gj,B}^+ + w_{fI} \cdot V_{Gj,I}^+ + w_{fA} \cdot V_{Gj,A}^+ \quad (26b)$$

2・2・2 壁面せん断応力に関する相関式 壁面せん断応力 τ_w は、Lockhart-Martinelli 法 (以後 L-M 法と略記) に対する Chisholm-Laird の相関式によって与えた²³⁾。

$$\frac{4\tau_w}{D} = \frac{\Delta P_{L0}}{\Delta z} + \frac{\Delta P_{G0}}{\Delta z} + A \sqrt{\frac{\Delta P_{L0}}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta P_{G0}}{\Delta z}} \quad (27a)$$

$$A = 83 N_D^{-0.37} \quad (27b)$$

ここに、

$$\frac{\Delta P_{k0}}{\Delta z} = \lambda_k \frac{1}{D} \frac{\rho_k J_k^2}{2}, \quad (k=G, L) \quad (28)$$

であり、管摩擦係数 λ は、次式で示される揚鉦管の内壁粗さ ε を考慮したコールブルック (Colebrook) の式で与えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re_k \sqrt{\lambda_k}} \right), \quad (k=G, L) \quad (29)$$

$$Re_k = \frac{\rho_k D J_k}{\mu_k}, \quad (k=G, L) \quad (30)$$

なお、式 (27b) は付録 B に示したとおり、本研究において再評価したものである。

2・3 境界に関わる圧力損失

小規模なエアリフトポンプほど、出入口損失ならびに助走損失が顕在化すると考えられる。それらの損失は、Fig. 2 に示すように、それぞれの境界において考慮するものとすれば、次式のように表される¹⁸⁾。

$$\Delta P_{in} = P_{in} - P'_{in} = (\zeta_{in} + \xi_{in}) \frac{\rho_L J_L^2}{2} \quad (31)$$

$$\Delta P_{ai} = P_{ai} - P''_{ai} = \zeta_{ai} \frac{\rho_L J_L^2}{2} \left\{ \frac{\rho_M}{(1-f_{G,ai})^2} - \rho_L \right\} + \xi_{ai} \frac{\rho_M J_M^2}{2} \quad (32)$$

Fig.2 Schematic diagram of static pressure distribution in an airlift pipe.

$$\Delta P_{out} = P_{out} - P_{at} = \zeta_{out} \frac{\rho_M J_M^2}{2} \quad (33)$$

ここに、 ζ は出入口形状損失係数、 ξ は助走損失係数である。したがって、エアリフト管吸込口における圧力 P'_{in} は次式によって与えられる。

$$P'_{in} = \rho_L g (L_S + L_U) - \Delta P_{in} + P_{at} \quad (34)$$

2・4 数値解法の概要

数値解法は、既報⁵⁻⁷⁾と同様であるが、概要を記せば次のとおりである。基礎方程式を有限体積法によって離散化し、完全陰解法および上流法を適用した。その際、スタガード格子を用い、運動量保存式の解法には SIMPLER 法⁴⁾を採用した。このようにして導出された離散方程式の係数行列は三重対角行列となっており、TDMA (三重対角行列アルゴリズム) を用いた逐次解法によって効率よく計算することができる。ただし、離散方程式は非線形であるため緩和係数を用いて計算を遂行した。なお、定常解は時間発展的に求められる。

3. 数値計算結果ならびに考察

エアリフト管長が短いエアリフトポンプにおいては助走域の距離が相対的に長くなると考えられる。その場合を考慮し、助走域における分布パラメータ C_{G0} および無次元気体体積率加重断面平均ドリフト速度 V_{Gj}^+ に対する相関式^{16, 17)} (付録 C 参照) についても検討することとした。また、既報^{6, 7, 11-13)}において用いたドリフト速度に関する相関式 (付録 D 参照) についても比較検討することとした。一方、壁面せん断応力 τ_w に対する相関式として赤川²⁴⁾ならびに勝原²⁵⁾による式 (付録 E 参照) も用いられている^{5, 26, 27)}ことから、それらについても比較検討することとした。これら相関式の組み合わせを Table 1 に示したが、それぞれの意味するところは次のとおりである。

Corre.1: 2・2 節において示した相関式を表す。

Corre.2: 助走域に対する相関式を表す。

Corre.3: 既報^{6, 7, 11-13)}において用いた相関式を表す。

Corre.4: C_{G0} および V_{Gj}^+ の相関式は Corre.1 と同じであるが、 τ_w の相関式が赤川²⁴⁾によるものを表す。

また、数値計算結果と比較の対象とした実験装置の諸元を Table 2 に示した。なお、数値計算における流動様式の遷移領域に関するパラメータ (Fig. 1 参照) および圧力損失係数の基本条件は以下のとおりである。

Table 1 Correlations for constitutive equations of drift-flux model.

Correlation No.	Correlations		
	C_{G0}	V_{G0}^*	τ_w
Corr.1	Eqs.(18),(20),(23)	Eqs.(19),(21),(24)	Eq.(27)
Corr.2	Eqs.(C-1),(C-6),(23)	Eqs.(C-9),(24)	
Corr.3	Eq.(D-1)	Eqs.(D-2),(D-3)	
Corr.4	Eqs.(18),(20),(23)	Eqs.(19),(21),(24)	Eq.(E-1)

Table 2 Experimental conditions reported by other workers.

Data No.	Worker	Dimensions of Airlift Pipe					
		D [m]	L_0 [m]	L_S [m]	L_U [m]	L_L/D [-]	β [-]
Y1	Yoshinaga <i>et al.</i> ¹⁸⁾	0.040	2.02	4.72	1.12	169	0.743
U1	Usami <i>et al.</i> ¹⁹⁾²⁰⁾	0.0757	3.49	8.15	0.84	154	0.720
U2		0.155	5.76	26.87	4.96	211	0.847
S1	Saito <i>et al.</i> ⁹⁾	0.151	12.6	184	16	1302	0.941
S2				130	70	944	
S3				100	100	746	
S4				71	129	554	
W1	Weber <i>et al.</i> ⁸⁾	0.3	8	125	5	443	0.942
W2				102	341	367	0.982

$$L_L = L_0 + L_S, \quad L_T = L_0 + L_S + L_U, \quad \beta = (L_S + L_U)/L_T$$

Fig.3 Comparison of calculative results with experimental data of U1.

Fig.4 Comparison of calculative result with experimental data of Y1 and U2.

Fig.5 Comparison of calculative result with experimental data of S1 and S4.

Fig.6 Comparison of calculative result with experimental data of S2 and W1.

- ・気泡流と間欠流との遷移 $f_{G1}=0.2, f_{G2}=0.3$
- ・間欠流と環状流との遷移 $f_{G3}=0.7, f_{G4}=0.8$
- ・入口形状損失係数 $\zeta_{in} + \xi_{in} = 1.56$
- ・空気注入損失係数 $\zeta_{ai} = 1.0, \xi_{ai} = 0.5$
- ・出口形状損失係数 $\zeta_{out} = 0$

実験結果と本数値計算結果との比較を大気圧換算送気流束 J_{Gat} と揚水流束 J_L との関係として示せば、Figs.3～7のとおりである。図中の記号英数字は Table 2 に示した Data No. ならびに実験者と対応する。大局的には、揚水特性に及ぼすドリフト速度に関する相関式 (Corr.1 ないし Corr.3) の影響は、さほどみられないと言うことができる。一方、壁面せん断応力の相関式に関しては、赤川らによる相関式 (Corr.4) を用いた場合、実験範囲以内では実験値との一致がみられるが、大口径管において送気流束が大きくなるに従って実験値より小さくなる傾向がみられる。

Fig.7 Comparison of calculative result with experimental data of S3 and W2.

Fig.8 Effect of pressure loss coefficient on static pressure distribution in case of U1.

Fig.9 Effect of wall shear stress correlation on static pressure distribution in case of S1.

エアリフトポンプの性能について詳細に議論するためには、気体体積率および壁面せん断応力の流動方向分布についても把握する必要がある。次に相関式の違いがそれらに及ぼす影響について検討する。

3・1 境界に関わる圧力損失および圧力分布の検討

Fig. 3は、U1の実験結果¹⁹⁾と計算結果とを比較したものであるが、基本条件として示した出口形状損失係数 ζ_{out} の値(赤の実線)では送気流束が大きくなれば、計算結果との相違が大きくなる傾向がみられる。この実験装置のエアリフト管出口にはフレキシブルホースが付けられて逆U字状に曲げられていることから、Fig. 8に示される圧力分布の測定結果²⁸⁾(ゲージ圧)のとおり、出口における圧力が大気圧より高くなっている。出口形状損失係数の影響について検討し、その計算結果がFig. 3およびFig. 8に示されている。両図から判断すれば、 $\zeta_{out}=1.0$ の場合が計算結果と実験結果とはよく一致していると言える。一方、空気注入による損失について注目すれば、エアリフト管長が短いことから、Fig. 8に示されているように比較的大きくなっている。なお、 β についてはTable 2に示しているとおりである。

Fig. 9は、S1の実験装置における圧力分布の測定結果²⁹⁾と計算結果とを示したものである。送気流束が大きくなれば、壁面せん断応力の相関式の影響は多少みられるものの、この場合にはエアリフト管長が長いことから、空気注入による圧力損失は相対的にかなり小さくなっていることが分かる。

3・2 損失勾配の検討

Fig. 10は、送気流束に対する各損失勾配の計算結果と静圧勾

Fig.10 Effect of volumetric flux of air supply on pressure loss gradients in case of U2.

配 P^* の実験結果²⁸⁾とを図示したものである。U2の実験は海洋で行われたものであり、差圧は空気注入付近、中央および出口付近の3カ所で測定されている。実験結果と計算結果とは全体的にはよく一致していると言える。また、送気流速が大きくなるに従って、位置損失勾配 P_H^* はどの位置においても減少するが、摩擦損失勾配 P_F^* は増加する。黒の実線と赤の実線との差によって表される加速損失勾配 $P_A^* (=P^*-P_H^*-P_F^*)$ は、送気流速と共に大きくなっており、出口付近の位置において顕著となることが分かる。

3・3 壁面せん断応力の検討

L-M法における係数として式(27b)を用いた Corr.1の計算結果は実験結果とよく一致しているが、赤川らによる式(E-1)を用いた Corr.4の計算結果は大口径管において送気流速が大きくなるに従って実験結果より小さくなる傾向がみられる。次にこのことについて考察する。

Fig. 11は、摩擦損失勾配 P_F^* の分布の計算結果を、相関式の違いによって揚水特性が同じな場合(S2)と相違する場合(W1)についての一例を示したものである(Fig. 6を参照)。なお、S2とW1とは空気注入口の深さがほぼ同じで管径がほぼ倍違っている。同図に示されるとおり、何れの場合にも摩擦損失勾配の分布は、Corr.1の場合には比較的滑らかに出口に向かって増加しており、Corr.4の場合には出口付近において比較的急激に増加している。また、Corr.1とCorr.4とは途中で交差している。摩擦損失勾配分布の傾向が異なっているが、3・5節において述べるとおり、揚水特性に影響しない場合もある。ただし、大口径・大深度エアリフトポンプにおいては、壁面せん断応力は出口付近で急激に大

Fig.11 Effect of wall shear stress correlation on frictional loss gradient in cases of S2 and W1.

きくなる傾向はより顕著になることから、赤川らによる相関式の適用には注意を要すると考えられる。

3・4 ドリフト速度の検討

Fig. 12はS2に対する計算結果を、Fig. 13はW1に対する計算結果を図示したものである。Corr.2は本来助走域部分のみに適用すべきであるが、相関式の違いによる相違点を明らかにするため、助走域部分に限定せず適用した。両図の比較はFig. 11で触れたように管径の影響について議論することに対応する。なお、 f_G の図より流動様式は両図共に気泡流、間欠流ならびにそれら

Fig.12 Effect of drift-flux correlations on velocities and volume fraction of gas phase in case of S2.

Fig.13 Effect of drift-flux correlations on velocities and volume fraction of gas phase in case of W1.

の遷移である。

3・4・1 分布パラメータ 何れの相関式も管径に関わらないことから、Fig. 12 と Fig. 13 共に同様な傾向となっている。すなわち、Corr.1 の場合には気泡流では気体体積率 f_G の影響が多少みられ、空気注入口付近において $C_{G0} \approx 1.1$ となっているものの、間欠流ではほぼ一定で $C_{G0} \approx 1.2$ となっている。Corr.2 の場合には気泡流では $C_{G0} \approx 1.0$ 、間欠流では $C_{G0} \approx 1.2$ 、遷移領域ではそれらの加重平均となっている。Corr.3 の場合には空気注入口付近において $C_{G0} \approx 1.05$ であり、出口に向かって徐々に増加し $C_{G0} \rightarrow 1.2$ となる傾向となっている。

3・4・2 気体体積率加重断面平均ドリフト速度 大口径管では、Corr.1 の相関式は管径に関わらないことから、遷移領域の位置は異なるものの、Fig. 12 と Fig. 13 共に同様な傾向となっている。Corr.2 の相関式は、無次元気体体積流束 $J_G^+ (=J_G/V_{KU})$ が 5 程度以上になれば、Corr.1 の間欠流の相関式と等価となる。また、特性速度 V_{KU} は 0.16m/s 程度であるから、Corr.2 の場合には気泡流においても同一の相関式が適用されるため、流動様式に関わらず滑らかな曲線となっている。Corr.3 の場合には気泡流では管径に依存しないため両図共に同程度であるが、間欠流では管径の影響が大きくなっている (Fig. 12 においては $V_{Gj} \approx 0.43$ m/s, Fig. 13 においては $V_{Gj} \approx 0.60$ m/s)。遷移領域では両流動様式における値を用いた加重平均によって表されることから、Corr.3 の場合には遷移領域で大きな変化を呈している。

3・4・3 気体平均速度および気体体積率 気体体積率 f_G は、次式によって表される。

$$f_G = \frac{J_G}{V_G} = \frac{J_G}{C_{G0}(J_G + J_L) + V_{Gj}} \quad (35)$$

ここに、気体体積流束 J_G は状態方程式より次式によって与えられる。

$$J_G = \frac{P_{at} J_{Gat}}{P + P_{at}} \quad (36)$$

Fig. 9 に示されるように圧力分布は相関式によってほとんど影響されないことから、Fig. 12 および Fig. 13 における気体体積流束分布も相関式の影響を受けないことが分かる。前述のように大口径管において、気泡流と間欠流とで、 C_{G0} の値には Corr.2 の場合に比較的確著な違いが見られ、一方、 V_{Gj} の値には Corr.3 の場合に顕著な違いが見られた。しかしながら、Fig. 12 および Fig. 13 に示されるように気体平均速度 V_G および気体体積率 f_G の流動方向分布に及ぼす相関式の影響は、多少みられるものの、揚水特性に大きく影響するほどではないと言える。

3・5 エアリフトポンプにおける諸損失の評価

エアリフトポンプの性能を論じる場合、空気注入口における管内圧 P_{ai} が重要な役割を果たす¹³⁾。空気注入口より上流側および下流側に着目すれば、それぞれ次式によって表される。

$$P_{ai} = \rho_L g L_S - \lambda_L \frac{L_U}{D} \frac{\rho_L J_L^2}{2} - \Delta P_{in} \quad (37a)$$

$$P_{ai} = \int_{L_L}^0 \{P_A^*(z') + P_F^*(z') + P_H^*(z')\} dz' + \Delta P_{out} + \Delta P_{ai} \quad (37b)$$

式 (37b) の加速損失、摩擦損失および位置損失成分を具体的に示せば、次式のとおりである。ただし、エアリフト管は垂直とする。

$$\Delta P_{A,LL} = \int_{L_L}^0 P_A^*(z') dz' = \left[\rho_{M,i} V_{M,i}^2 + \frac{f_{G,i} \rho_{G,i} \rho_L}{f_{L,i} \rho_{M,i}} V_{Gj,i}^2 \right]_{L_L}^{n_2+1} \quad (38)$$

$$\Delta P_{F,LL} = \int_{L_L}^0 P_F^*(z') dz' \approx \frac{4}{D} \sum_{i=1}^{n_2} \tau_{W,i} \Delta z \quad (39)$$

$$\Delta P_{H,LL} = \int_{L_L}^0 P_H^*(z') dz' \approx \rho_L g L_L - g \sum_{i=1}^{n_2} f_{G,i} (\rho_L - \rho_{G,i}) \Delta z \quad (40)$$

ここに、 n_2 は L_L 部の格子分割数であり、 $\Delta z = L_L / n_2$ である。式 (37a) と (37b) とを等値し、 $\rho_L g$ で割り整理すれば次式のようにになる。

$$H_{W,LL} = L_O + H_{F,LL} + H_{F,LU} + H_{A,LL} + H_A \quad (41)$$

ここに、

$$H_{W,LL} = \frac{1}{\rho_L} \sum_{i=1}^{n_2} f_{G,i} (\rho_L - \rho_{G,i}) \Delta z \quad (42a)$$

$$H_{F,LL} = \frac{\Delta P_{F,LL}}{\rho_L g}, H_{F,LU} = \lambda_L \frac{L_U}{D} \frac{J_L^2}{2g} \quad (42b), (42c)$$

$$H_{A,LL} = \frac{\Delta P_{A,LL}}{\rho_L g}, H_A = \frac{\Delta P_{in} + \Delta P_{ai} + \Delta P_{out}}{\rho_L g} \quad (42d), (42e)$$

である。式 (41) の左辺、すなわち式 (42a) は注入された空気が単位重量当たりを為す仕事 (単位: J/N=m) である。また、式 (41) の右辺は諸損失をヘッドで表したものであり、第 1 項は実揚程、全体は全揚程と見なすことができる。それゆえ、式 (41) はエアリフトポンプの性能評価式とすることができる。Table 3 は、最大揚水付近における諸損失の計算結果の一例を示したものである。ただし、式 (41) の右辺における諸損失を $H_{W,LL}$ との比として示した。同表に示されるように、 $H_{W,LL}$ には相関式による相違はさほど見られないが、 R_{FLL} すなわち L_L 部の摩擦損失には、Fig. 11 のように相違する場合とそうでない場合があることが分かる。 R_{FLL} の値は、U2, S4, W1 および W2 では Corr.4 (赤川らによる相関式) の方が大きくなっており、 R_{LO} (L_O 部の位置損失) を除いた他の諸損失より相対的に大きいため、揚水特性の計算結果が実験結果より小さくなったものと考えられる。

3・6 数値計算結果の総括

本研究で取り上げた実験結果と Corr.1 を用いた計算結果とを送気流量と揚水流量との関係として一括して図示すれば、Fig. 14 のとおりである。大口径管のみならず小口径管においても両者はよく一致している。このように 2・2 節に示した平均ドリフト速度に関わる相関式は、物理的背景も明らかであり実験的にも吟味されていることから、大口径管のエアリフトポンプに対して推奨することができると言える。

4. お わ り に

先に著者らが開発したエアリフトシミュレーターにドリフトフラックスモデルの構成方程式に関わる近年の研究結果を取り込むと共に、以前の相関式と対比しながら、それらが揚水特性に及ぼす影響等について検討したところ、次のようなことが結論として得られた。

- 1) 平均ドリフト速度に関わる C_{G0} および V_{Gj} の値は相関式によって異なるものの、気体平均速度および気体体積率分布にはさほど影響を及ぼさず、その結果揚水量にも殆ど影響を及ぼさないことが分かった。
- 2) 赤川らによる壁面せん断応力の相関式は、大口径管において送気流束が大きい場合、実験結果より小さくなる傾向がみられたが、その原因を摩擦圧力勾配分布により説明することができた。
- 3) エアリフトポンプの性能評価式を提示すると共に、評価式の各

Table 3 Ratio of pressure losses to work of injected air in airlift pipes.

Data No.	Corr. No.	J_{air} [m/s]	J_L [m/s]	$H_{w,LL}$ [m]	R_{LO} [%]	R_{FL} [%]	R_{FLU} [%]	R_A [%]	R_{Δ} [%]
Y1	Corr.1	3	1.28	3.56	56.7	31.2	1.4	1.4	9.3
	Corr.4		1.28	3.56	56.7	31.3	1.4	1.4	9.2
U1	Corr.1	6	1.72	6.74	51.8	23.3	0.4	2.1	22.3
	Corr.4		1.66	6.80	51.3	24.9	0.4	2.0	21.4
U2	Corr.1	10	3.73	14.8	39.0	30.7	2.0	8.5	19.9
	Corr.4		3.48	15.0	38.3	33.9	1.7	7.4	18.7
S1	Corr.1	30	4.72	72.2	17.5	68.4	2.1	6.9	5.1
	Corr.4		4.77	70.0	18.0	67.0	2.2	7.1	5.8
S2	Corr.1	30	4.39	62.2	20.3	57.8	9.3	6.8	5.8
	Corr.4		4.32	61.2	20.6	57.4	9.2	6.6	6.2
S3	Corr.1	30	4.13	55.6	22.6	51.0	13.3	6.4	6.6
	Corr.4		3.98	55.4	22.7	52.1	12.5	6.0	6.6
S4	Corr.1	30	3.71	47.2	26.7	43.2	16.7	5.6	7.8
	Corr.4		3.49	47.4	26.6	46.1	14.9	5.0	7.5
W1	Corr.1	30	6.64	48.7	16.4	52.6	1.0	16.4	13.5
	Corr.4		6.09	49.6	16.1	57.1	0.9	13.8	12.1
W2	Corr.1	30	5.01	53.2	15.0	28.9	37.9	9.2	9.0
	Corr.4		4.64	53.3	15.0	36.2	32.5	8.0	8.2

$$R_{LO} = \frac{L_O}{H_{w,LL}}, R_{FL} = \frac{H_{F,LL}}{H_{w,LL}}, R_{FLU} = \frac{H_{F,LU}}{H_{w,LL}}, R_A = \frac{H_{A,LL}}{H_{w,LL}}, R_{\Delta} = \frac{H_{\Delta}}{H_{w,LL}}$$

項を数値解より計算し、それらの比率が揚水特性に影響することを明らかにした。

4) 2・2 節に示した相関式は、大口径管のみならず小中口径管のエアリフトポンプに対しても適用できることを確認した。

現在、深海底に賦存するレアアース堆積物の揚泥技術の開発が望まれているが、本研究で検討した構成方程式に対して泥水に関わるパラメータを取り組めば、エアリフトポンプによる揚泥法として確立できると考える。

付 録

付録A 補間の重み係数 w_f は正規分布を用いれば、次式によって与えられる⁶⁾。

$$w_f(f_G; \mu_{ij}, \sigma_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \int_{-\infty}^{f_G} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\} dx \quad (\text{A-1})$$

ここに、

$$\mu_{ij} = (f_{Gi} + f_{Gj})/2 \quad (\text{A-2})$$

$$\sigma_{ij} = (f_{Gj} - f_{Gi})/5 \quad (\text{A-3})$$

である。したがって、各流動様式に対する重み係数はそれぞれ次式のように表される。

$$w_{f,B} = 1 - w_f(f_G; \mu_{12}, \sigma_{12}) \quad (\text{A-4})$$

$$w_{f,I} = w_f(f_G; \mu_{12}, \sigma_{12}) \cdot \{1 - w_f(f_G; \mu_{34}, \sigma_{34})\} \quad (\text{A-5})$$

$$w_{f,A} = w_f(f_G; \mu_{34}, \sigma_{34}) \quad (\text{A-6})$$

付録B 垂直管内混相流における壁面せん断応力 τ_w の測定は、圧力変換器等で測定された静圧勾配 P^* と締め切り法等で測定された位置損失勾配 P_H^* とによって、次式によって間接的に行われる。ただし、加速損失勾配 P_A^* は一般に無視される。

$$\frac{4\tau_w}{D} = P_F^* = P^* - P_H^* \quad (\text{B-1})$$

垂直管内気液二相流においては流動様式が様々であり、間欠的な流動を呈する場合には、締め切り法によって精度よく P_H^* を求

Fig.14 Comparison of calculative results of this work with experimental results of other workers.

めるためにはある程度の測定区間長が必要とされる。また、十分発達した状態における P_H^* の測定は、助走距離も必要となるため、大口径管に対しては行われていないが現状である。このようなことから既報²³⁾においては、都田ら³⁰⁾および宇佐美ら³¹⁾の実験結果を含めて、3種の管径(18.3, 30および46.5mm)の実験結果を用いて、L-M法に対するChisholm-Lairdの相関式、すなわち式(B-2)における係数 A を求めた。

$$\Phi_L^2 = 1 + A/X + 1/X^2 \quad (\text{B-2})$$

$$\Phi_L^2 = \left(\frac{4\tau_w}{D}\right) / \left(\frac{\Delta P_{L0}}{\Delta z}\right) \quad (\text{B-3a})$$

$$X^2 = \left(\frac{\Delta P_{L0}}{\Delta z}\right) / \left(\frac{\Delta P_{G0}}{\Delta z}\right) \quad (\text{B-3b})$$

その際、多少管径の影響が見られたことから、各管径ごとに実験結果 $(X_i, \Phi_{L,i}; i = 1, 2, \dots, n_A)$ より最小二乗法によって、すなわち次式によって係数 A の値を求めた。

$$A = \sum_{i=1}^{n_A} \left(\frac{\Phi_{L,i}^2}{X_i} - \frac{1}{X_i} - \frac{1}{X_i^3} \right) / \sum_{i=1}^{n_A} \frac{1}{X_i^2} \quad (\text{B-4})$$

このようにして得られた係数 A を無次元管径 N_D との関係として $(N_{D,j}, A_j; j = 1, 2, \dots, n_D)$ 、さらに最小二乗法によって次式を得た。

$$A = 52N_D^{-0.2} \quad (\text{B-5})$$

さて、式(B-5)は3種の管径から求められている。また係数 A の値を求めた際の実験値の組数 n_A は異なっている。一般にデータに重みが付与されていればそのことを考慮すべきであり、式(B-5)には実験値の組数の違いが反映されていない。そこで、既報²³⁾にける実験値にL-M法に基づいた井伊谷³²⁾および斯波ら³³⁾の実験値を加えて、すなわちFig. A1に示す実験結果を用いて再評価することとした。各管径における処理結果をTable A1に示したが、重み w は、次式によって表される。

$$w_j = n_{A,j} / \sum_{j=1}^{n_D} n_{A,j} \quad (\text{B-6})$$

Fig.A1 Representation of frictional pressure drop with Lockhart-Martinelli method in vertical two-phase flow.

Table A1 に示されるように係数 A は無次元管径 N_D に対してばらついているが、予備的に検討したところ、管径が大きくなれば係数 A は減少する傾向にあった。係数 A は非負な値であることから、簡単な相関式として式 (B-5) と同様に $A = bN_D^a$ とすれば、重み付き残差二乗和は次式によって表される。

$$S_D = \sum_{j=1}^{n_D} w_j (\log A_j - a \log N_{D,j} - \log b)^2 \quad \text{..... (B-7)}$$

したがって、最小条件 ($\partial S_D / \partial a = 0$, $\partial S_D / \partial b = 0$) より正規方程式が得られ、それを解けば a および b が次式のように求められる。

$$A = 83 N_D^{-0.37} \quad \text{..... (27b)}$$

ここで、大口径管エアリフトポンプの揚水特性について、式 (27b) および式 (B-5) を用いた計算結果と実験値との比較の一例を示せば、Fig. A2 のとおりである。同図に示されるように式 (27b) による計算結果が実験値とよい一致を見ている。ただし、大口径管における摩擦損失の実験結果を含めた係数 A の相関式については今後の課題であろう。

付録 C 大口径管の助走域における気泡流および球冠状気泡流の分布パラメータ C_{G0} に対して次式が提示されている^{16,17)}。

助走域における気泡流に対して：

$0 \leq J_G^+ / J_M^+ \leq 0.9$ の場合；

$$C_{G0,B} = C_{B1} - (C_{B1} - 1) \sqrt{\rho_G / \rho_L} \quad \text{..... (C-1a)}$$

$0.9 \leq J_G^+ / J_M^+ \leq 1$ の場合；

$$C_{G0,B} = (4.08 - C_{B2}) - (3.08 - C_{B2}) \sqrt{\rho_G / \rho_L} \quad \text{..... (C-1b)}$$

ここに、

$$C_{B1} = \exp \{0.475 (J_G^+ / J_M^+)^{1.69}\} \quad \text{..... (C-2)}$$

$$C_{B2} = 2.88 (J_G^+ / J_M^+) \quad \text{..... (C-3)}$$

$$J_G^+ = J_G / V_{KU} \quad \text{..... (C-4)}$$

$$J_M^+ = J_M / V_{KU} \quad \text{..... (C-5)}$$

助走域における球冠状気泡流に対して：

$0 \leq J_M^+ \leq 1.8$ の場合；

$$C_{G0,I} = C_{S1} - (C_{S1} - 1) \sqrt{\rho_G / \rho_L} \quad \text{..... (C-6a)}$$

Table A1 Parameters of Lockhart-Martinelli method in vertical two-phase flow.

Worker	D [m]	N_D	A	n_A	w
Toda <i>et al.</i> ³⁰⁾	0.0183	6.8	33.4	27	0.0597
Iinoya ³²⁾	0.022	8.1	36.1	56	0.1239
Shiba <i>et al.</i> ³³⁾	0.025	9.2	49.5	50	0.1106
Hatakeyama <i>et al.</i> ²³⁾	0.0300	11.1	32.5	153	0.3385
Toda <i>et al.</i> ³⁰⁾	0.0303	11.2	38.5	40	0.0885
Usami <i>et al.</i> ³¹⁾	0.0465	17.2	28.6	126	0.2788

Fig.A2 Effect of parameter A of Lockhart-Martinelli method on volumetric flux of lifting water.

$1.8 \leq J_M^+$ の場合；

$$C_{G0,I} = (1.2 + C_{S2}) - (0.2 + C_{S2}) \sqrt{\rho_G / \rho_L} \quad \text{..... (C-6b)}$$

ここに、

$$C_{S1} = 1.2 \exp \{0.110 (J_M^+)^{2.22}\} \quad \text{..... (C-7)}$$

$$C_{S2} = 0.6 \exp \{-1.2 (J_M^+ - 1.8)\} \quad \text{..... (C-8)}$$

また、大口径管の助走域における気泡流および球冠状気泡流の無次元気体体積率加重断面平均ドリフト速度 V_{Gj}^+ に対しては次式が提示されている^{16,17)}。

$$V_{Gj,BI}^+ = V_{Gj,B}^+ \exp(-1.39 J_G^+) + V_{Gj,I}^+ \{1 - \exp(-1.39 J_G^+)\} \quad \text{..... (C-9)}$$

なお、この場合の重み係数は次式によって与えられる。

$$w_{f,BI} = w_{f,B} + w_{f,I} \quad \text{..... (C-10)}$$

付録 D 前報^{6,7,11-13)}においては、分布パラメータに対して、流動様式に関わらず次式を用いている。

$$C_{G0} = 1.2 - 0.2 \exp(-2.5 f_G) \quad \text{..... (D-1)}$$

また、無次元気体体積率加重断面平均ドリフト速度に対しては次式を用いている。

気泡流に対して；

$$V_{Gj,B}^+ = 1.41 (1 - f_G)^{1.5} \quad \text{..... (D-2)}$$

間欠流（スラグ流・団塊波流）に対して；

$$V_{Gj,I}^+ = \frac{0.35}{V_{KU}} \sqrt{\frac{g D \Delta \rho}{\rho_L}} \quad \text{..... (D-3)}$$

上式は無次元管径 N_D を用いれば、次式のように簡潔に表される。

$$V_{Gj,I}^+ = 0.35\sqrt{N_D} \dots\dots\dots (D-3)'$$

付録E 壁面せん断応力に対して赤川²⁴⁾および勝原²⁵⁾は次式を提示している。

$$\frac{4\tau_W}{D} = \frac{\Delta P_{L0}}{\Delta z} (1 - f_G)^{-1.75} \dots\dots\dots (E-1)$$

主 な 記 号

A	: Lockhart-Martinelli 法における係数	[-]
C_{G0}	: 分布パラメータ	[-]
D	: 管径	[m]
f	: 体積率	[-]
g	: 重力加速度	[m/s ²]
J	: 体積流束	[m/s]
L_L	: 空気注入口から出口までのエアリフト管長	[m]
L_O	: 水面から出口までのエアリフト管長	[m]
L_U	: 吸込口から空気注入口までのエアリフト管長	[m]
l_C	: 式 (13) で定義される特性長さ	[m]
N_D	: 無次元管径	[-]
N_μ	: 無次元粘度	[-]
n	: 格子分割数	[-]
P	: 圧力	[Pa]
P^*	: 静圧勾配	[Pa/m]
P_A^*	: 加速損失勾配	[Pa/m]
P_F^*	: 摩擦損失勾配	[Pa/m]
P_H^*	: 位置損失勾配	[Pa/m]
ΔP	: 圧力損失	[Pa]
Q	: 体積流量	[m ³ /min]
Re	: レイノルズ数	[-]
V	: 平均速度	[m/s]
V_{Gj}	: 気体体積率加重断面平均ドリフト速度	[m/s]
V_{Gj}^+	: 無次元気体体積率加重断面平均ドリフト速度	[-]
V_{Gj}^*	: 平均ドリフト速度	[m/s]
V_{KU}	: 式 (16) で定義される特性速度	[m/s]
V_M	: 質量中心速度	[m/s]
w_f	: 補間の重み係数	[-]
z	: 流動方向の座標	[m]
z'	: 出口からの距離 ($z' = L_T - z$)	[m]
Δz	: 格子の大きさ	[m]
ζ	: 圧力損失係数	[-]
θ	: 管路の局所傾斜角	[rad]
λ	: 管摩擦係数	[-]

μ	: 粘性係数	[Pa・s]
ξ	: 助走損失係数	[-]
ρ	: 密度	[kg/m ³]
σ	: 表面張力	[Pa/m]
τ_W	: 壁面せん断応力	[Pa]
添字	A : 環状流, ai : 空気注入口, at : 大気, B : 気泡流, I : 間欠流, in : 吸込口, G : 気相, M : 混合体, L : 液相, out : 出口	

References

- Administration Office of the Headquarters for Ocean Policy: Basic Plan on Ocean Policy (April 2013), http://www.kantei.go.jp/jp/singi/kaiyou/kihonkeikaku/130426kihonkeikaku_e.pdf.
- M. Ishii: Argonne National Lab. Report (1977), ANL-77-47.
- N. Hatakeyama and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **107** (1991), 22-29.
- S.V. Patankar: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (Hemisphere, USA, 1980), pp.41-59.
- N. Hatakeyama and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **105** (1989), 1051-1057.
- N. Hatakeyama and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **111** (1995), 471-476.
- N. Hatakeyama, H. Takahashi, T. Saito and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **114** (1998), 415-420.
- M. Weber and Y. Dedegil: *Hydrotransport* **4** (1976), H1・1-24.
- T. Saito, et al.: *Mining and Safety*, **32** (1986), 540-551.
- N. Hatakeyama, H. Takahashi, T. Saito and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **113** (1997), 22-28.
- N. Hatakeyama, H. Takahashi, T. Saito and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **113** (1997), 333-338.
- N. Hatakeyama, H. Takahashi, T. Saito and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **115** (1999), 437-442.
- N. Hatakeyama, H. Takahashi, T. Saito and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **115** (1999), 958-964.
- I. Kataoka and M. Ishii: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30** (1987), 1927-1939.
- T. Hibiki and M. Ishii: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45** (2002), 707-721.
- T. Hibiki and M. Ishii: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46** (2003), 1773-1790.
- M. Ishii and T. Hibiki: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow* (2nd Edition), (Springer, New York, 2011), pp.397-436.
- T. Yoshinaga, Y. Sato and M. Sadatomi: *Japanese J. Multiphase Flow*, **4** (1990), 174-191.
- T. Usami and N. Yamakado: Journal of MMIJ, **97** (1981), 245-250.
- T. Usami, T. Saito and R. Kitahara: Journal of MMIJ, **98** (1982), 29-34.
- N. I. Kolev: *Multiphase Flow Dynamics 2* (3rd Edition), (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007), pp.109-134.
- N. Hatakeyama and T. Masuyama: *Japanese J. Multiphase Flow*, **8** (1994), 14-23.
- N. Hatakeyama and T. Masuyama: Journal of MMIJ, **111** (1995), 465-470.
- K. Akagawa: *Trans. JSME*, **23** (1957), 292-298.
- T. Katsuhara: *Trans. JSME*, **24** (1958), 1050-1056.
- A. Tomiyama, N. Furutani, H. Minagawa and T. Sakaguchi: *Japanese J. Multiphase Flow*, **6** (1992), 173-188.
- T. Kajishima and T. Saito: *Trans. JSME (Ser.B)*, **60** (1994), 4125-4131.
- 宇佐美毅: エアリフトポンプによる固体粒子の輸送に関する研究, (博士論文, 東北大学, 1985) .
- T. Saito, Y. Tomishima, T. Yamazaki and T. Usami: *Proc. MMIJ Annual Meeting* (1987), pp.337-338.
- M. Toda, E. Harada, M. Kuriyama, S. Saruta and H. Konno: *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **8** (1982), 380-386.
- T. Usami and N. Yamakado: *Mining and Safety*, **23** (1977), 73-85.
- K. Iinoya: *Kikai no Kenkyu (Science of Machine)*, **10** (1958), 1007-1011.
- M. Shiba and Y. Yamazaki: *Trans. JSME*, **32** (1966), 1231-1238.