岩石強度の時間依存性，分布特性， 寸法効果に関する一考察*

羽 柴 公 博¹ 福 井 勝 則²

On The Time Dependence, Probability Distribution, and Size Effect of Rock Strength

by Kimihiro HASHIBA^{a*} and Katsunori FUKUI^a

a. Department of Systems Innovation, the University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656, Japan (*Corresponding author, E-mail: hashiba@sys.t.u-tokyo.ac.jp)

Time dependence, probability distribution, and size effect have been investigated by many researchers and are still important issues in rock engineering. These seem to be different characteristics of rock but were found to be closely related to each other through laboratory tests with rock specimens in recent studies. In this paper, the theoretical aspects on the time dependence, probability distribution, and size effect of rock strength were explained, and some of the theoretical results were compared with the previous experimental results. The theoretical formulae based on the rate process theory that represent the failure progression of rock were introduced, and their relation to the theories of visco-elasticity and visco-plasticity was described. The exact solutions of the loading-rate dependence of strength and the creep lifetime were derived from the formulae and were compared with the experimental results of andesite. In addition, the exact solutions of the probability distribution of strength and creep lifetime and their relation to the statistics of extremes were described; the exact solutions of the size effect of strength and creep lifetime and their relation to the comminution theory were also described. The authors clarified what issues have been or have not been verified in previous studies and presented the subjects of future investigation.

KEY WORDS: Rock, Strength, Loading-Rate Dependence, Extreme Value Distribution, Size Effect

1. 緒 言

岩盤工学の分野で今後解決すべき課題は数多くあるが，古くから研究されてきたものの未だ多くの課題が残されている研究対象として，「時間依存性（粘弾性，レオロジー的性質）」，「分布特性（ばらつき，不均質性）」，「寸法効果」がある¹⁾。時間依存性とは，時間の経過とともに力学特性が変化したり，変形や破壊が生じたりする性質である。多くの材料を対象として，一定の応力のもとで時間とともに歪が増加するクリープ，一定の歪のもとで時間とともに応力が減少する応力緩和，載荷速度の減少とともに強度も減少する強度の載荷速度依存性などの研究が行われてきた。寸法効果とは寸法の変化によって力学特性が変化する現象であり，多くの材料で寸法の増加とともに強度が減少することが知られている。室内試験で用いる岩石供試体と実際の岩盤構造物とでは，対象とする時間と寸法に大きな違いがある。例えば，トンネルをはじめとする各種の地下空間などの土木構造物では数百年，高レベル放射性廃棄物の地層処分施設では数千年から数万年の使用が見込まれているが，岩石供試体を用いた室内試験で試験期間が10年を超えた例は数えるほどしかない²⁻⁴⁾。石油や石油ガス（LPガス）の地下備蓄基地では幅約20 m，高さ約20 m，長さ約500 mという大規模空洞が複数設けられている場合があり，

高レベル放射性廃棄物の地層処分施設は数 km 四方の範囲に建設される予定である。しかしながら，室内試験で用いられる供試体の代表寸法は大きくとも数十 cm であり，1 m を超えるような供試体での試験結果は極めて少ない⁵⁾。さらに，自然に産する岩石は不均質であり，どれだけ慎重に試験を実施しても，試験結果は供試体ごとにばらつく。岩盤には，そのような岩石の部分と亀裂や断層などの不連続面が多数含まれている。このように室内試験で扱える時間，寸法，不均質性は，実際の岩盤構造物とは大きな差があり，未だ解決困難な問題が多々あるために，「時間依存性」，「分布特性」，「寸法効果」が岩盤工学における未解決の課題として残されているのであろう。

「時間依存性」，「分布特性」，「寸法効果」は一見すると岩石や岩盤が持つ相異なる性質のように思われるが，岩石供試体を用いた室内試験においては，これらの間に密接な関係があることがわかってきた。Hashiba⁶⁾では，強度の載荷速度依存性とクリープ寿命（クリープ試験での試験開始から破壊までの時間）の関係，さらには，強度とクリープ寿命の分布特性や強度の寸法効果との関係を示した。これらの関係を結び付ける重要な定数に関して，Okubo et al.⁷⁾は国内の種々の岩石について，Hashiba and Fukui⁸⁾は海外の岩石も含めてとりまとめた。一方，最近の研究により，乾燥状態と湿潤状態での結果や，短期と長期の結果など，より広い範囲の試験結果を扱うには，これまでのデータ整理に用いてきた理論式や定数の扱いを変更する必要があることがわかってきた^{9, 10)}。本稿では，著者らのこれまでの研究結果をもとに，岩石供試体の強度の「時間依存性」，「分布特性」，「寸法効果」に関する理論的な側面を説明し，その一部については主に三城目安山

*2019年7月16日受付 2019年11月22日受理

1. 正会員 工博 東京大学准教授 大学院工学系研究科システム創成学専攻

2. 正会員 工博 東京大学教授 大学院工学系研究科システム創成学専攻

[著者連絡先] FAX: 03-3818-7492 (東大・システム創成)

E-mail: hashiba@sys.t.u-tokyo.ac.jp

キーワード: 岩石, 強度, 載荷速度依存性, 極値分布, 寸法効果

Table 1 Theoretical results for strength and creep lifetime of rock.

仮定	破壊進展速度	$v = L_a \sigma^n$ (1a)	$v = L_b \exp(m\sigma)$ (1b)
	破壊条件	$V = \int_0^t v dt$ (2)	
	V の分布特性	$R(V) = \exp\left\{-\left(\frac{V}{\eta}\right)^{\gamma}\right\}$ (3)	
定応力速度試験 ($\sigma = Ct$)	強度	$\sigma_f = \left\{\frac{(n+1)VC}{L_a}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$ (4a)	$\sigma_f = \frac{1}{m} \ln \frac{mVC}{L_b}$ (4b)
	強度の分布特性	$R(\sigma_f) = \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_f}{\eta_1}\right)^{\gamma_1}\right\}$ (5a) $\gamma_1 = (n+1)\gamma, \eta_1 = \left\{\frac{(n+1)C\eta}{L_a}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$	$R(\sigma_f) = \exp\left\{-\exp\left(\frac{\sigma_f - \alpha_1}{\beta_1}\right)\right\}$ (5b) $\alpha_1 = \frac{1}{m} \ln \frac{mC\eta}{L_b}, \beta_1 = \frac{1}{m\gamma}$
	強度の寸法効果	$\bar{\sigma}_f = \eta_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right)$ (6a)	$\bar{\sigma}_f = \alpha_1 - \beta_1 \ln \frac{1}{k}$ (6b)
クリープ試験 ($\sigma = \sigma_{cr}$)	寿命	$t_{cr} = \frac{V}{L_a \sigma_{cr}^n}$ (7a)	$t_{cr} = \frac{V}{L_b \exp(m\sigma_{cr})}$ (7b)
	寿命の分布特性	$R(t_{cr}) = \exp\left\{-\left(\frac{t_{cr}}{\eta_2}\right)^{\gamma_2}\right\}$ (8a) $\gamma_2 = \gamma, \eta_2 = \frac{\eta}{L_a \sigma_{cr}^n}$	$R(t_{cr}) = \exp\left\{-\left(\frac{t_{cr}}{\eta_3}\right)^{\gamma_3}\right\}$ (8b) $\gamma_3 = \gamma, \eta_3 = \frac{\eta}{L_b \exp(m\sigma_{cr})}$
	寿命の寸法効果	$\bar{t}_{cr} = \eta_2 \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma_2}\right)$ (9a)	$\bar{t}_{cr} = \eta_3 \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma_3}\right)$ (9b)

岩の室内試験による検討結果についても述べる。その中で、これまでの研究で検証されていることと検証されていないことを明確にし、今後の課題を明らかにする。なお、室内試験結果から実際の岩盤構造物の挙動を予測したり、安定性を評価したりすることは重要な検討課題であるが、両者を結び付ける理論や手法は未だ確立されておらず、本稿では触れないこととする。

2. 理論的背景

Table 1 に本稿で説明する理論式をまとめた。岩石の破壊進展速度を表す式 (1a) と式 (1b) は、速度過程論から導き出される。なお以下では、式 (1a) に関連する式には **a**、式 (1b) に関連する式には **b** を付けて区別する。Fig. 1 のように、原子や分子がポテンシャルエネルギーの山を越えることによって、ある状態①から別の状態②に移る過程を速度過程という¹¹⁾。横軸は、原子が実際に動く距離の場合もあるが、一般的には、反応の進行を表す何らかの尺度であればよい。この概念は化学反応速度の温度依存性を表すために提案され、反応速度（単位時間あたりに状態①から状態②への変化が起こる確率） v は以下のアレニウスの式で表される。

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{U}{B_0 T}\right) \quad (10)$$

U は活性化エネルギーであり、乗り越えるエネルギーの山の高さを表す。 B_0 はボルツマン定数、 T は絶対温度、 v_0 は頻度係数である。活性化エネルギーの単位として 1 粒子あたりではなく 1 モルあたりで考える場合は、 B_0 を気体定数（＝ボルツマン定数×アボガドロ定数）に置き換えればよい。この理論は、化学反応だけではなく、液体の粘性、拡散、固体の塑性流動、破壊などにも適用されるようになった。

固体の破壊を考える際には、破壊の進展を速度過程とみなし、 v をその進展速度と考える。また、加わっている応力 σ によって

Fig.1 Schematic illustration of the rate process.

乗り越える山の高さが減少すると考えると次式となる。

$$v = v_0 \exp\left\{-\frac{U - f(\sigma)}{B_0 T}\right\} \quad (11)$$

f は σ についての増加関数であり、以下のような式で表されることが多い。

$$f(\sigma) = A \ln r\sigma \quad (12a)$$

$$f(\sigma) = B\sigma \quad (12b)$$

金属材料の場合は、破壊の機構や載荷条件によってどちらの関数形がより適切かが議論されており、主要な流動や破壊で式 (12a) が利用されることが多く、クリープ破壊や疲労破壊では式 (12b) が利用される場合もあるようである¹¹⁾。一方、岩石に関する知見は少ないので、本稿では両者を比較しながら議論を進めることにする。式 (12a) を式 (11) に代入して整理すると式 (1a)、式

(12b) を式 (11) に代入して整理すると式 (1b) となる。ただし、 $L_a = v_0^n \exp\{- (U/B_0 T)\}$, $L_b = v_0 \exp\{- (U/B_0 T)\}$, $n = A/B_0 T$, $m = B/B_0 T$ である。

ここまでは v を漠然と破壊進展速度としてきたが、より具体的には、亀裂の進展速度、歪の増加速度、コンプライアンス (= 歪 / 応力) の増加速度などと考えることができる。例えば、 v を亀裂進展速度 da/dt とし、亀裂先端近傍の応力場を表す応力拡大係数 K_s を応力 σ の代わりに用いると、式 (1a) と式 (1b) は次式となる。

$$\frac{da}{dt} = L_{a,K} K_s^n \dots\dots\dots (13a)$$

$$\frac{da}{dt} = L_{b,K} \exp(m K_s) \dots\dots\dots (13b)$$

これらの式は、応力拡大係数が破壊靱性に達していない場合の、亀裂の緩やかな進展 (亜臨界亀裂進展、サブクリティカル亀裂進展) を表す¹²⁾。 v を歪速度 $d\varepsilon/dt$ とした場合、式 (11) と式 (12a) から次式が導かれる。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma^n}{\frac{1}{v_0^n} \exp\left(\frac{U}{B_0 T}\right)} \dots\dots\dots (14a)$$

式 (14a) は非線形粘性要素の応力-歪関係を表し、右辺の分母は粘性係数の温度依存性を表すアンドレードの式になっている。式 (14a) で $n = 1$ 、温度一定とすると線形粘性要素 (ダッシュポット) の応力-歪関係を表す式となる。

著者らの研究室では、 v を歪速度 $d\varepsilon/dt$, L_a を ε の関数と考え、その関数形を種々変化した構成方程式について検討してきた。一例として、応力一定のクリープ試験では、はじめはクリープ歪の増加とともに歪速度は減少するので (一次クリープ、遷移クリープ)、式 (1a) の L_a の関数形を次式のように仮定してみる¹³⁾。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = L_{a,\varepsilon}(\varepsilon) \sigma^n = L_{a,\varepsilon_0} \frac{\sigma^n}{\varepsilon^l} \dots\dots\dots (15a)$$

σ が一定 (= σ_{cr}) のクリープ歪速度 $d\varepsilon_{cr}/dt$ は、式 (15a) を解いて次式となる。

$$\frac{d\varepsilon_{cr}}{dt} = \kappa \sigma_{cr}^\mu t^\omega \dots\dots\dots (16a)$$

$$\text{ただし、} \kappa = L_{a,\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_0^{l+1}} (l+1)^{-\frac{1}{l+1}}, \quad \mu = \frac{n}{l+1}, \quad \omega = -\frac{l}{l+1}$$

これは、金属材料を主な対象とした粘塑性論 (クリープ理論)¹⁴⁾ でよく知られている Norton の式 ($d\varepsilon_{cr}/dt \propto \sigma_{cr}^\mu$) と Bailey の式 ($d\varepsilon_{cr}/dt \propto t^\omega$) を組み合わせた式になっている。クリープ試験開始直後は、岩石を含めた多くの材料で l は 1 に比べて十分大きいことが多く、この場合は $\omega \approx -1$ となり、 ε_{cr} が t の対数に比例することになるので対数クリープと呼ばれる。岩石や岩塩などでは、クリープ歪速度の応力依存性を表す μ が 2 ~ 5 の間に入っていることが多く¹⁵⁾、この値からクリープの機構を解明しようとする試みがある。例えば、クリープ歪速度が一定 ($l = 0$) の二次クリープ (定常クリープ) において、金属の拡散クリープでは μ が 1、転位クリープでは μ が 3 ~ 5 になる¹⁶⁾。しかしながら、岩石では同じ経過時間での一次クリープの歪速度から μ を求めることが多く、この場合の μ には n と l の影響が紛れ込んでいる可能性があり、金属で求められた μ と単純に比較することは難しい。

式 (15a) の $L_{a,\varepsilon}(\varepsilon)$ の関数形を変えることで、ピーク強度以前から以降までの応力-歪曲線や、一次クリープから三次クリープ (加速クリープ) までを表せる岩石の構成方程式となる¹⁷⁾。また著者らの研究室では、 v をコンプライアンスの増加速度 $d\lambda/dt$ と

Fig.2 Relation between uniaxial compressive strength and stress rate for Sanjome andesite in dry and wet conditions (modified from Hashiba et al.⁹⁾). The broken line was calculated with Eq. (4a) using n of 39. The solid line was calculated with Eq. (4b) using m of 0.45 MPa^{-1} . The results in wet conditions were converted to the ones in dry conditions using Eq. (19b).

した構成方程式についても、次式の $L_{a,\lambda}(\lambda)$ の関数形を種々変化させて検討してきた¹⁷⁾。

$$\frac{d\lambda}{dt} = L_{a,\lambda}(\lambda) \sigma^n \dots\dots\dots (17a)$$

このように、本稿の理論的検討の発端となる式 (1a) や式 (1b) は簡単な式であるが、その背景には速度過程論、粘弾性論、粘塑性論などの古典的な理論が関わっていることがわかる。以下では、式 (1a) の L_a や式 (1b) の L_b を定数とし、式 (2) のように v の積分値が試験条件によらないある値 V になった時に破壊が生じると考えて、破壊現象についての議論を進める。

3. 強度の载荷速度依存性とクリープ寿命

一定の応力速度 C での強度試験では $\sigma = Ct$ なので、これを式 (1a) さらに式 (2) に代入して整理すると強度 σ_f は式 (4a) で表される。また同様に、式 (1b) と式 (2) から式 (4b) が導かれる。ただし、 $\exp(m\sigma_f) \gg 1$ とした。応力速度 C_1 と C_2 での強度を、それぞれ σ_{f,C_1} と σ_{f,C_2} とすると、これらの関係式は次のようになる。

$$\frac{\sigma_{f,C_2}}{\sigma_{f,C_1}} = \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \dots\dots\dots (18a)$$

$$\sigma_{f,C_2} - \sigma_{f,C_1} = \frac{1}{m} \ln \frac{C_2}{C_1} \dots\dots\dots (18b)$$

すなわち、いずれの場合も応力速度を一定の割合で増加させると強度も増加するが、式 (4a) で表される強度はその増加率、式 (4b) で表される強度はその増加量が一定となる。また、強度試験結果を整理した際に、式 (4a) では σ_f と C の関係が両対数グラフ上で傾き $1/(n+1)$ の直線、式 (4b) では片対数グラフ上で傾き $1/m$ の直線で表されることを意味している。Fig. 2 には、過去の研究で得られた三城目安山岩の乾燥状態での一軸圧縮強度 σ_f と応力速度 C の関係を片対数グラフ上に赤丸で示した。なお、破線で示したのが式 (4a) で $n = 39$ とした計算結果、実線で示したのが式 (4b) で $m = 0.45 \text{ (MPa}^{-1}\text{)}$ とした計算結果であり、いずれも乾燥状態での試験結果から得られた値である。図よりわかるように、試験結果のばらつきに比べて式 (4a) と式 (4b) による計算結果の差は小さく、室内試験で通常実施する応力速度 $10^{-2} \sim 10 \text{ MPa/s}$ (ヤング率を 10 GPa とすると歪速度 $10^{-6} \sim 10^{-3} /s$) では、式 (4a) と式 (4b) のどちらが妥当かを見極めることは難しい。ただし、応

力速度が小さくなると、式 (4b) による強度の方が式 (4a) による強度よりも小さくなり、両者の差は大きくなっていく。

応力が一定に保たれるクリープ試験では $\sigma = \sigma_{cr} = \text{const.}$ なので、これを式 (1a) さらには式 (2) に代入して整理するとクリープ寿命 t_{cr} は式 (7a) で表される。また同様に、式 (1b) と式 (2) から式 (7b) が導かれる。クリープ試験結果を整理した際に、式 (7a) では t_{cr} と σ_{cr} の関係が両対数グラフ上で傾き $-n$ の直線、式 (7b) では片対数グラフ上で傾き $-m$ の直線で近似できることを意味している。Fig. 3 には、三城目安山岩の湿潤状態での一軸圧縮クリープ試験結果を青三角で示した。なお、破線で示したのが式 (7a) で $n = 29$ とした計算結果、実線で示したのが式 (7b) で $m = 0.45 \text{ (MPa}^{-1}\text{)}$ とした計算結果であり、いずれも湿潤状態での試験結果から得られた値である。この場合も Fig. 2 と同様に、試験結果のばらつきに比べて式 (7a) と式 (7b) の差は小さいことがわかる。ただし、クリープ応力が小さくなると、式 (7b) によるクリープ寿命の方が式 (7a) によるクリープ寿命よりも小さくなり、両者の差は大きくなっていく。

このように、比較的狭い範囲の条件で得られた試験結果からは式 (1a) と式 (1b) から導かれる理論式の差を見極めることが難しかったが、最近になって、条件をより広く変化させた場合の結果を用いて両者の違いが検討されるようになってきた。例えば、三城目安山岩の一軸圧縮試験では、式 (4b) の m が乾燥状態と湿潤状態とでほぼ同じ値 (0.45 MPa^{-1}) であることがわかった⁹⁾。この結果より、乾燥状態での強度 $\sigma_{f,d}$ と湿潤状態での強度 $\sigma_{f,w}$ の関係は、式 (4b) で m と V を一定とすると次式で表される。

$$\sigma_{f,d} - \sigma_{f,w} = \frac{1}{m} \ln \frac{C_d L_{b,d}}{C_w L_{b,w}} \dots\dots\dots (19b)$$

なお、 C_d と C_w はそれぞれ乾燥状態と湿潤状態の試験での応力速度、 $L_{b,d}$ と $L_{b,w}$ はそれぞれ乾燥状態と湿潤状態での L_b である。Fig. 2 に示した三城目安山岩では、同じ応力速度 ($C_d/C_w = 1$) で得られた乾燥状態と湿潤状態での一軸圧縮強度から、 $L_{b,w}/L_{b,d}$ は 7400 と求められた。式 (19b) からわかるように C と $1/L_b$ は等価なので、湿潤状態での強度は、その $1/7400$ 倍の応力速度での乾燥状態での強度と見なせる。そこで Fig. 2 には、湿潤状態での強度を実際の $1/7400$ 倍の応力速度の位置に青丸で示した。図よりわかるように、乾燥状態と湿潤状態の強度が実線上に位置しており、両者が式 (4b) によりうまく説明できることがわかる。この結果は、Fig. 2 に示した三城目安山岩では、式 (1b) で表される破壊進展速度が湿潤状態は乾燥状態よりも 7400 倍大きいことを示している。

岩石の力学特性は同じ岩種であっても採取場所により異なることがあり、Fig. 3 に示した三城目安山岩の試料は、Fig. 2 に示した試料よりも強度におよぼす水分の影響が小さく、 $L_{b,w}/L_{b,d}$ は 180 であった。式 (7b) を m 、 V 、 σ_{cr} が一定として整理すると次式となる。

$$\frac{t_{cr,w}}{t_{cr,d}} = \frac{L_{b,d}}{L_{b,w}} \dots\dots\dots (20b)$$

ここで、 $t_{cr,d}$ と $t_{cr,w}$ は乾燥状態と湿潤状態における、同じクリープ応力のもとでのクリープ寿命である。Fig. 3 には、式 (20b) にもとづいて乾燥状態でのクリープ寿命を 180 で除した結果を赤三角で示した。試験結果にばらつきはあるものの、湿潤状態での結果と変換した乾燥状態での結果はほぼ一直線上にあり、式 (1b) から導かれた式 (4b) や式 (7b) で試験結果をうまく説明できることがわかる。この結果は、Fig. 3 に示した三城目安山岩では、湿潤状態は乾燥状態よりも破壊進展速度が 180 倍大きいことを示し

Fig.3 Relation between creep lifetime and creep stress for Sanjome andesite in dry and wet conditions (modified from Hashiba et al.⁹⁾). The broken line was calculated with Eq. (7a) using n of 29. The solid line was calculated with Eq. (7b) using m of 0.45 MPa^{-1} . The results in dry conditions were converted to the ones in wet conditions using Eq. (20b).

ている。

$L_{b,w}/L_{b,d}$ は岩石試料の違いだけでなく、 $L_{b,d}$ を求める際の乾燥状態の試験環境によっても変化すると考えられた。そこで著者らは、式 (1b) の L_b と水飽和度との定量的な関係を明らかにした¹⁰⁾。例えば三城目安山岩では、炉乾燥状態 (水飽和度 0.001) での L_b は飽和湿潤状態 (水飽和度 1) での L_b の $1/10^5$ 程度になった。すなわち、飽和湿潤状態での強度は炉乾燥状態で応力速度を $1/10^5$ 倍にした場合の強度に相当するといえる。このように、式 (1b) では水飽和度によって L_b だけが変化したので、湿潤状態では乾燥状態よりも破壊進展が加速しているとみなして試験結果をうまく説明できた。一方、Fig. 2 と Fig. 3 での計算で用いた定数の値の違いからもわかるように、式 (1a) やそれから導かれた式 (4a) や式 (7a) では、水飽和度が変化すると L_a だけでなく n も変化したので、乾燥状態と湿潤状態の結果を統一的に説明することはできていない。

式 (7a) と式 (7b) を比較するためのもう一つの例として、長期と短期のクリープ試験結果がある。著者らは、田下凝灰岩を用いて湿潤状態で行われた約 20 年間の長期クリープ試験結果と 2 週間以内に破壊が生じた短期クリープ試験結果とを報告した⁴⁾。長期クリープ試験は 30% の応力レベル (クリープ応力の一軸圧縮強度に対する割合) で行われ、短期クリープ試験は 63% ~ 92% の応力レベルで行われた。短期クリープ試験結果から長期クリープ試験のクリープ寿命を推定するにあたって、式 (7a) を用いると約 300000 年、式 (7b) を用いると約 300 年となった。いずれが妥当かを室内試験で検証することは難しいが、長期と短期のクリープ歪速度の比較結果など¹⁸⁾を見ると、式 (7a) から推定される寿命はやや長すぎるように思われる。

4. 強度とクリープ寿命の分布特性

強度とクリープ寿命の分布特性を統一的に説明するため、式 (3) のように V がワイブル分布に従うと仮定する。なお、 R は残存確率 ($= 1 - \text{累積確率}$)、 γ は形状母数、 η は尺度母数である。式 (4a) を式 (3) に代入すると式 (5a)、式 (4b) を式 (3) に代入すると式 (5b) が得られる。すなわち、式 (1a) では強度がワイブル分布に従うことになるが、式 (1b) では強度がグンベル分布に従うことになる。クリープ寿命の分布特性は、式 (7a) と式 (7b) をそれぞれ式 (3) に代入することで、式 (8a) と式 (8b) のように得られる。すなわち、式 (1a) でも式 (1b) でもクリープ寿命はワイブル分布に従うことになる。

Fig.4 Cumulative distribution of uniaxial compressive strength σ_f for Sanjome andesite in dry and wet conditions.

ワイブル分布とグンベル分布はいずれも極値統計学における極値分布である^{19, 20)}。いま、 K 個の測定値の最小値が x より大きい確率を $R(x)$ とする。このとき、 $k \cdot K$ 個の測定値の最小値が x より大きい確率は $\{R(x)\}^k$ となる。 $R(x)$ と $\{R(x)\}^k$ とで関数形が変化しないとすると次式が成り立つ。

$$\{R(x)\}^k = R(p_k x + q_k) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $p_k = 1$, $q_k \neq 0$ として得られるのがグンベル分布 (第1漸近式)、 $p_k \neq 1$, $q_k = 0$ として得られるのがフレッシュ分布 (第2漸近式) とワイブル分布 (第3漸近式) である。極値分布の一般形は次式で表され、一般極値分布 (Generalized Extreme Value distribution) と呼ばれている。

$$GEV(\alpha, \beta, \gamma) = \exp \left[- \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right\}^\gamma \right] \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (22) で $\gamma \rightarrow \infty$ とするとグンベル分布、 γ を負値とするとフレッシュ分布、 γ を正値とするとワイブル分布となる。測定値が十分多い場合、その最大値や最小値が従う分布は、この3種類の極値分布のいずれかに漸近することがわかっている。ワイブル分布は、このような数学的な観点からだけではなく、室内試験結果からも同時期に導き出されている²¹⁾。名前の由来となったスウェーデンの技術者ワイブルは、材料強度の分布特性を表すために、この分布関数を提案した。粉砕した材料の粒度分布もワイブル分布に従うことが報告されており、この分布関数は報告者の名前をとりロジン・ラムラー分布と呼ばれている。

岩石力学の分野では、これまではワイブル分布を用いて検討されることがほとんどであり、グンベル分布による検討は極めて少なかった²²⁾。Fig. 4 には、三城目安山岩の一軸圧縮強度の分布特性をワイブル確率紙とグンベル確率紙に示した。いずれの図でもデータは直線状に並んでおり、どちらの分布関数が適切かを見極めることは困難なことがわかる。しかし最近になって、水分の影響を考慮することで両者の違いが検討されるようになってきた⁹⁾。式 (4b) と式 (7b) より、 V と $L_{b,w}$ (L_b の湿潤状態での値) の比は次式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \frac{V}{L_{b,w}} &= \frac{\exp(m\sigma_{f,w})}{mC} = \frac{L_{b,d}}{L_{b,w}} = \frac{\exp(m\sigma_{f,d})}{mC} \\ &= t_{cr,w} \exp(m\sigma_{cr}) = \frac{L_{b,d}}{L_{b,w}} t_{cr,d} \exp(m\sigma_{cr}) \quad \dots\dots\dots (23b) \end{aligned}$$

なお添え字の d と w は、それぞれ乾燥状態と湿潤状態を表す。

Fig.5 Cumulative distribution of $V/L_{b,w}$ for Sanjome andesite. $V/L_{b,w}$ was calculated with Eq. (23b) using strength and creep lifetime in dry and wet conditions. The solid line was calculated with Eq. (24b).

式 (23b) よりわかるように、 $V/L_{b,w}$ は乾燥状態と湿潤状態での強度とクリープ寿命のそれぞれから求められる。そこで、Fig. 4 に示した強度と、三城目安山岩の同じブロックから取得したクリープ寿命を式 (23b) に代入して $V/L_{b,w}$ を計算し、その結果をワイブル確率紙である Fig. 5 に示した。図より、強度試験とクリープ試験という異なる载荷条件、乾燥状態と湿潤状態という異なる水分条件での結果がほぼ一直線に並んでおり、式 (23b) が成り立つことがわかる。なお、式 (23b) を式 (5b) や式 (8b) に代入することで、 $V/L_{b,w}$ が従う次式のワイブル分布が求められる。

$$R(V/L_{b,w}) = \exp \left\{ - \left(\frac{V/L_{b,w}}{\eta_4} \right)^{\gamma_4} \right\}, \quad \dots\dots\dots (24b)$$

$$\text{ただし、} \gamma_4 = \gamma, \quad \eta_4 = \frac{\eta}{L_{b,w}}$$

なお、式 (1a) やそれから導かれた式 (4a) や式 (7a) では、水分条件が変化すると L_a だけでなく n も変化するので、乾燥状態と湿潤状態での分布特性を統一的に説明することはできていない。

5. 強度の寸法効果

小さな岩石供試体の強度 σ_f が式 (5a) や式 (5b) の分布に従うとする。この供試体が k 個集まった場合の強度の分布は式 (21) の左辺で表されるので、式 (5a) と式 (5b) からそれぞれ次式が導か

れる。

$$\{R(\sigma_f)\}^k = \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma_f}{\eta_1 (1/k)^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_1} \right\} \quad (25a)$$

$$\{R(\sigma_f)\}^k = \exp \left\{ - \exp \left(\frac{\sigma_f - \alpha_1 + \beta_1 \ln k}{\beta_1} \right) \right\} \quad (25b)$$

これらの分布に従う強度の平均値が式 (6a) と式 (6b) で表される。ただし、 Γ はガンマ関数、 ζ はオイラーの定数である。 k は供試体の体積、すなわち代表寸法 D の 3 乗に比例するので、強度の寸法効果は次式のように表される。

$$\frac{\bar{\sigma}_{f,D_2}}{\bar{\sigma}_{f,D_1}} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^{\frac{3}{\gamma_1}} \quad (26a)$$

$$\bar{\sigma}_{f,D_2} - \bar{\sigma}_{f,D_1} = 3\beta_1 \ln \frac{D_1}{D_2} \quad (26b)$$

これらの式は、式 (18a) および式 (18b) と同じ形をしている。すなわち、いずれの場合も寸法を一定の割合で増加させると強度は減少するが、式 (6a) で表される強度はその減少率、式 (6b) で表される強度はその減少量が一定となる。これまでに岩石強度の寸法効果に関する研究は数多く行われてきたが、前章までと同様に、室内試験の結果からは式 (26a) と式 (26b) のどちらが妥当かを判断することが難しかった。そのため、強度の分布特性としてワイブル分布が多用されてきたために、式 (26a) で結果が整理されることがほとんどであった。

式 (26a) の物理的な意味としては、以下のような説明がなされている²³⁾。まず、供試体内に蓄えられる弾性歪エネルギーは $\sigma_f^2 D^3$ に比例する。このエネルギーが破断面の形成に消費されるとみなし、破断面の形成に必要なエネルギーが D^2 に比例すると考えると次式が得られる。

$$\sigma_f^2 D^3 \propto D^2 \quad (27a)$$

これは、粉砕理論におけるリッティンガー則に対応している。一方、蓄えられたエネルギーが供試体全体の破壊に消費されるとみなし、破壊に必要なエネルギーが D^3 に比例すると考えると次式が得られる。

$$\sigma_f^2 D^3 \propto D^3 \quad (28a)$$

これは、粉砕理論におけるキック則に対応している。実際は式 (27a) と式 (28a) の間と考えると、強度の寸法効果は次式で表されることになる。

$$\sigma_f \propto \left(\frac{1}{D} \right)^{0 \sim 0.5} \quad (29a)$$

なお、式 (27a) と式 (28a) の中間を考えて式 (29a) の冪数を 0.25 とすると、粉砕理論におけるボンド則に対応することになる。式 (26a) の γ_1 は式 (5a) で表されるワイブル分布の形状母数であり、岩石供試体を用いた過去の研究では 5.5 ~ 33 という値が得られている²⁴⁾。これらの値より式 (26a) の冪数を求めると 0.09 ~ 0.55 となり式 (29a) の冪数の範囲とほぼ一致する。また、過去に強度の寸法効果から得られた冪数も 0 ~ 0.5 に入っていることが多かった²³⁾。

式 (8a) および式 (8b) と式 (21) より、クリープ寿命の寸法効果である式 (9a) と式 (9b) が導かれる。式の形は式 (6a) と同じであるが、 γ_2 は γ_1 の $1/(n+1)$ 倍なので、クリープ寿命の寸法効果

は強度の寸法効果よりも大きいことが示唆されるが、試験結果による検討はなされていないと思われる。

6. 考察と今後の課題

本稿では、Table 1 に示したように式 (1a) と式 (1b)、式 (2)、式 (3) の仮定のもと、岩石強度の時間依存性、分布特性、寸法効果に関する理論式を導き出した。なお、ここでは理論解のある定応力速度試験の結果を示したが、ヤング率の載荷速度依存性が計算結果におよぼす影響は小さいので、応力速度が歪速度に比例すると考えると定歪速度試験結果にも適用できる。また比較対象として、クリープ寿命とその分布特性や寸法効果の計算結果も示した。

これまで、式 (1a) をもとにした研究が多くなされており、種々の岩石、種々の試験条件での n の値が求められてきた⁸⁾。式 (1a) に関連する式の多くは室内試験結果をうまく説明することができ、検証がなされていないのは試験の実施が困難な式 (9a) のみであろう。前章までで述べてきたように、通常の室内試験の試験条件では、式 (1b) による計算結果は式 (1a) による計算結果と大きな差異はない。しかしながら、より広い範囲の試験条件での結果を説明しようとするとき差異が生じ、非常に遅い載荷速度での強度や非常に低い応力下でのクリープ寿命の推定値は式 (1b) の方が小さくなる。式 (1b) を級数展開すると、 σ^n の項だけでなく、それよりも低次の項も含まれていることがわかる。非常に遅い載荷速度や非常に低い応力下では、これら低次の項の影響が表れる可能性がある。式 (1b) をもとにした研究は始まったばかりであり、今のところはいくつかの岩石に関して、主に一軸圧縮応力下で強度やクリープ寿命の分布特性についての検討がなされているのみである。本稿では主に三城目安山岩での検討例を紹介した。より長い時間、より大きな岩盤を対象とする際には、式 (1b) の計算結果がより安全側になる可能性があり、今後、種々の岩石、種々の試験条件での検討を進める必要があると考える。その結果をもとに、これまで式 (1a) をもとに検討してきた構成方程式を、式 (1b) をもとに再検討する必要がある。

岩石強度の時間依存性、分布特性、寸法効果を扱う理論として、本稿のような決定論の他に確率過程論もある¹¹⁾。破壊していない状態と破壊した状態だけを考える 2 状態 1 段確率過程では、遷移確率が式 (1a) で表される場合の強度はワイブル分布に従い、遷移確率が式 (1b) で表される場合の強度はグンベル分布に従う。ただし、ワイブル分布の形状母数 γ_1 は $n+1$ 、グンベル分布の β_1 は $1/m$ となり、 γ は 1 より小さいことが多いので²⁵⁾、確率過程論で計算される強度の方が決定論での強度よりもばらつきが小さくなる。クリープ試験では遷移確率が一定と考えると、クリープ寿命は指数分布 (形状母数が 1 のワイブル分布) に従うことになり、この場合も決定論よりも確率過程論の方がクリープ寿命のばらつきが小さくなる。すなわち、2 状態 1 段確率過程はばらつきや寸法効果の下限を与える可能性がある。ただし実際の岩石は、微小亀裂の発生や進展、さらには主亀裂への結合などが段階的に生じて最終的な破壊にいたるので、一般的には $i+1$ 状態 i 段確率過程として扱うべきであり、確率過程論においても検討の余地は多い。

本稿で対象としたのは、あくまでも岩石供試体による室内試験結果であり、扱っている時間、寸法、不均質性は、実際の岩盤構造物とは大きな差がある。岩石供試体の室内試験結果と大規模な岩盤の特性とを結びつけようとする試みは、強度の寸法効果について研究例があるものの未だ少ない²⁶⁾。岩盤の「時間依存性」、「分布特性」、「寸法効果」に関しては、検討課題が山積していると言えよう。

記 号

A : 式 (12a) の定数 [J]
 a : 亀裂長 [m]
 B : 式 (12b) の定数 [m³]
 B_0 : ボルツマン定数 [J K⁻¹]
 C, C_1, C_2 : 応力速度 [Pa s⁻¹]
 C_d : 乾燥状態での応力速度 [Pa s⁻¹]
 C_w : 湿潤状態での応力速度 [Pa s⁻¹]
 D, D_1, D_2 : 供試体の代表寸法 [m]
 f : 応力の関数 [J]
 GEV : 一般極値分布の残存確率 [-]
 i : 確率過程の段数 [-]
 K : 測定値の数 [-]
 k : 供試体の大きさを表す定数 [-]
 K_s : 応力拡大係数 [Pa m^{0.5}]
 l : 式 (15a) の定数 [-]
 L_a : 式 (1a) の定数 [Pa⁻ⁿ s⁻¹]
 $L_{a,K}$: 式 (13a) の定数 [Pa⁻ⁿ m^{1-0.5n} s⁻¹]
 $L_{a,\varepsilon}$: 式 (15a) の ε の関数 [Pa⁻ⁿ s⁻¹]
 L_{a,ε_0} : 式 (15a) の定数 [Pa⁻ⁿ s⁻¹]
 $L_{a,\lambda}$: 式 (17a) の λ の関数 [Pa⁻ⁿ⁻¹ s⁻¹]
 L_b : 式 (1b) の定数 [s⁻¹]
 $L_{b,d}$: 乾燥状態での L_b [s⁻¹]
 $L_{b,K}$: 式 (13b) の定数 [m s⁻¹]
 $L_{b,w}$: 湿潤状態での L_b [s⁻¹]
 m : 式 (1b) の定数 [Pa⁻¹]
 m_K : 式 (13b) の定数 [Pa⁻¹ m^{-0.5}]
 n : 式 (1a) の定数 [-]
 p_k : 式 (21) の定数 [-]
 q_k : 式 (21) の定数 [-]
 R : 残存確率 [-]
 r : 式 (12a) の定数 [Pa⁻¹]
 T : 絶対温度 [K]
 t : 時間 [s]
 t_{cr} : クリープ寿命 [s]
 t_{cr} : 平均クリープ寿命 [s]
 $t_{cr,d}$: 乾燥状態でのクリープ寿命 [s]
 $t_{cr,w}$: 湿潤状態でのクリープ寿命 [s]
 U : 活性化エネルギー [J]
 V : 式 (2) の定数 [-]
 v : 破壊進展速度 [s⁻¹]
 v_0 : 頻度係数 [s⁻¹]
 x : 確率変数 [-]
 α : グンベル分布の定数 [-]
 α_1 : グンベル分布の定数 [Pa]
 β : グンベル分布の定数 [-]

β_1 : グンベル分布の定数 [Pa]
 Γ : ガンマ関数 [-]
 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$: ワイブル分布の形状母数 [-]
 ε : 歪 [-]
 ε_{cr} : クリープ歪 [-]
 ζ : オイラーの定数 [-]
 η : ワイブル分布の尺度母数 [-]
 η_1 : ワイブル分布の尺度母数 [Pa]
 η_2, η_3, η_4 : ワイブル分布の尺度母数 [s]
 κ : 式 (16a) の定数 [Pa^{-μ} s^{-ω-1}]
 λ : コンプライアンス [Pa⁻¹]
 μ : 式 (16a) の定数 [-]
 σ : 応力 [Pa]
 σ_{cr} : クリープ応力 [Pa]
 σ_f : 強度 [Pa]
 σ_f : 平均強度 [Pa]
 σ_{f,C_1} : 応力速度 C_1 での強度 [Pa]
 σ_{f,C_2} : 応力速度 C_2 での強度 [Pa]
 $\sigma_{f,d}$: 乾燥状態での強度 [Pa]
 σ_{f,D_1} : 代表寸法 D_1 の供試体の平均強度 [Pa]
 σ_{f,D_2} : 代表寸法 D_2 の供試体の平均強度 [Pa]
 $\sigma_{f,w}$: 湿潤状態での強度 [Pa]
 ω : 式 (16a) の定数 [-]

References

- 小島圭二: 岩の力学ニュース, **128** (2018), 1-3. [K. Kojima: Iwano rikigaku news, **128** (2018), 1-3.]
- H. It- and S. Sasajima: Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., **24** (1987), 113-121.
- P. B-rest, J. F. B-raud, H. Gharbi, B. Brouard and K. De Vries: Rock Mech. Rock Eng., **48** (2015), 2591-2602.
- K. Hashiba and K. Fukui: Geotech. Test. J., <https://doi.org/10.1520/GTJ20180358>, in press.
- Z. T. Bieniawski: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **5** (1968), 325-335.
- K. Hashiba: Journal of MMIJ, **123** (2007), 10-16.
- S. Okubo, K. Hashiba and K. Fukui: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **58** (2013), 180-185.
- K. Hashiba and K. Fukui: Rock Mech. Rock Eng., **48** (2015), 859-865.
- K. Hashiba, K. Fukui, M. Kataoka and S. Y. Chu: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **108** (2018), 37-42.
- K. Hashiba, K. Fukui and M. Kataoka: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **117** (2019), 142-149.
- 横堀武夫: 材料強度学第2版, (岩波書店, 東京, 1974). [T. Yokobori: Zairyou kyoudogaku, 2nd edition, (Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1974).]
- B. K. Atkinson: J. Geophys. Res., **89** (1984), 4077-4114.
- S. Okubo, Y. Nishimatsu and K. Fukui: Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., **28** (1991), 77-82.
- 日本材料学会: 固体力学の基礎, (日刊工業新聞社, 東京, 1981). [The Society of Materials Science Japan: Kotairikigaku no kiso, (Nikkan Kogyo Shimbun, Tokyo, 1981).]
- N. D. Cristescu and U. Hunsche: Time effects in rock mechanics, (John Wiley & Sons., Chichester, 1998).
- 竹内伸: 結晶塑性論, (内田老鶴圃, 東京, 2013). [S. Takeuchi: Keshou soseiron, (Uchida rokakuho publishing, Tokyo, 2013).]
- K. Hashiba, S. Okubo and K. Fukui: Journal of MMIJ, **126** (2010), 560-568.
- K. Hashiba, S. Okubo and K. Fukui: Journal of MMIJ, **124** (2008), 741-747.
- E. J. Gumbel: Statistics of extremes, (Dover Publications, Inc., Mineola, 2004).
- 高橋倫也, 志村隆彰: 極値統計学, (近代科学社, 東京, 2016). [R. Takahashi and T. Shimura: Kyokuchi toukeigaku (Kindai gagaku sha, Tokyo, 2016).]
- H. Rinne: The Weibull distribution: a handbook, (CRC Press, Boca Raton, 2009).
- V. T. Glushko and G. T. Rubets: Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., **10** (1973), 763-766.
- S. Okubo, X. Gao, K. Fukui and H. Kaneda: Journal of MMIJ, **122** (2006), 12-20.
- 山口梅太郎, 西松裕一: 岩石力学入門第3版, (東京大学出版会, 東京, 1991). [U. Yamaguchi and Y. Nishimatsu: Ganseki rikigaku nyumon, 3rd edition, (University of Tokyo Press, Tokyo, 1991).]
- S. Okubo, K. Fukui, K. Hashiba and K. Shin: Journal of MMIJ, **119** (2003), 734-740.
- K. Fukui and S. Okubo: Journal of MMIJ, **120** (2004), 555-559.