塑性流体同心二重円管内層流の流動解析 および摩擦損失に関わる係数の近似式*

畠山 信夫¹ 清水 賀之² 益山 忠³

Flow Analysis and Approximate Expressions of Factors Related to Frictional Loss for Laminar Flow of Viscoplastic Fluids through a Concentric Annulus

by Nobuo HATAKEYAMA^a, Yoshiyuki SHIMIZU^b and Tadashi MASUYAMA^c

- a. Ex-prof., Ichinoseki National College of Technology
(Corresponding author, E-mail: hatake@my.email.ne.jp)
b. Prof., School of Marine Science and Technology, Tokai University
c. Ex-prof., School of Marine Science and Technology, Tokai University

The mud flow between the borehole and the drill pipe in well drilling can be regarded as the flow of non-Newtonian fluids through a concentric annulus. In recent years, the Herschel-Bulkley rheological model is recommended as a general fluid model of drilling mud because it encompasses the power law model and the Bingham plastic model. Also, in the field of well drilling, the flow through a concentric annulus is conventionally approximated by the flow between two parallel plates. However, its applicability does not seem to be examined because it is not easy to perform analysis of non-Newtonian fluid flow through a concentric annulus.

For studies on laminar flow of viscoplastic fluids (fluids with yield stress) through concentric annuli, there are researches on Bingham fluid by Fredrickson & Bird and on Herschel-Bulkley fluid by Hanks. Since the equation of motion in viscoplastic fluid flow through a concentric annulus cannot be analytically solved in all of them, in their researches numerical calculations are presented by charts. However, it is not simple as a method to estimate the frictional pressure loss, because multiple charts are related.

In this research, based on the results of previous authors' research^{7, 8)}, we investigate a method that can easily calculate the average wall shear-stress in laminar flows of viscoplastic fluids through concentric annuli. That is, using the results of circular pipe and parallel-plate, an approximate expression of viscosity factor in viscoplastic fluid flow through concentric annuli is derived and the error of the average wall shear-stress represented by the approximate equation is evaluated. Furthermore, a simpler approximate formula which can be calculated directly without numerical calculation is derived and its error is also evaluated. In addition, error assessment is performed to confirm the applicability of approximation by the flow in the parallel-plate for the flow in a concentric annulus, which has been conventionally done in the field of well drilling.

KEY WORDS: Concentric Annulus, Drilling Mud, Herschel-Bulkley Fluid, Bingham Fluid, Viscosity Factor, Spreadsheet Solution

1. はじめに

坑井掘削中における坑壁とドリルパイプの間の泥水流動は、非ニュートン流体同心二重円管内流れと見做すことができる。その泥水流動モデルとしては、ベキ乗則（擬塑性）モデル、ビンガムモデルおよびハーシェル・バルクレイモデルがあり、このうちハーシェル・バルクレイモデルはベキ乗則モデルおよびビンガムモデルを包含することから、近年、掘削泥水の一般流体モデルとして推奨されている¹⁾。また、坑井掘削の分野においては、同心二重円管内流れは慣習的に平行平板内流れによって近似されている^{1, 2)}。しかしながら、その適用性については、非ニュートン流体の同心二重円管内流動を解析的に行うことは簡単でないこと

から、吟味されていないようである。なお、ビンガム流体およびハーシェル・バルクレイ流体は、合わせて塑性流体と呼ばれており、降伏応力を有することから、管内流動においてせん断応力が降伏応力より小さい場合、栓流部を形成する。

さて、塑性流体同心二重円管内層流に関する研究としては、Fredrickson と Bird によるビンガム流体に関する研究^{3, 4)}が、また Hanks によるハーシェル・バルクレイ流体に関する研究^{5, 6)}がある。塑性流体同心二重円管内における運動方程式は、そのすべてを解析的に解けないことから、彼らの研究においては、数値計算結果を図表にしている。しかしながら、複数の図表が関連するなどのことから、摩擦損失を見積もる方法としては簡便とは言い難い。また、シミュレーターに組み込むためには何らかの工夫が必要である。なお、塑性流体同心二重円管内流れの流動解析を簡便に行うためには、次のことに留意しなければならない。その1つは、せん断応力が零なる位置は、内管側の速度と外管側の速度とが一致する条件によって方程式として表されるが、その解は数値解法に依らなければならないことである。2つめは、平均壁面せん断応力の表示式には応力比（降伏応力と平均壁面せん断応力

*2019年3月5日受付 2019年10月10日受理

1. 正会員 元一関工業高等学校 教授

2. 正会員 東海大学海洋学部 教授

3. 正会員 元東海大学海洋学部 教授

【著者連絡先】E-mail: hatake@my.email.ne.jp

キーワード: 同心二重円管, 掘削泥水, ハーシェル・バルクレイ流体, ビンガム流体, 粘度係数, 表計算解法

Fig. 1 Geometry and velocity distribution of viscoplastic fluid flow in a concentric annulus.

との比)が含まれているため、平均壁面せん断応力すなわち摩擦損失を求めるに当たっては数値解法に依らなければならないことである。著者らは、同心二重円管内流れの両極限は円管および平行平板内流れに対応することを踏まえ、せん断応力が零となる位置の数値解法に触れずに、擬塑性(べき乗則)流体同心二重円管内層流における平均壁面せん断応力を直接計算できる近似式を提示した⁷⁾。また、著者らは、ハーシェル・バルクレイ流体円管および平行平板内流れにおける壁面せん断応力を直接求めることができる近似式を導出し、かつその誤差評価を行った⁸⁾。

そこで、本研究では、著者らの既往の研究結果^{7,8)}を踏まえ、塑性流体同心二重円管内層流における平均壁面せん断応力を簡便に計算できる方法について検討した。すなわち、塑性流体同心二重円管における粘度係数の近似式を円管および平行平板の結果を用いて導出し、その近似関数によって表される平均壁面せん断応力の誤差評価を行った。また、数値解法を用いないで直接計算できるより簡便な近似式を導出し、その誤差評価も行った。さらに、坑井掘削分野において慣習的に行われている同心二重円管内流れに対する平行平板内流れによる近似の適用性を確認するために誤差評価を行った。なお、本研究における数値計算は、前報⁸⁾と同様に表計算ソフトを用いて行った。

2. 塑性流体同心二重円管内流動の基礎式

2・1 セン断応力分布および栓流部パラメータ

Fig. 1 に示す円柱座標系における一次元定常流れの運動方程式は、せん断応力 τ_{rz} を用いれば、次式のように表される。

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \tau_{rz}) = R_o \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (1)$$

ここに、 $\xi = r/R_o$ である。式(1)を積分すれば、同心二重円管内におけるせん断応力分布は、次式によって表される。

$$\tau_{rz} = \frac{R_o}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left(\xi - \frac{\chi_{f,A}^2}{\xi} \right) \quad (2)$$

ここに、 $\chi_{f,A}$ は、境界条件として設定されたせん断応力が零となる無次元半径(= R_m/R_o) である。なお、管摩擦圧力勾配は、平均壁面せん断応力 $\tau_{wf,A}$ および水力直径 D_{hA} を用いて表せば、次式のようになる。

$$\left(-\frac{dp}{dz} \right) = \frac{4\tau_{wf,A}}{D_{hA}} \quad (3)$$

$$D_{hA} = 2(R_o - R_i) = 2R_o(1 - \zeta_A) \quad (4)$$

ここに、 ζ_A は管径比(= R_i/R_o) である。したがって、式(3)を式(2)に代入すれば、無次元せん断応力分布に対して、次式が得られる。

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_{wf,A}} = \frac{\xi^2 - \chi_{f,A}^2}{(1 - \zeta_A)\xi} \quad (5)$$

なお、式(2)、(3)および(5)は流体の種類に係わらず成立するゆえ、流体の種類を表す指標 f は特に指定していない。

さて、栓流部境界の内管側および外管側の無次元半径を χ_i (= R_{pi}/R_o) および χ_o (= R_{po}/R_o) とすれば、それぞれにおけるせん断応力の絶対値は共に降伏応力 τ_y であるから次式が得られる。

$$\frac{\chi_i^2 - \chi_{f,A}^2}{(1 - \zeta_A)\chi_i} = \frac{-\tau_y}{\tau_{wf,A}} = -a, \quad (f=B, HB) \quad (6a)$$

$$\frac{\chi_o^2 - \chi_{f,A}^2}{(1 - \zeta_A)\chi_o} = \frac{\tau_y}{\tau_{wf,A}} = -a, \quad (f=B, HB) \quad (6b)$$

ここに、 a は応力比である。上式は、 χ_i および χ_o について、それぞれ二次方程式であり、その解として、次式が得られる。

$$\chi_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{T^2 + 4\chi_{f,A}^2} - T \right), \quad (f=B, HB) \quad (7)$$

$$\chi_o = \frac{1}{2} \left(\sqrt{T^2 + 4\chi_{f,A}^2} + T \right), \quad (f=B, HB) \quad (8)$$

ここに、 T は応力比に関するパラメータであり、次式によって表される。

$$T = a(1 - \zeta_A) \quad (9)$$

なお、式(7)と式(8)とを掛ければ、次式なる関係式が得られる。

$$\chi_i \chi_o = \chi_{f,A}^2, \quad (f=B, HB) \quad (10)$$

2・2 速度分布、管内平均流速ならびに平均壁面せん断応力

ハーシェル・バルクレイ流体($f=HB$)のレオロジー方程式は、同心二重円管内流れに対しては、次式によって表される。

$$\tau_{rz} = \tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left| \frac{dv}{d\xi} \right|^{n-1} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right), \quad |\tau_{rz}| > \tau_y \quad (11)$$

式(2)と式(11)とを等置し、式(3)および(4)を用いれば、速度勾配に関して次式が得られる(付録A参照)。

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{D_{hA}}{2(1 - \zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \times \begin{cases} g_{HB,i}(\xi; \zeta_A, a, n), & \zeta_A \leq \xi \leq \chi_i \\ 0, & \chi_i \leq \xi \leq \chi_o \\ -g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n), & \chi_o \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

ここに、

$$g_{HB,i}(\xi; \zeta_A, a, n) = \left\{ \chi_{HB,A}^2 / \xi - \xi - a(1 - \zeta_A) \right\}^{1/n} \quad (13a)$$

$$g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) = \left\{ \xi - \chi_{HB,A}^2 / \xi - a(1 - \zeta_A) \right\}^{1/n} \quad (13b)$$

である。それらは表記を簡単にするために定義したものであり、無次元速度勾配を表す。よって、式(12)を積分すれば、速度分布は次式によって表される。

$$v = \frac{D_{hA}}{2(1 - \zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \times \begin{cases} \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt, & \zeta_A \leq \xi \leq \chi_i \\ v_p, & \chi_i \leq \xi \leq \chi_o \\ \int_{\xi}^1 g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt, & \chi_o \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

ここに、 v_p は栓流部の速度に関係し、栓流部境界における速度は同一であるから、次式が成立する。

$$v'_p = \int_{\zeta_A}^{\chi_i} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt = \int_{\chi_o}^1 g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt \quad \dots\dots\dots (15)$$

さて、速度分布が得られれば、管内平均流速 V_M は、流量を管路断面積で除すことによって、次式のように示される。

$$V_M = \frac{2}{(1-\zeta_A^2)} \int_{\zeta_A}^1 \xi v d\xi$$

$$= \frac{D_{hA}}{8(1-\zeta_A^2)(1-\zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \Omega_{HB,A} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\Omega_{HB,A}$ は無次元流量係数⁵⁾であり、次式によって表される(付録B参照)。

$$\Omega_{HB,A} = 4 \int_{\chi_o}^1 \xi^2 g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi - 4 \int_{\zeta_A}^{\chi_i} \xi^2 g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \quad \dots\dots\dots (17)$$

なお、式(14)で表される速度分布を管内平均流速によって無次元化すれば、次式のように表される。

$$\frac{v}{V_M} = \frac{4(1-\zeta_A^2)}{\Omega_{HB,A}} \times \begin{cases} \int_{\zeta_A}^{\xi} \{ \chi_{HB,A}^2 / t - t - a(1-\zeta_A) \}^{1/n} dt, & \zeta_A \leq \xi \leq \chi_i \\ \int_{\xi}^1 \{ t - \chi_{HB,A}^2 / t - a(1-\zeta_A) \}^{1/n} dt, & \chi_i \leq \xi \leq \chi_o \end{cases} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、擬塑性流体同心二重円管内流れの場合⁷⁾と同様に、流路係数 $\Phi_{HB,A}$ を導入すれば、管内平均流速は次式のように変形される。

$$V_M = \frac{D_{hA}}{8} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \Phi_{HB,A} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $\Phi_{HB,A}$ は次式によって定義される。

$$\Phi_{HB,A} = \frac{\Omega_{HB,A}}{(1-\zeta_A^2)(1-\zeta_A)^{1+1/n}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

したがって、平均壁面せん断応力は、次式のように表される。

$$\tau_{wHB,A} = K \left(\frac{1}{\Phi_{HB,A}} \cdot \frac{8V_M}{D_{hA}} \right)^n = K \left(\frac{\dot{\gamma}_A}{Y_{HB,A}} \right)^n \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $\dot{\gamma}_A$ および $Y_{HB,A}$ は同心二重円管流れにおける見掛けせん断速度および粘度係数であり、それぞれ次式によって定義される。

$$\dot{\gamma}_A = \frac{8V_M}{\phi_A D_{hA}}, \quad Y_{HB,A} = \frac{\Phi_{HB,A}}{\phi_A} \quad \dots\dots\dots (22), (23)$$

なお、式(22)および(23)における ϕ_A は、同心二重円管における形状係数⁷⁾であり(付録C参照)、粘度係数は流路係数を形状係数によって標準化した係数といえることができる。このように平均壁面せん断応力は、式(21)によって形式上簡潔に表されるが、その値を求めるためには、与えられた条件に対して流路係数 $\Phi_{HB,A}$ の値を知る必要がある。そのためには無次元半径 $\chi_{HB,A}$ および無次元流量係数 $\Omega_{HB,A}$ の値を知る必要がある。

さて、せん断応力が零なる無次元半径 $\chi_{HB,A}$ は、式(15)を解くことによって得られる。式(15)を書き直せば、次式のようになる。

$$\int_{\zeta_A}^{\chi_i} \{ \chi_{HB,A}^2 / \xi - \xi - a(1-\zeta_A) \}^{1/n} d\xi$$

$$- \int_{\chi_o}^1 \{ \xi - \chi_{HB,A}^2 / \xi - a(1-\zeta_A) \}^{1/n} d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (15)'$$

式(15)'は、べき指数 n の逆数 $s (=1/n)$ が整数の場合、擬塑性流

Fig.2 Dimensionless radius of which shear stress is zero for Bingham fluid flow in a concentric annulus.

体の場合⁷⁾と同様に解析的に積分することができる。しかしながら、指数 s の値が大きくなれば、積分結果は項数の多い式となり、かつ $\chi_{HB,A}$ の求解は高次方程式の根を求める問題に帰着することに留意する必要がある。

なお、ビンガム流体の場合には解析解が得られるゆえ、まず、ビンガム流体の結果について確認すると共に表計算ソフトを用いた計算法を示す。その後、ハーシェル・バルクレイ流体の結果について数値解析結果を基に展開することとする。

3. ビンガム流体の同心二重円管内流動

3・1 解析結果ならびに各係数の値

ビンガム流体 ($f=B, n=1$) の場合には式(15)'は次式のように表される。

$$\int_{\zeta_A}^{\chi_i} (\chi_{B,A}^2 / \xi - \xi - T) d\xi - \int_{\chi_o}^1 (\xi - \chi_{B,A}^2 / \xi - T) d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

上式を積分し、整理すれば、次式のようになる。

$$2\chi_{B,A}^2 \ln \left(\frac{\chi_i}{\chi_o \zeta_A} \right) + (\chi_i + \chi_o)(\chi_i - \chi_o - 2T) - (1 + \zeta_A)(1 - \zeta_A - 2T) = 0 \quad \dots\dots\dots (25a)$$

式(25a)において、 χ_i および χ_o はそれぞれ式(7)および(8)によって表されるから、それらを消去すれば、次式が得られる。

$$2\chi_{B,A}^2 \left\{ \ln \left(\sqrt{T^2 + 4\chi_{B,A}^2} - T \right) - \ln \left(\sqrt{T^2 + 4\chi_{B,A}^2} + T \right) - \ln \zeta_A \right\}$$

$$- T \sqrt{T^2 + 4\chi_{B,A}^2} - (1 + \zeta_A)(1 - \zeta_A - 2T) = 0 \quad \dots\dots\dots (25b)$$

式(25b)は $\chi_{B,A}$ に関して無理方程式であるから、その根を求めるためには数値解法に依らなければならない。なお、 $\chi_{B,A}$ の値を仮定すれば、式(25b)の左辺の値は計算できるから、その値が0となるように $\chi_{B,A}$ の値を決めればよい(その具体的な計算方法については後述する)。数値解法結果を図示すれば、Fig.2のとおりである。

無次元流量係数である式(17)は、ビンガム流体の場合、次式によって表される³⁾。

$$\Omega_{B,A} = 4 \int_{\chi_o}^1 (\xi^3 - \chi_{B,A}^2 \xi - T \xi^2) d\xi - 4 \int_{\zeta_A}^{\chi_i} (\chi_{B,A}^2 \xi - \xi^3 - T \xi^2) d\xi \quad \dots\dots\dots (26)$$

上式を積分し、整理すれば、次式が得られる。

$$\Omega_{B,A} = (1 - \zeta_A^4) - 2\chi_{B,A}^2 (1 - \zeta_A^2) - \frac{4}{3} T (1 + \zeta_A^3)$$

$$- (\chi_o^4 - \chi_i^4) + 2\chi_{B,A}^2 (\chi_o^2 - \chi_i^2) + \frac{4}{3} T (\chi_i^3 + \chi_o^3) \quad \dots\dots\dots (27a)$$

Fig.3 Dimensionless flow rate for Bingham fluid flow in a concentric annulus.

さらに、 $\chi_{B,A}$ の場合と同様に χ_i および χ_o を消去すれば、次式のようになる。

$$\Omega_{B,A} = (1 - \zeta_A^2)(1 + \zeta_A^2 - 2\chi_{B,A}^2) + \frac{1}{3}T(T^2 + 4\chi_{B,A}^2)^{3/2} - \frac{4}{3}T(1 + \zeta_A^3) \dots (27b)$$

$\Omega_{B,A}$ の計算結果を図示すれば、Fig. 3 のとおりである。

また、式 (20) によって定義される流路係数は、ビンガム流体の場合、次式によって表される。

$$\Phi_{B,A} = \frac{\Omega_{B,A}}{(1 - \zeta_A^2)(1 - \zeta_A)^2} \dots (28a)$$

$$= \frac{(1 + \zeta_A^2 - 2\chi_{B,A}^2)}{(1 - \zeta_A)^2} + \frac{1}{3} \frac{T(T^2 + 4\chi_{B,A}^2)^{3/2}}{(1 - \zeta_A^2)(1 - \zeta_A)^2} - \frac{4}{3} \frac{T(1 + \zeta_A^3)}{(1 - \zeta_A^2)(1 - \zeta_A)^2} \dots (28b)$$

$\Phi_{B,A}$ の計算結果を図示すれば、Fig. 4 のとおりである。

3・2 平均壁面せん断応力の表計算解法

式 (21) で表される平均壁面せん断応力は、ビンガム流体の場合、ビンガム粘度を μ_B とすれば、次式によって表される。

$$\tau_{wB,A} = \mu_B \left(\frac{1}{\Phi_{B,A}} \cdot \frac{8V_M}{D_{hA}} \right) = \mu_B \left(\frac{\dot{\gamma}_A}{Y_{B,A}} \right) \dots (29)$$

ここに、

$$Y_{B,A} = \Phi_{B,A} / \phi_A \dots (30)$$

である。式 (28b) で示されるビンガム流体の流路係数には、 T すなわち式 (9) のとおり応力比が含まれているため、式 (29) は $\tau_{wB,A}$ に対して非線形である。したがって、数値解法によって $\tau_{wB,A}$ を求めなければならない。前述した $\chi_{B,A}$ の解法を含めて、前報⁸⁾と同様に表計算ソフトに備わっているゴールシークを用いた計算手順を示せば、Fig. 5 のとおりである。ただし、2つのゴールシークは収束するまで交互に繰り返し実行する必要がある。このように、ビンガム流体同心二重円管内流れにおける平均壁面せん断応力は、与えられた条件に対して、表計算ソフトを用いることによって容易に計算できる。

4. ハーシェル・バルクレイ流体の同心二重円管内流動

4・1 数値解析結果

4・1・1 各係数の値 前述のように、式 (15)' を解析的に積分し、任意のべき指数 n に対しては補間する必要があることから、せん断応力が零なる無次元半径 $\chi_{HB,A}$ の値を求めるためには

Fig.4 Dimensionless conduit factor for Bingham fluid flow in a concentric annulus.

Fig.5 Calculating procedure for average wall shear stress of Bingham fluid flow in a concentric annulus.

かなりの手数を要する。そこで、式 (15)' を直接数値積分して求めることとした。また、式 (17) によって表される無次元流量係数 $\Omega_{HB,A}$ は、後述する近似式の近似度を評価するためにも用いることから、精度よく数値積分する必要がある。このことを踏まえ、表計算ソフトで処理することを念頭に、ニュートン・コース (Newton-Cotes) 積分公式の次数 $M=1$ ($M=1$ のとき台形則、 $M=2$ のときシンプソンの 1/3 則、 $M=3$ のとき 3/8 則) および積分区分数 N_ξ について検討した。その結果、3/8 則の複合公式を用い、 $N_\xi=39$ とすれば、 $\chi_{HB,A}$ および式 (17) の数値積分結果とビンガム流体ならびに擬塑性流体の厳密解との相対誤差を共に 10^{-5} 以下とすることができた。なお、ニュートン・コース積分公式は被積分関数を $f(x)$ 、分点を $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+M}$ とすれば、次式によって表される。

$$\int_{x_j}^{x_{j+M}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^M C_k f(x_{j+k}) \dots (31)$$

$$C_i = \int_{x_j}^{x_{j+M}} \prod_{k=0, k \neq i}^M \frac{x - x_{j+k}}{x_{j+i} - x_{j+k}} dx \dots (32)$$

さて、式 (15)' において、 $\chi_{HB,A}$ の値を仮定すれば、栓流部境

Fig.6 Calculating procedure for dimensionless radius of which shear stress is zero for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

Fig.7 Dimensionless radius of which shear stress is zero for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

界の無次元半径 χ_i および χ_o は式(7)および(8)によって与えられるから、式(15)'の左辺第1項および第2項の積分値を S_i および S_o とすれば、 $S_i - S_o = 0$ となるように $\chi_{HB,A}$ の値を決めればよい。表計算ソフトによる計算手順を示せば、Fig. 6のとおりである。Fig. 7はハーシェル・バルクレイ流体に対する計算結果を $\chi_{HB,A}$ に及ぼす a および n の影響として図示したものである。各管径比 ζ_A において $a=0$ かつ $n=1$ の場合、すなわちニュートン流体の場合、 $\chi_{HB,A}$ の値は付録の式(C1)によって表され、最大となっている。また、 ζ_A が大きいほどカラーマッピングが単色傾向となっており、 $\chi_{HB,A}$ に及ぼす a および n の影響は小さいと言える。

式(17)によって表される無次元流量係数 $\Omega_{HB,A}$ の数値計算結果を図示すれば、Fig. 8のように示される。ニュートン流体の場合、付録の式(C2)によって表され、その場合に最大となっている。管径比が大きくなれば、Fig. 3によって示唆されるように、急激に小さくなる。

流路係数 $\Phi_{HB,A}$ は式(20)によって表されるゆえ、 $\Omega_{HB,A}$ の数値計算結果を用いて計算することができる。Fig. 9はその計算結果を図示したものである。ニュートン流体の場合、付録の式(C3)によって表され、その場合に最大となっている。

4・1・2 セン断応力分布および速度分布 無次元せん断応力分布は式(5)によって、また無次元速度分布は式(18)によって表される。べき指数を $n=0.5$ 一定とし、管径比が $\zeta_A=0.2$ および $\zeta_A=0.8$ の場合について計算結果を例示すれば、Fig. 10およびFig. 11のとおりである。

せん断応力分布についてみれば、それらに及ぼす応力比 a の影響は、両壁面におけるせん断応力と同程度となっており、また、管径比が大きい方がその影響は小さくなっている。このことにつ

いては次のように考えることができる。内管側および外管側の壁面せん断応力 τ_i 、 τ_o は、それぞれ次式によって表される。

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wHB,A}} = \frac{\chi_{HB,A}^2 - \zeta_A^2}{(1 - \zeta_A)\zeta_A} \quad (33)$$

$$\frac{\tau_o}{\tau_{wHB,A}} = \frac{1 - \chi_{HB,A}^2}{1 - \zeta_A} \quad (34)$$

式(33)および(34)に示されるように壁面せん断応力は、せん断応力が零なる無次元半径 $\chi_{HB,A}$ によって直接的に影響される。 $\chi_{HB,A}$ に及ぼす応力比 a の影響は、Fig. 7に示されるように、 ζ_A が大きいほど小さくなっている。したがって、せん断応力分布も管径比が大きいほど応力比の影響は受けないと言える。

速度分布についてみれば、栓流部の幅は、見かけ上管径比によって違いがみられない。すなわち、栓流部の相対幅は次式によって表される。

$$\frac{R_{po} - R_{pi}}{R_o - R_i} = \frac{\chi_o - \chi_i}{1 - \zeta_A} = a \quad (35)$$

したがって、栓流部の相対幅は応力比 a によって一義的に決定されることから、無次元速度分布における平坦部は、管径比によって影響を受けないことが分かる。

4・2 流路係数の数値計算結果に対する近似式

平均壁面せん断応力 $\tau_{wHB,A}$ は式(21)によって表されるから、その値を得るためには流路係数 $\Phi_{HB,A}$ の値が与えられなければならない。前述のようにハーシェル・バルクレイ流体の場合、 $\Omega_{HB,A}$ は応力比 a およびべき指数 n の関数形として表すことができないことから、 $\Phi_{HB,A}$ も関数形として与えることができない。

Fig.8 Dimensionless flow rate for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

Fig.9 Dimensionless conduit factor for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

Fig.10 Dimensionless distributions of velocity and shear stress for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus (\$\zeta_A=0.2\$).

Fig.11 Dimensionless distributions of velocity and shear stress for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus (\$\zeta_A=0.8\$).

それゆえ、平均壁面せん断応力の値を簡便に得るためには、何らかの方法を講じなければならない。Hanks⁵⁾と同様に数値計算結果の図表を用いる方法は手数を要することおよびシミュレーターに組み込むこと等を勘案して、本研究においては前報⁷⁾の擬塑性流体の場合と同様に流路係数を近似式によって表すこととした。

ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内流れにおける流路係数の近似式を導出するに当たって考慮すべきことは、近似式 $\hat{\Phi}_{HB,A}$ は円管内流れおよび平行平板内流れならびにニュートン流体流れに対しても適用できるようにすることである。すなわち、次式を満足するようにする必要がある。

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 0} \hat{\Phi}_{HB,A} = \Phi_{HB,C} \quad \dots \quad (36)$$

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 1} \hat{\Phi}_{HB,A} = \Phi_{HB,PP} \quad \dots \quad (37)$$

なお、ニュートン流体における流路係数である形状係数 ϕ_A に関しては次式が成立する⁷⁾。

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 0} \phi_A = \phi_C (=1) \quad \dots \quad (38)$$

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 1} \phi_A = \phi_{PP} (=2/3) \quad \dots \quad (39)$$

これらのことを踏まえれば、簡単な近似式として、次式を提示することができる。

$$\hat{\Phi}_{HB,A} = \phi_A \left\{ (1 - \zeta_A^{m_{HB}}) \frac{\Phi_{HB,C}}{\phi_C} + \zeta_A^{m_{HB}} \frac{\Phi_{HB,PP}}{\phi_{PP}} \right\} \quad \dots \quad (40)$$

ここに、指数 m_{HB} は近似度を上げるために導入したものであり、その値については後述する。また、円管内流れの流路係数 $\Phi_{HB,C}$ および平行平板内流れの流路係数 $\Phi_{HB,PP}$ は、それぞれ次式によって表される⁸⁾。

$$\Phi_{HB,C} = \phi_C Y_{HB,C} \dots\dots\dots (41)$$

$$\Phi_{HB,PP} = \phi_{PP} Y_{HB,PP} \dots\dots\dots (42)$$

式 (41) および (42) を式 (40) に代入すれば、次式が得られる。

$$\hat{\Phi}_{HB,A} = \phi_A \left\{ (1 - \zeta_A^{m_{HB}}) Y_{HB,C} + \zeta_A^{m_{HB}} Y_{HB,PP} \right\} \dots\dots\dots (43a)$$

$$= \phi_A \hat{Y}_{HB,A} \dots\dots\dots (43b)$$

式 (43b) の $\hat{Y}_{HB,A}$ は同心二重円管内流れの粘度係数に対する近似式であり、次式のようになる。

$$\hat{Y}_{HB,A} = (1 - \zeta_A^{m_{HB}}) Y_{HB,C} + \zeta_A^{m_{HB}} Y_{HB,PP} \dots\dots\dots (44a)$$

$$= (1 - \zeta_A^{m_{HB}}) Y_{P,C} G_{HB,C} + \zeta_A^{m_{HB}} Y_{P,PP} G_{HB,PP} \dots\dots\dots (44b)$$

ここに、

$$Y_{P,C} = \frac{4n}{1+3n}, Y_{P,PP} = \frac{3n}{1+2n} \dots\dots\dots (45), (46)$$

$$G_{HB,C} = (1-a)^{1+1/n} \left\{ 1 + \frac{2n}{1+2n} a + \frac{2n^2}{(1+2n)(1+n)} a^2 \right\} \dots\dots\dots (47a)$$

$$= (1-a)^{1/n} \left\{ 1 - \frac{a}{1+2n} - \frac{2na^2}{(1+2n)(1+n)} - \frac{2n^2 a^3}{(1+2n)(1+n)} \right\} \dots\dots\dots (47b)$$

$$G_{HB,PP} = (1-a)^{1+1/n} \left(1 + \frac{n}{1+n} a \right) \dots\dots\dots (48a)$$

$$= (1-a)^{1/n} \left(1 - \frac{1}{1+n} a - \frac{n}{1+n} a^2 \right) \dots\dots\dots (48b)$$

である⁸⁾。したがって、流路係数を式 (40) で近似した場合、同心二重円管内流れの粘度係数は、式 (44a) によって示されるように、円管および平行平板内流れの粘度係数 $Y_{HB,C}$ および $Y_{HB,PP}$ との加重平均によって表されるということができる。

さて、ハーシェル・バルクレイ流体に対して近似度を上げるために導入した指数 m_{HB} は、厳密解によって得られた $\Phi_{HB,A}$ と近似式による $\hat{\Phi}_{HB,A}$ との偏差の二乗和を最小にするように次のようにして決定した。すなわち、任意の指数値 m に対して式 (43a) は次式のように表される。

$$\hat{\Phi}_{HB,A}(\zeta_A; m) = \phi_A \left\{ (1 - \zeta_A^m) Y_{HB,C} + \zeta_A^m Y_{HB,PP} \right\}$$

したがって、偏差二乗和の平方根 L_2 は次式によって表される。

$$L_2(m) = \left[\int_0^1 \left\{ \Phi_{HB,A} - \hat{\Phi}_{HB,A}(\zeta_A; m) \right\}^2 d\zeta_A \right]^{1/2} \\ \cong \left[\sum_{j=1}^{N_\zeta-1} \left\{ (\Phi_{HB,A})_j - \hat{\Phi}_{HB,A}(j\Delta\zeta_A; m) \right\}^2 \Delta\zeta_A \right]^{1/2} \dots\dots\dots (49)$$

ここに、 $\Delta\zeta_A = 1/N_\zeta$ であり、 $N_\zeta = 10$ とした。式 (49) において、 m の値を与えれば、 L_2 は計算されるから、 m に対して L_2 をプロットして図示すれば、極小における m の値を m_{HB} とすることができる。計算結果を $n = 0.6$ あるいは $a = 0.5$ の場合について例示すれば、Fig. 12 のとおりである。同図に示されるように極小値が存在し、この極小における m_{HB} の値について図示すれば、Fig. 13 のとおりである。同図に示されるように m_{HB} は a および n に依存している。その相関式について種々試みたところ次式が得られた。

Fig.12 Relation between root of residual-square-sum L_2 and power exponent m .

Fig.13 Minimum values m_{HB} in root of residual-square-sum L_2 .

$$m_{HB} = 0.56 - 0.2n \left\{ 2 - \exp(-20a) \right\} \dots\dots\dots (50)$$

なお、Fig. 13 における実線が相関式による計算結果を示す。

さて、ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内流れにおける平均壁面せん断応力の近似式 $\hat{\tau}_{wHB,A}$ は、式 (21) と式 (43) とより、次式によって表される。

$$\hat{\tau}_{wHB,A} = K \left(\frac{1}{\hat{\Phi}_{HB,A}} \cdot \frac{8V_M}{D_{hA}} \right)^n = K \left(\frac{\dot{\gamma}_A}{\hat{Y}_{HB,A}} \right)^n \dots\dots\dots (51)$$

式 (51) を考慮し、 $\hat{\Phi}_{HB,A}$ の近似度について検討する。その近似度 $\varepsilon_{HB,A}$ を厳密解 $\Phi_{HB,A}$ との比によって定義すれば、次式が成立する。

$$(\varepsilon_{HB,A})^n = (\hat{\Phi}_{HB,A} / \Phi_{HB,A})^n = (\hat{Y}_{HB,A} / Y_{HB,A})^n \dots\dots\dots (52a)$$

$$= \tau_{wHB,A} / \hat{\tau}_{wHB,A} \dots\dots\dots (52b)$$

式 (52a) の計算結果を図示すれば、Fig. 14 のとおりである。同図に示されるように管径比が $\zeta_A \geq 0.2$ であれば、応力比 a およびべき指数 n に関係なく $0.98 < (\varepsilon_{HB,A})^n < 1.02$ となっている。すなわち、同心二重円管流れにおける平均壁面せん断応力の近似式 (51) の誤差は、 $\zeta_A \geq 0.2$ では $\pm 2\%$ 以下である。

ところで、式 (51) における右辺の粘度係数の近似式 $\hat{Y}_{HB,A}$ に

Fig.14 Order of approximation defined by Eq.(52a) for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

は応力比すなわち平均壁面せん断応力が含まれている。管内平均流速 V_M を与えるものとすれば、式 (51) は $\hat{\tau}_{wHB,A}$ を未知数とする非線形方程式であるから、数値解法によって求める必要がある。表計算ソフトを用いた計算手順を示せば、Fig. 15 のとおりである。

4・3 粘度係数および平均壁面せん断応力の一次近似式

ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内流れにおける平均壁面せん断応力の近似式 $\hat{\tau}_{wHB,A}$ は式 (51) によって表され、前述のように数値解法によって求める必要がある。そこで、より簡便さを考えて数値解法を用いない方法について検討する。

粘度係数の近似式は式 (44b) によって表され、そこに含まれる $G_{HB,C}$ および $G_{HB,PP}$ はそれぞれ式 (47) および (48) によって表されるから、応力比 a について一次近似し、かつ指数 m_{HB} に a が含まれないようにすれば、平均壁面せん断応力について陽に表すことができる。そこで、指数については擬塑性流体 ($a=0$) に対する適用を念頭におき、式 (50) を次式のようにした上で、

$$m_{PB} = 0.56 - 0.2n \quad (53)$$

式 (51) を変形し、 a の二次以上の項を省略して展開すれば、次式が得られる (付録 D 参照)。

$$\frac{K}{\hat{\tau}_{wHB,A}} \dot{\gamma}_A^n = \hat{Y}_{P,A}^n (1 - F_{P,A} \tilde{a}) \quad (54)$$

ここに、 $\hat{Y}_{P,A}$ は前報⁷⁾において提示した擬塑性流体同心二重円管内流れにおける粘度係数の近似式であり、次式によって表される。

$$\hat{Y}_{P,A} = (1 - \zeta_A^{m_{PB}}) Y_{P,C} + \zeta_A^{m_{PB}} Y_{P,PP} \quad (55)$$

Fig.15 Calculating procedure for average wall shear stress of Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

また、 $F_{P,A}$ は次式によって表される。

$$F_{P,A} = \frac{1+3n}{1+n} \cdot \frac{4(1+n) - (1-2n)\zeta_A^{m_{PB}}}{4(1+2n) - (1-n)\zeta_A^{m_{PB}}} \quad (56)$$

さて、式 (54) を応力比 $\tilde{a} = \tau_y / \hat{\tau}_{wHB,A}$ に注意し変形すれば、平均壁面せん断応力を直接求めることができる次式が得られる。

$$\hat{\tau}_{wHB,A} = F_{P,A} \tau_y + K \left(\frac{\dot{\gamma}_A}{\hat{Y}_{P,A}} \right)^n \quad (57)$$

また、式 (54) は次のようにも変形できる。

$$\hat{\tau}_{wHB,A} = K \left\{ \frac{\dot{\gamma}_A}{\hat{Y}_{P,A} (1 - F_{P,A} \tilde{a})^{1/n}} \right\}^n \quad (58)$$

式 (58) の右辺の分母はハーシェル・バルクレイ流体の粘度係数と見做されるから、次式を定義することができる。

$$\hat{Y}_{HB,A} = \hat{Y}_{P,A} (1 - F_{P,A} \tilde{a})^{1/n} \quad (59)$$

また、一次近似の流路係数 $\tilde{\Phi}_{HB,A}$ は

$$\tilde{\Phi}_{HB,A} = \phi_A \hat{Y}_{HB,A} \quad (60)$$

のように表されるから、一次近似の平均壁面せん断応力 $\hat{\tau}_{wHB,A}$ は、式 (21) と同形式によって、次式のようにも表される。

$$\hat{\tau}_{wHB,A} = K \left(\frac{\dot{\gamma}_A}{\hat{Y}_{HB,A}} \right)^n = K \left(\frac{1}{\tilde{\Phi}_{HB,A}} \cdot \frac{8V_M}{D_{hA}} \right)^n \quad (61)$$

なお、式 (56) および (59) は円管および平行平板内流れに対して、それぞれ次式のようになる。

Fig.16 Order of approximation defined by Eq.(66a) for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 0} F_{P,A} = \frac{1+3n}{1+2n}, \quad \lim_{\zeta_A \rightarrow 1} F_{P,A} = \frac{1+2n}{1+n} \quad \dots\dots\dots (62), (63)$$

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 0} \tilde{Y}_{HB,A} = \frac{4n}{1+3n} \left(1 - \frac{1+3n}{1+2n} \tilde{a} \right)^{1/n} = \tilde{Y}_{HB,C} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\lim_{\zeta_A \rightarrow 1} \tilde{Y}_{HB,A} = \frac{3n}{1+2n} \left(1 - \frac{1+2n}{1+n} \tilde{a} \right)^{1/n} = \tilde{Y}_{HB,PP} \quad \dots\dots\dots (65)$$

式(64)および(65)の結果は前報⁸⁾において示した結果と一致する。すなわち、係数 $F_{P,A}$ は円管および平行平板内流れに対しても適用できることが確認できる。

ここで、一次近似の流路係数 $\tilde{\Phi}_{HB,A}$ の近似度 $e_{HB,A}$ を厳密解 $\Phi_{HB,A}$ との比によって定義すれば、次式が成立する。

$$(e_{HB,A})^n = (\tilde{\Phi}_{HB,A} / \Phi_{HB,A})^n = (\tilde{Y}_{HB,A} / Y_{HB,A})^n \quad \dots\dots\dots (66a)$$

$$= \tau_{wHB,A} / \tilde{\tau}_{wHB,A} \quad \dots\dots\dots (66b)$$

式(66a)の計算結果を図示すれば、Fig. 16のとおりである。同図より応力比 a が0.4程度より大きくなれば、近似度は急激に悪化するが、 a が0.4以下であれば、べき指数 n の値に係わらず、 $1 > (e_{HB,A})^n > 0.95$ となっている。すなわち、同心二重円管内流れにおける平均壁面せん断応力の近似式である式(57)の誤差は、 $a < 0.4$ では5%以下である。

ところで、坑井掘削の分野においては、同心二重円管内流れは慣習的に平行平板内流れによって近似されていることから^{1,2)}、その近似度について検討する。平行平板内流れにおける壁面せん断応力の近似式は、Zamoraら²⁾も示しているが、前報⁸⁾で検討したとおり、その計算結果は式(57)を平行平板内流れに適用した結果とほぼ一致している。そこで近似度を本研究結果によって検討すれば次のとおりである。平行平板内流れにおける壁面せん断応力の

Fig.17 Order of approximation defined by Eq.(69a) for Hershel-Bulkley fluid flow in a concentric annulus.

次近似式は、式(61)と同形式によって表せば、次式ようになる。

$$\tilde{\tau}_{wHB,PP} = K \left(\frac{1}{\tilde{\Phi}_{HB,PP}} \cdot \frac{8V_M}{D_{hPP}} \right)^n \quad \dots\dots\dots (67)$$

ここに、

$$\tilde{\Phi}_{HB,PP} = \phi_{PP} \tilde{Y}_{HB,PP} \quad \dots\dots\dots (68)$$

である。この場合の近似度を $e_{HB,PP-A} = \tilde{\Phi}_{HB,PP} / \Phi_{HB,A}$ によって定義すれば、次式が成立する。ただし、 $D_{hA} = D_{hPP}$ とする。

$$(e_{HB,PP-A})^n = (\tilde{\Phi}_{HB,PP} / \Phi_{HB,A})^n = \{ (\phi_{PP} \tilde{Y}_{HB,PP}) / (\phi_A Y_{HB,A}) \}^n \quad \dots\dots\dots (69a)$$

$$= \tau_{wHB,A} / \tilde{\tau}_{wHB,PP} \quad \dots\dots\dots (69b)$$

式(69a)の計算結果を図示すれば、Fig. 17のとおりである。同図より管径比 ζ_A が0.8の場合、Fig. 16とほぼ同じであるが、管径比が0.4より小さくなるに従って近似度はかなり悪くなる。したがって、同心二重円管内流れに対して平行平板内流れの結果を適用するには管径比に留意する必要がある。

4・4 レイノルズ数および管摩擦係数

同心二重円管内流れにおける見掛け粘度は、平均壁面せん断応力を見掛けせん断速度で割ることによって定義される⁹⁾。すなわち、ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内流れにおける見掛け粘度 $\eta_{HB,A}$ は次式のようになる。

$$\hat{\eta}_{HB,A} = \frac{\tilde{\tau}_{wHB,A}}{\dot{\gamma}_A} = \frac{K}{\hat{Y}_{HB,A}^n} \dot{\gamma}_A^{n-1} \quad \dots\dots\dots (70a)$$

$$\hat{\eta}_{HB,A} = \frac{\tilde{\tau}_{wHB,A}}{\dot{\gamma}_A} = \left(F_{P,A} \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}_A^n} + \frac{K}{\hat{Y}_{P,A}^n} \right) \dot{\gamma}_A^{n-1} \quad \dots\dots\dots (70b)$$

したがって、レイノルズ数は次式によって表される。

Fig.18 Relation between Reynolds number $\tilde{Re}_{HB,A}$ and pipe friction coefficient λ .

$$\tilde{Re}_{HB,A} = \frac{\rho_x D_{HA} V_M}{\eta_{HB,A}} \phi_A = 8^{1-n} \frac{\rho_x D_{HA} V_M^{2-n}}{K / \hat{\gamma}_{HB,A}^n} \phi_A^n \quad (71a)$$

$$\tilde{Re}_{HB,A} = \frac{\rho_x D_{HA} V_M}{\eta_{HB,A}} \phi_A = 8^{1-n} \frac{\rho_x D_{HA} V_M^{2-n}}{F_{P,A} \tau_y / \hat{\gamma}_A^n + K / \hat{\gamma}_{P,A}^n} \phi_A^n \quad (71b)$$

また、層流における管摩擦係数 λ は、次式のように表される。

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho_x V_M^2} \quad (72a)$$

$$= \frac{64}{\rho_x D_{HA} V_M \phi_A} \cdot \frac{\tau_{wHB,A}}{8V_M / (\phi_A D_{HA})} = \frac{64}{Re_{HB,A}} \quad (72b)$$

さて、以上の結果を検証したいのであるが、ハーシェル・バルクレイ流体の同心二重円管内における流送実験結果は見当たらない。そこで、同心二重円管内流れの両極限、すなわち円管内流れおよび平行平板内流れの既往の実験結果^{10,11)}を用いて検討してみる。式(71a)に相当する結果は前報⁸⁾で示しているゆえ、ここでは数値解法を要しない式(71b)の有効性について検討する。実験結果を式(72a)によって計算される管摩擦係数 λ と式(71b)によって計算されるレイノルズ数 $\tilde{Re}_{HB,A}$ との関係として図示すれば、Fig. 18のとおりである。 $\tilde{Re}_{HB,A} < 10$ の場合、管摩擦係数の値 λ は式(72b)の関係によって表される値よりも幾分か小さくなる傾向が見られる。しかしながら、レイノルズ数 $\tilde{Re}_{HB,A}$ が大きければ、式(71b)によっても十分なる精度で管摩擦係数を表しうることが推察される。

5. おわりに

降伏応力を有する塑性流体同心二重円管内層流流動について検討したところ、次のことが結論として得られた。

- 1) 同心二重円管内における見掛けせん断速度および流路係数を形状係数によって標準化した粘度係数を導入することによって、同心二重円管内における平均壁面せん断応力の表示式を一般形式として示した。
- 2) ビンガム流体同心二重円管内における流路係数を解析的に導出し、かつ、平均壁面せん断応力を表計算ソフトの機能(ゴールシーク)を用いて容易に計算できることを示した。
- 3) ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内における粘度係数の近似式として式(44)を提示した。その近似式を用いた平均壁面せん断応力の誤差評価を行ったところ、管径比が0.2以上では誤差は±2%以下であり、十分なる精度で平均せん断応力を算出できることが分かった。
- 4) ハーシェル・バルクレイ流体同心二重円管内流動において、

数値解法を要しない平均壁面せん断応力の近似式である式(57)を、式(44)を展開して導出した。導出された近似式は円管および平行平板において導出した既往の結果とも一致することを確認した。また、その近似式を用いた平均壁面せん断応力の誤差評価を行ったところ、応力比が0.4以下では誤差が5%以下であった。

- 5) 坑井掘削分野においては、同心二重円管内流れは平行平板内流れによって近似されているが、誤差評価を行ったところ、管径比が0.4より小さくなるに従って近似度はかなり悪くなることが分かった。

付 録

付録A 式(11)はせん断応力およびせん断速度の符号に注意すれば、次式のように表される。

$$\tau_{rz} = \begin{cases} \tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left| \frac{dv}{d\xi} \right|^{n-1} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right), & \frac{dv}{d\xi} < 0 \\ -\tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left| \frac{dv}{d\xi} \right|^{n-1} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right), & \frac{dv}{d\xi} > 0 \end{cases} \quad (A1)$$

したがって、式(A1)と式(2)とを等値し、式(3)および(4)を用いれば、次式が得られる。

$$\frac{\tau_{wHB,A}}{1 - \zeta_A} \left(\xi - \frac{\chi_{HB,A}^2}{\xi} \right) = \begin{cases} \tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left| \frac{dv}{d\xi} \right|^{n-1} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right), & \frac{dv}{d\xi} < 0 \\ -\tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left| \frac{dv}{d\xi} \right|^{n-1} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right), & \frac{dv}{d\xi} > 0 \end{cases} \quad (A2)$$

ここで、同心二重円管内における領域とせん断速度の符号との対応に注意すれば、次式が成立する。

$$\chi_o \leq \xi \leq 1; \quad \frac{dv}{d\xi} \leq 0, \quad \frac{\tau_{wHB,A}}{1 - \zeta_A} \left(\xi - \frac{\chi_{HB,A}^2}{\xi} \right) = \tau_y + \frac{K}{R_o^n} \left(-\frac{dv}{d\xi} \right)^n \quad (A3a)$$

$$\zeta_A \leq \xi \leq \chi_i; \quad \frac{dv}{d\xi} \geq 0, \quad \frac{\tau_{wHB,A}}{1 - \zeta_A} \left(\xi - \frac{\chi_{HB,A}^2}{\xi} \right) = -\tau_y - \frac{K}{R_o^n} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^n \quad (A3b)$$

上式を変形すれば、次式ようになる。

$$\left(-\frac{dv}{d\xi} \right)^n = \frac{R_o^n}{K} \left\{ \frac{\tau_{wHB,A}}{1 - \zeta_A} \left(\xi - \frac{\chi_{HB,A}^2}{\xi} \right) - \tau_y \right\}, \quad \chi_o \leq \xi \leq 1 \quad (A4a)$$

$$\left(\frac{dv}{d\xi} \right)^n = \frac{R_o^n}{K} \left\{ \frac{\tau_{wHB,A}}{1 - \zeta_A} \left(\frac{\chi_{HB,A}^2}{\xi} - \xi \right) - \tau_y \right\}, \quad \zeta_A \leq \xi \leq \chi_i \quad (A4b)$$

なお、

$$\frac{dv}{d\xi} = 0, \quad \chi_i \leq \xi \leq \chi_o \quad (A4c)$$

である。式(A4a)および(A4b)を変形し、式(A4c)を考慮すれば、式(12)が導かれる。

付録B 管内平均流速について、次のように展開することができる。

$$\int_{\zeta_A}^1 \xi v d\xi = \frac{D_{HA}}{2(1 - \zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \int_{\zeta_A}^{\chi_i} \xi \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt d\xi \\ + \frac{D_{HA}}{2(1 - \zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \int_{\chi_o}^1 \xi \int_{\xi}^1 g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt d\xi$$

$$+ \frac{D_{HA}}{2(1-\zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} v'_p \int_{\chi_i}^{\chi_o} \xi d\xi \quad \dots\dots\dots (B1)$$

式 (B1) の右辺第 1 および 2 項に部分積分法を適用すれば、それぞれ次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\chi_A}^{\chi_i} \xi \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left[\xi^2 \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt \right]_{\chi_A}^{\chi_i} - \frac{1}{2} \int_{\chi_A}^{\chi_i} \xi^2 g_{HB,i}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \chi_i^2 \int_{\zeta_A}^{\chi_i} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt - \frac{1}{2} \int_{\chi_A}^{\chi_i} \xi^2 g_{HB,i}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \quad \dots\dots\dots (B2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\chi_o}^1 \xi \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left[\xi^2 \int_{\zeta_A}^{\xi} g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt \right]_{\chi_o}^1 + \frac{1}{2} \int_{\chi_o}^1 \xi^2 g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \chi_o^2 \int_{\zeta_A}^{\chi_o} g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt + \frac{1}{2} \int_{\chi_o}^1 \xi^2 g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \quad \dots\dots\dots (B3) \end{aligned}$$

また、式 (B1) の右辺第 3 項は式 (15) の関係を用いれば、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} v'_p \int_{\chi_i}^{\chi_o} \xi d\xi &= v'_p \frac{1}{2} (\chi_o^2 - \chi_i^2) \\ &= -\frac{1}{2} \chi_i^2 \int_{\zeta_A}^{\chi_i} g_{HB,i}(t; \zeta_A, a, n) dt + \frac{1}{2} \chi_o^2 \int_{\zeta_A}^{\chi_o} g_{HB,o}(t; \zeta_A, a, n) dt \quad \dots\dots\dots (B4) \end{aligned}$$

したがって、式 (B1) は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_A}^1 \xi v d\xi &= \frac{D_{HA}}{4(1-\zeta_A)^{1+1/n}} \left(\frac{\tau_{wHB,A}}{K} \right)^{1/n} \times \\ & \left[\int_{\chi_o}^1 \xi^2 g_{HB,o}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi - \int_{\chi_A}^{\chi_i} \xi^2 g_{HB,i}(\xi; \zeta_A, a, n) d\xi \right] \quad \dots\dots\dots (B5) \end{aligned}$$

付録 C ニュートン流体の場合 ($a=0, n=1$) には、せん断応力が零になる無次元半径 χ_A および無次元流量係数 Ω_A は、それぞれ次式によって表される。

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ n \rightarrow 1}} \chi_{HB,A} = \chi_A = \sqrt{\frac{1-\zeta_A^2}{2 \ln(1/\zeta_A)}} \quad \dots\dots\dots (C1)$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ n \rightarrow 1}} \Omega_{HB,A} = \Omega_A = (1-\zeta_A^2) \left(1 + \zeta_A^2 + \frac{1-\zeta_A^2}{\ln \zeta_A} \right) \quad \dots\dots\dots (C2)$$

なお、ニュートン流体における流路係数は、管径比 ζ_A によって一義的に定まる形状係数 ϕ_A であり、次式によって表される。

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ n \rightarrow 1}} \Phi_{HB,A} = \phi_A = \frac{(1+\zeta_A^2) - 2\chi_A^2}{(1-\zeta_A^2)^2} = \frac{(1+\zeta_A^2) \ln \zeta_A + 1 - \zeta_A^2}{(1-\zeta_A^2)^2 \ln \zeta_A} \quad \dots\dots\dots (C3)$$

付録 D 式 (47b) および (48b) を用いて式 (51) を変形し、応力比 a の二次以上の項を省略して展開すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{K}{\hat{\tau}_{wHB,A}} \dot{\gamma}_A^n &\cong (1-a) \\ &\times \left\{ \left(1 - \zeta_A^{mp} \right) Y_{P,C} \left(1 - \frac{1}{1+2n} a \right) + \zeta_A^{mp} Y_{P,PP} \left(1 - \frac{1}{1+n} a \right) \right\}^n \quad \dots\dots\dots (D1) \end{aligned}$$

上式右辺の中括弧内は次式に注意し、

$$\hat{Y}_{P,A} = (1 - \zeta_A^{mp}) Y_{P,C} + \zeta_A^{mp} Y_{P,PP} = \frac{4n(1+2n) - n(1-n) \zeta_A^{mp}}{(1+2n)(1+3n)} \quad \dots\dots\dots (D2)$$

展開すれば、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & (1 - \zeta_A^{mp}) Y_{P,C} \left(1 - \frac{1}{1+2n} a \right) + \zeta_A^{mp} Y_{P,PP} \left(1 - \frac{1}{1+n} a \right) \\ &= (1 - \zeta_A^{mp}) Y_{P,C} + \zeta_A^{mp} Y_{P,PP} - \left\{ \frac{(1 - \zeta_A^{mp}) Y_{P,C}}{1+2n} + \frac{\zeta_A^{mp} Y_{P,PP}}{1+n} \right\} a \\ &= \hat{Y}_{P,A} \left\{ 1 - \frac{(1 - \zeta_A^{mp})(1+n) Y_{P,C} + \zeta_A^{mp}(1+2n) Y_{P,PP}}{(1+n)(1+2n) \hat{Y}_{P,A}} a \right\} \\ &= \hat{Y}_{P,A} \left\{ 1 - \frac{1}{1+n} \cdot \frac{4n(1+n) + n(5n-1) \zeta_A^{mp}}{4n(1+2n) - n(1-n) \zeta_A^{mp}} a \right\} \\ &= \hat{Y}_{P,A} \left(1 - \frac{F'_{P,A}}{n} a \right) \quad \dots\dots\dots (D3) \end{aligned}$$

ここに、

$$F'_{P,A} = \frac{n}{1+n} \cdot \frac{4(1+n) + (5n-1) \zeta_A^{mp}}{4(1+2n) - (1-n) \zeta_A^{mp}} \quad \dots\dots\dots (D4)$$

である。式 (D3) を式 (D1) に代入すれば、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{K}{\hat{\tau}_{wHB,A}} \dot{\gamma}_A^n &\cong (\hat{Y}_{P,A})^n (1-a) \left(1 - \frac{F'_{P,A}}{n} a \right)^n \\ &\cong (\hat{Y}_{P,A})^n (1-a) \left[1 - n \frac{F'_{P,A}}{n} a + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{F'_{P,A}}{n} a \right)^2 - \dots \right] \\ &\cong (\hat{Y}_{P,A})^n \{ 1 - (1 + F'_{P,A}) a \} = (\hat{Y}_{P,A})^n (1 - F_{P,A} a) \quad \dots\dots\dots (D5) \end{aligned}$$

ここに、 $F_{P,A} = 1 + F'_{P,A}$ である。なお、平均壁面せん断応力の一次近似値を $\hat{\tau}_{wHB,A}$ とおけば、式 (D5) は式 (54) のように表すことができる。ただし、 $\hat{a} = \tau_y / \hat{\tau}_{wHB,A}$ である。

主な記号

a	: 応力比	[-]
D	: 管径	[m]
D_h	: 水力直径	[m]
K	: コンシステンシーインデックス	[Pa · s ^{<i>n</i>}]
m	: 近似度を上げるために導入された係数	[-]
n	: べき指数	[-]
R	: 管半径	[m]
r	: 半径方向距離	[m]
Re	: レイノルズ数	[-]
T	: 応力比に関するパラメータ ($= a(1 - \zeta_A)$)	[-]
V_M	: 管内平均速度	[m/s]

v : 局所速度
 Y : 粘度係数
 $\dot{\gamma}$: セン断速度
 ζ_A : 管径比 ($= R_i/R_o$)
 η : 見掛け粘度
 λ : 管摩擦係数
 ξ : 無次元半径方向距離
 ρ_x : スラリーの密度
 τ : セン断応力
 τ_w : 壁面せん断応力
 τ_y : 降伏応力
 χ : 栓流部境界の無次元半径
 χ_A : セン断応力が零となる無次元半径
 Φ_A : 流路係数
 ϕ : 管路の形状係数
 Ω_A : 無次元流量係数

[m/s] 添字 A : 同心二重円管, B : ビンガム流体, C : 円管, f : 流体の種類を表す指標, HB : ハーシェル・バルクレイ流体, i : 内管側, o : 外管側, P : ベキ乗則流体, PP : 平行平板, p : 栓流部 r : 半径方向, z : 流動方向, $\wedge$: 数値計算結果に対する近似, $\sim$: 応力比の一次近似
 [-]
 [1/s]
 [-]
 [Pa · s]
 [-]
 [-]
 [kg/m³]
 [Pa]
 [Pa]
 [Pa]
 [-]
 [-]
 [-]
 [-]
 [-]
 [Pa]

References

- 1) American Petroleum Institute: *API Recommended Practice 13D (6th edition)*, (American Petroleum Institute, 2010) .
- 2) M. Zamora and D. Power: AADE-02-DFWM-HO-13 (2002), 1-8.
- 3) A.G. Fredrickson and R.B. Bird: *Industrial and Eng. Chem.* **50** (1958), 347-352.
- 4) R.P. Chhabra and J.F. Richardson: *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology (2nd edition)*, (Butterworth-Heinemann, 2008), pp.166-172.
- 5) R.W. Hanks: *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, **18** (1979), 488-493.
- 6) Previous reference 4), pp.172-177.
- 7) N. Hatakeyama, Y. Shimizu and T. Masuyama: *Journal of MMIJ*, **133** (2017), 157-164.
- 8) N. Hatakeyama, Y. Shimizu and T. Masuyama: *Journal of MMIJ*, **135** (2019), 15-24.
- 9) T. Masuyama and N. Hatakeyama: *Journal of MMIJ*, **119** (2003), 410-415.
- 10) T. Masuyama, K. Sato, T. Kawashima and K. Noda: *Journal of MMIJ*, **96** (1980), 385-389.
- 11) T. Masuyama, T. Kawashima and K. Noda: *Journal of MMIJ*, **94** (1978), 85-90.