《研究ノート》

細分血統による近交係数および血縁係数計算法 (Ⅱ)

横内 圀生・阿部 猛夫

農林省畜産試験場, 千葉市 280

さきに阿部・西田¹⁾は, 電子計算機の利用を前提とした近交係数・血縁係数計算法を提示したが, その手順は完全に機械的な操作と機械的な判断により構成されているので, 電子計算機のみならず手計算でこれらの係数を計算する場合でもきわめて有用である。

ここに提示するのは, この阿部・西田の方法を若干修正しとくに手計算の場合により便利にしようというものである。

方法の提示

いま, 父方は n 世代, 母方は n' 世代さかのぼった血統情報から, ある個体 X の近交係数 F_X を求めたいとしよう。父方, 母方の細分血統群はそれぞれ 2^n , $2^{n'}$ 本の細分血統より成る。父, 母 2 個体にとってのある共通祖先を A とすると, 父方, 母方とも 1 つ以上の細分血統に A が現われる。その現われ方は必ずしも 1 通りではなく, 細分血統によって A が出現する世代や径路が異なる。そこで共通祖先 A に便宜的に番号をつけ, $A_1, A_2, \dots, A_j, \dots$ とする。つまり A に至るまでの世代数や径路が違えばあたかも別個体のように扱う。

さて, 共通祖先 A_j が父方では m_j 世代, 母方では m'_j 世代さかのぼったところに存在するとする。この場合にも径路図による方法²⁾と同様, A_j と同じ径路をたどり A_j よりも古い世代の共通祖先は, A_j の近交係数を通して間接的に F_X に寄与する。このことを逆にいえば, A_j より若い世代には父, 母にとっての直接の共通祖先はない。このときの A_j が出現する細分血統の数は, 父方では 2^{n-m_j} 本, 母方では $2^{n'-m'_j}$ 本であり, 父方, 母方の総当りで双方の細分血統群に A_j が出現する組の数 c_j は

$$c_j = 2^{n-m_j} 2^{n'-m'_j} = 2^{n+n'-m_j-m'_j}$$

である。

個体 X の近交係数のうちで, この A_j による部分を

$F_{X(A_j)}$ で表わせば,

$$\begin{aligned} F_{X(A_j)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_j+m'_j+1} (1+F_{A_j}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+n'+1} c_j (1+F_{A_j}) \end{aligned}$$

となる。したがって, X の近交係数のうちで A による部分 $F_{X(A)}$ は, A の添字 1, 2, $\dots$, j , $\dots$ が便宜的につけた番号で, そもそも $A_1=A_2=\dots=A_j=\dots$ であることから,

$$\begin{aligned} F_{X(A)} &= \sum_j F_{X(A_j)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+n'+1} k (1+F_A) \end{aligned}$$

ただし, $k = \sum_j c_j$

となる。 k は, 共通祖先 A が現われる世代, 径路に関係なく, 父方, 母方の細分血統群の総当りで双方に A が出現する細分血統の組数を表わす。 $F_{X(A)}$ をすべての共通祖先について加算すれば F_X が求められる。

ところで, 父方 2^n 本, 母方 $2^{n'}$ 本より成る細分血統群において, ある祖先の出現回数は父あるいは母よりさかのぼる世代数により決定される。つまり, 父より m 世代さかのぼったところに存在する個体は, 2^{n-m} 本の連続した細分血統に出現する。このことは, その連続した 2^{n-m} 本のうちで最初の 1 本のみを比較の対象とし, あとはそれに 2^{n-m} という重みを付ければよいことを意味するので, 細分血統群を作成するにあたって, 2 番目以降の細分血統では個体番号あるいは個体コードを記入することなく, たとえば「 u 」で十分目的が達せられる。

さらに, $F_{X(A)}$ を与える上式中の k を $2^{n-m} 2^{n'-m'}$ で置きかえると,

$$F_{X(A)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+m'+1} (1+F_A)$$

となるので, 父および母よりさかのぼる世代数 n, n' は不要で, したがって祖先が不明な箇所にたとえば「?」を入れてそれぞれの群で細分血統の末端を揃えるという操作も必要でなくなる。

このように重みつき細分血統の考え方を導入すれば, 父方, 母方の細分血統群の比較にあたって, 記録すべき

昭和 51 年 10 月 21 日受付

A Method of Calculating Coefficients of Inbreeding and Relationship based on Pedigree Lines (Ⅱ). Kunio YOKOUCHI and Takeo ABE. National Institute of Animal Industry, Chiba-shi 280.

事項は両群に共に出現する祖先とそれが出現する父および母よりさかのぼった世代数である。

個体 X と Y との血縁係数 R_{XY} を求めるには、 X と Y との細分血統群の比較を行い、両群に出現する共通祖先と X 、 Y よりその共通祖先までのそれぞれの世代数 m 、 m' を記録して、

$$R_{XY(A)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+m'} (1+F_A) / \sqrt{(1+F_X)(1+F_Y)}$$

を計算し、すべての共通祖先について加算すればよい。

適用例

右の血統情報より X の近交係数 F_X を求める。

まず、比較のために、阿部・西田の方法¹⁾で求めてみよう。

父の細分血統群

① $S-P-?$

② $S-P-?$

③ $S-K-P$

④ $S-K-?$

母の細分血統群

①' $D-E-S-P-?$

②' $D-E-S-P-?$

③' $D-E-S-K-P$

④' $D-E-S-K-?$

⑤' $D-E-B-L-?$

⑥' $D-E-B-L-?$

⑦' $D-E-B-M-?$

⑧' $D-E-B-M-?$

⑨' $D-K-P-?-?$

⑩' $D-K-P-?-?$

⑪' $D-K-P-?-?$

⑫' $D-K-P-?-?$

⑬' $D-K-?-?-?$

⑭' $D-K-?-?-?$

⑮' $D-K-?-?-?$

⑯' $D-K-?-?-?$

個体	父	母
X	S	D
D	E	K
E	S	B
S	P	K
B	L	M
K	P	—

与えられた血統情報の範囲では、父方2世代、母方4世代までさかのぼることができるので、 $n=2$ 、 $n'=4$ であり、細分血統の数はそれぞれ4、16である。そして $4 \times 16 = 64$ 回の比較を行って両群に共通して出現する祖先とその回数を記録すれば、

$S: 16$ 回、 $P: 8$ 回、 $K: 16$ 回

となる。これらの共通祖先の近交係数は、同様に両親の細分血統群を比較することにより、

$$F_S = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1+1} 2(1+F_P) = 0.25, F_P = 0, F_K = 0$$

と求められるので、 F_X は次のように計算される。

$$F_X = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+4+1} \{16(1+F_S) + 8(1+F_P) + 16(1+F_K)\} = 0.34375$$

次に、本稿で提示した方法で求めてみよう。

父の細分血統群

0 1 2

① $S-P$

② $''-K-P$

母の細分血統群

0 1 2 3 4

①' $D-E-S-P$

②' $''-''-''-K-P$

③' $''-''-B-L$

④' $''-''-''-M$

⑤' $''-K-P$

まず、父および母の細分血統群を作成するにあたってそれぞれの群で末端世代を揃えるという操作は必要ではない。また、直前の細分血統と全く同じ経路をたどってきた場合にはその個体コードを「 $''$ 」でおきかえ、比較の対象とはしない。そのかわり、父、母それぞれよりのさかのぼる世代数を記入しておく。

細分血統は現有血統情報の範囲内で作成するので、その数は一般に前法より少なくなり、本例では父方2、母方5となる。そして、 $2 \times 5 = 10$ 回の比較で両群に共通して出現する祖先を父、母それぞれよりの世代数と共に記録すれば、

$S: 0, 2 \quad P: 1, 2 \quad K: 1, 1$

となる。これらの共通祖先の近交係数は、改めてそのための細分血統群を用意する必要はなく、たとえば S の場合であれば父方の細分血統①、②を利用して、 $P: 1, 2$ と記録し、

$$F_S = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+1-(1 \times 2)} (1+F_P)$$

と求められる。(1×2)の1は S の両親の世代を示し、2は定数である。

$F_P = F_K = 0$ は容易に求められるので、 F_X は次のように計算される。

$$F_X = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+2+1} (1+F_S) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+1} (1+F_P) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1+1} (1+F_K) = 0.34375$$

文 献

- 1) 阿部猛夫・西田 朗：家禽会誌，8，245，1971.
- 2) WRIGHT, S.: Amer. Nat., 56, 330, 1922.