時間的真理関数

杉 原 丈 夫

Temporal truth-function

Takeo Sugihara

All temporal truth-functions are expressed in the form of ordinary truth-function by the use of sequential variables.

The temporal truth-functions are classified in three categories: (1) Simple temporal truth-function, (2) Happening function and (3) Sequential function.

Some fundamental temporal truth-functions are as follows: After-happening function, Hp . (After the happening of p) Delay function, Dp . (Delaying p for an interval) Jumping function, Jp . (Jumping over a positive interval of p) Temporal conjunction, $K(p, q)$. (p and q , but p before q .)

$$Hp \equiv s$$

$$Dp \equiv \sim p \wedge Hp$$

$$Jp \equiv p \wedge \sim s_1$$

$$K(p, q) \equiv (p \wedge q) \wedge s(p)$$

まえがき これまでの論理学は「そして」「または」「もしならば」など超時間的論理関係のみを研究の対象としていた。本稿は「前」「後」「間」などの時間的関係を論理学に導入し、真理関数で表現することを目的とする。

本稿は先に発表した「序列真理関数——時間を含む論理学 (第1報)」科学哲学年報第2巻 (1962) の続報である。しかし前報の単なる続編でなく、全く別の着想から根本的に改稿して、前報で未解決であった一般問題に簡明な解決を与えた。

§1. 時間的真理関数

時間的命題 たとえば「この部屋は10人の人がいる。」という命題を p で表わせば、この部屋に人が出入りしているので、 p の真偽は時間によって変化する。命題の真偽が時間の関数であるとき、これを時間的命題という。「 $2+2=4$ 」のごとくその真偽が時間に関係ない命題も、それはすべての時間において真であると考えれば、やはり時間的命題である。

相互に独立な n 個の時間的命題 $p_1, p_2, \dots, p_n$ を基項（アークギュメント）とする命題関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の真偽が、基項の真偽によってのみ定まるとき、この関数を時間的真理関数という。時間的真理関数は、次のように分類できる。

1. 絶対的時間的真理関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の各時刻における値が、基項 $p_1, p_2, \dots, p_n$ のその時刻における値の真理関数として単純に定まるもの。この場合関数 Φ は通常真理関数として表現できるから、新たな関数を導入する必要がない。

2. 相対的時間的真理関数

(a) 生起関数 $\Phi(p)$ の値が、その時刻における p の値だけでなく、 p が真となる時刻、すなわち p が生起する時刻との相対的前後関係によって定まるとき、この関数を生起関数という。

(b) 序列関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の値が、その時刻における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値だけでなく、それに先立つ時刻における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値によって定まるとき、この関数を序列関数という。

区間 時間は連続であるが、通常命題では、時間の単位を十分小さくとれば、時間が単位時間ごとに不連続に進むと考えても、実際上さしつかえない。

相互に独立な n 個の時間的命題 $p_1, p_2, \dots, p_n$ の集合 M を考える。ある単位時間におけるこれらの n 個の命題の値の可能な組合せは 2^n 通りある。この組合せをもって集合 M の値とする。隣接した単位時間において集合 M の値が同じであるとき、それらの単位時間を併合して一つの区間とする。かくすれば M の値は区間ごとに変化し、区間の関数となる。

なお M の値は1区間につき一つの命題のみが値を変化する。二つ以上の命題が同時に値を変化することはないものとする。現実と同時に変化したように見える場合でも、時間の単位を十分小さくして、前後の差をつけることにする。

また、特に必要がない限り、時間の始点において、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値はすべて偽、すなわち0であるとする。時間的命題 p の値が真である区間を p の正区間、 p の値が偽である区間を p の負区間という。

§2. 生起関数

生起後関数 たとえば「キリストが生存している。」という命題を p で表わすとき、全時間は p によりキリスト出生前、生存中、死後の3区間に区分される。いま「キリスト出生前である。」を Bp で、「キリスト出生後である。」を Hp で表わし、3区間と p, Bp, Hp の関係を表示すると次のようになる。

区 間	1	2	3	これを一般化して述べると次のようになる。命
p	0	1	0	題 p で表現される事象が全時間中に k 回起るもの
Bp	1	0	0	とする。 k は0から無限大まで許される。しかる
Hp	0	1	1	ときは全時間は p により $2k+1$ 区間に区分され

る。ただしこれは時間の始点と終点において p が生起しない場合である。始点と終点において p が生起している場合は $2k-1$ 区間であり、その他の場合は $2k$ 区間になる。

区間が m のとき、可能な関数の種類は 2^m 通りある。 Bp と Hp はそのうちの2種である。しかしこれらの関数は通常の真理関数で表現できない。なぜならば、単項真理関数は $p, \sim p, t$ (恒真真理関数), f (恒偽真理関数) の4種しかなく、残りの 2^m-4 は通常の真理関数では表現不可能である。

一般の場合、 Hp および Bp は次のように定義される。 p の値が1あること、すなわち $v(p)=1$ を、簡略のため $p=1$ で表わす。 $p=0$ も同様である。 Hp は p の最初の生起以後は常に $p=1$ であり、生起の前は $p=0$ である。反対に Bp は p の最初の生起以後は常に $p=0$ であり、生起の前は $p=1$ である。故に

$$Bp \equiv \sim Hp \quad (2.1)$$

よって今後は Hp だけについて考える。 Hp を生起後関数、 Bp を生起前関数ということにする。

Hp を真理関数で表わすために補助的な変項 s を加え、この s を序変項という。 s は次の性質を有する。

- (i) s は p の従属変項であって、次の式で規定される。

$$s \equiv p \vee s \quad (2.2)$$

- (ii) s は、両様の値が可能なとき、前の区間における値を保守する。

- (iii) s は、第 1 区間において両様の値が可能なとき、 $s=0$ である。

(i)により p と s の値の組合せは 11, 01, 00 であって、 $p=1, s=0$ という組合せは生じない。また(iii)により 1 度 $s=1$ になれば、あとはずっと $s=1$ である。その関係を表示すると次のようになる。

区 間	1	2	3	4	5	6	7	
p	0	1	0	1	0	1	0	
s	0	1	1	1	1	1	1	
Hp	0	1	1	1	1	1	1	

上表からただちに次の式を得る。

$$Hp \equiv s \quad (2.3)$$

遅延関数 p の値より 1 区間ずつ遅れて p と同じ値をとる関数を遅延関数といい、 Dp で表わす。 Dp よりもさらに 1 区遅延した関数、すなわち DDp を Dp^2 で表わす。 Dp^2 は p の値より 2 区間遅延している。その関係を表示すると次のとおりである。

区 間	1	2	3	4	5	6	7	
p	0	1	0	1	0	1	0	
Dp	0	0	1	0	1	0	1	
Dp^2	0	0	0	1	0	1	0	
Hp	0	1	1	1	1	1	1	
HDp	0	0	1	1	1	1	1	

上表から次の式を得る、

$$Dp \equiv \sim p \wedge Hp \quad (2.4)$$

$$D^2p \equiv p \wedge HDp \quad (2.5)$$

これを一般化すれば

$$D^{2m}p \equiv p \wedge HD^{2m-1}p \quad (2.6)$$

$$D^{2m+1}p \equiv \sim p \wedge HD^{2m}p \quad (2.7)$$

逆方向にも延長解釈して

$$D^0p \equiv p \quad (2.8)$$

$$D^{-1}p \equiv \sim p \quad (2.9)$$

ただし (2.9) は第 1 区間において $p=0$ の場合に限る。

跳躍関数 p の正区間を一つ飛びに自分の正区間とする関数を跳躍関数とい、 Jp で表わす。 Jp を表わすのには (2.2) で定義された s では不十分なので、新たに二つの序列率項 s_1 、および s_2 を用いる。 s_1 と s_2 の値の組合せを s_1s_2 で表わせば、 s_1s_2 は $00, 01, 11, 10$ の順で循環する。 s_1 と s_2 はいずれか一方が一つずつ変化し、二つが同時に変化することはないものとする。

区 間	1	2	3	4	5	6	7	8	
p	0	1	0	1	0	1	0	1	
Jp	0	1	0	0	0	1	0	0	
s_1	0	0	1	1	0	0	1	1	
s_2	0	1	1	0	0	1	1	0	

s_1 および s_2 は次の性質を有する。

(i) s_1 および s_2 は p の従属変項であって、次の式で規定される。

$$s_1 \equiv (p \wedge s_1) \vee (\sim p \wedge s_2) \quad (2.10)$$

$$s_2 \equiv (p \wedge \sim s_1) \vee (\sim p \wedge s_2)$$

(ii) s_1 および s_2 は、両様の値が可能となき、前の区間における値を保守する。

(iii) s_1 および s_2 は、第 1 区間において両種の値が可能となき、 $s_1=0$ および $s_2=0$ である。

(2.10) の式は次のようにして得られた。 $s_1=1$ であるのは、循環する区間(第 1 から第 4 まで)のうち第 3 と第 4 の区間である。第 3 区間では、 s_1 は前区間か

ら値が変動し、 s_2 は変動しない。変動しない s_2 の方をとり、 $s_1 \equiv (\sim p \wedge s_2)$ である。第4区間では、 s_1 は前区間から値が変動せず、 s_2 は変動している。故に変動しない s_1 の方をとり、 $s_1 \equiv (p \wedge s_1)$ である。この両者を合せれば、(2・10)の第1式となる。第2式についても同様である。

しかるときは Jp は次の式となる。

$$Jp \equiv p \wedge \sim s_1 \quad (2 \cdot 11)$$

$Jp=1$ となるのは循環する区間のうち第2区間である。第2区間で s_2 は前区間から値が変動するが、 s_1 は変動しない。故に変動しない方の s_1 をとって (2・11) が得られる。

一般的な跳躍関数 $J_k p$ を次のように定義する。 p の正区間を k 番目ごとにとったものを $J_k p$ の正区間とする。従って $J_k p$ は $2k$ 区間ごとに関数の値が循環する。 $J_k p$ を真理関数で表現するために m 個の序列変項を用いる。 m の値は次の式で与えられる。

$$2^{m-1} < 2k \leq 2^m \quad (2 \cdot 12)$$

しかるときは $J_k p$ は次の式となる。

$$J_k p \equiv p \wedge \sim s_1 \wedge \sim s_2 \wedge \cdots \wedge \sim s_{m-1} \quad (2 \cdot 13)$$

しかし $s_1, s_2, \dots, s_m$ を規定する式は、 m の値が同じでも、 k の値によって異なる。 $k=3$ および $k=4$ によって例示すれば、いずれの場合も $m=3$ であるから、

$$J_3 p \equiv p \wedge \sim s_1 \wedge \sim s_2 \quad (2 \cdot 14)$$

$$J_4 p \equiv p \wedge \sim s_1 \wedge \sim s_2 \quad (2 \cdot 15)$$

両式は全く同じである。しかし s_1, s_2, s_3 が異なる。

一般に m 個の序列変項の値の組合せは、次の順序で配列される。最初は全部が0である。次にまず $s_m=1$ となる。その次に $s_{m-1}=1$ となる。次に s_m はもとより、 $s_m=0$ となる。こんどは s_{m-2} に移り、 $s_{m-2}=1$ となる。ついで先と同じように s_m, s_{m-1}, s_m という順序で変化して、 s_{m-3} に移る。以下この手順を繰り返す。要するに m 個の変項は一つずつ値を変えて行き、二つ以上が同時に値を変えることはない。 $m=3$ で例示すれば次のとおりである。

$k=4$ のときは, $2k=8$ であるから, この 8 組の値をすべて用いればよい。しかし $k=3$ のときは, $2k=6$ であるから, 2 組だけ余る。故に 2 組を除去し, 残りの 6 組が, 変項の値を一つずつ変化させて接続するようにすればよい。具体的には $(001, 011)$ を除いてもよく, $(010, 110)$ を除いてもよく, $(111, 101)$ を除いてもよい。しかし $(2\cdot 14), (2\cdot 15)$ が成立するためには $(001, 011)$ は除かれない。いま $(111, 101)$ を除くと, 次の表になる。

区 間	1	2	3	4	5	6	
s_1	0	0	0	0	1	1	
s_2	0	0	1	1	1	0	
s_3	0	1	1	0	0	0	
p	0	1	0	1	0	1	
J_3p	0	1	0	0	0	0	

この表から s_1, s_2, s_3 を規定する式を得る。

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv (\sim p \wedge s_2 \wedge \sim s_3) \vee (p \wedge s_1 \wedge \sim s_3) \\ s_2 &\equiv (\sim p \wedge \sim s_1 \wedge s_3) \vee (p \wedge \sim s_1 \wedge \sim s_2) \vee (\sim p \wedge s_2 \wedge \sim s_3) \\ s_3 &\equiv (p \wedge \sim s_1 \wedge \sim s_2) \vee (\sim p \wedge \sim s_1 \wedge s_3) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$k=4$ の場合は省略するが, (2.16) と異なる式になることはいうまでもない。

§ 3. 生起関数の還元

定 理 1 有限区間のすべての生起関数は，真理関数と Hp に還元できる。

証明 区間の番号付けは、 p の最初の正区間を第 1 区間とする。従って時間の始点において $p=0$ であるとき、第 1 区間の前に第 0 区間を置く。いま第 i 区間においてのみその値が 1 となり、他の区間では 0 である関数を T_{ip} で表わす。しかるときは、 $i=0$ の場合

$$T_\theta p \equiv \sim H p \quad (3.1)$$

$i \neq 0$ の場合

$$T_i p \equiv D^{i-1} p \wedge \sim H D^i p \quad (3.2)$$

あるいは次のようにも表現できる。

$$T_i p \equiv D^{i-1} p \wedge \sim D^{i+1} p \quad (3.3)$$

$D^{i-1} p$ は第 $i-1$ 区間までは全部 0 で、第 i 区間で初めて $p=1$ となる関数である。これに対し $\sim H D^i p$ は第 $i+1$ 区間以後すべて 0 である関数、 $\sim D^{i+1} p$ は第 $i+1$ 区間以後正負が $D^{i-1} p$ と反対になっている関数である。故にそれと $D^{i-1} p$ との連言は、第 i 区間のみ 1 となり、他の区間は 0 となる。

いま任意の生起関数 Φp は、第 a 、第 b 、第 c ……区間でその値が 1 で、他の区間では 0 であるとする。しかるときは Φp は次のごとく表現できる。

$$\Phi p \equiv T_a p \vee T_b p \vee T_c p \vee \dots\dots\dots (3.4)$$

かくて Φp は $T_i p$ に還元され、 $T_i p$ は $D^m p$ に還元され、 $D^m p$ は (2.4) ないし (2.7) で示したごとく $H p$ に還元される。

定 理 2 循環無限区間の生起関数は $H p$ と $J_k p$ に還元できる。

証明 生起関数 Φp は、最初第 $2h$ 区間までは非循環部分、第 $2h+1$ 区間以後は $2k$ 区間ごとの循環部分であるとする。この $2h$ は、 p の最初の正区間を第 1 区間として数えた区間番号である。もし非循環部分の区間番号が奇数で終るときは、循環部分の最初の 1 区間を非循環部分に加え、次の区間から循環が始まるものとする。たとえば、

$$0[01][01]\dots\dots\dots$$

であるときは

$$00[10][10]\dots\dots\dots$$

とする。

関数 $\Phi_0 p$ は、最初の第 $2h$ 区間までは Φp の非循環部分と同じ値であり、第 $2h+1$ 区間以後は全部 0 である関数とする。また $\Phi_1 p$ は、最初の第 $2h$ 区間までは全部 0 で、第 $2h+1$ 区間以後は Φp の循環部分と同じ値であるとする。しかるときは

$$\Phi p \equiv \Phi_0 p \vee \Phi_1 p \quad (3.5)$$

$\Phi_0 p$ の正区間は最初の第 $2h$ 区間までにしかない。それを第 a 、第 b 、第 c

……区間とする。しかるときは

$$\Phi_0 p \equiv T_a p \vee T_b p \vee T_c p \vee \dots \quad (3.6)$$

次に $\Phi_1 p$ の正区間は、 $2h$ 区間の循環部分の中で第 x 、第 y 、第 z ……区間 ($2h$ 区間の中の最初の区間を第 1 区間と数えて) であるとする。しかるときは第 x 区間は、全体から見れば第 $2h+x$ 区間である。故に

$$\Phi_1 p \equiv J_k D^{2h} (D^{x-1} p \vee D^{y-1} p \vee D^{z-1} p \vee \dots) \quad (3.7)$$

§4. 序列関数

2 区間序列関数 簡単な例から述べる。「受話器をはずす。」を p 、「ダイヤルを回す。」を q で表わす。しかるときは、同じ $p \wedge q$ でも、 p が先であるのと q が先であるのとでは結果が異なる。 p と q が共に真で、しかも p が先に真となり、 q が後に真となったとき、かつそのときにのみ関数の値が真となる関数を $K(p, q)$ で表わし、「 p が q より先」と読むことにする。 $K(p, q)$ を時間連言という。この関係を表示すると次のようになる。現在の区間は第 i 区間であるとし、その前の区間すなわち第 $i-1$ 区間における p および q の値が $K(p, q)$ の値を左右する。

区 間	$i-1$		i		$K(p, q)$
	p	q	p	q	
	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	0

第 i 区間において $p \wedge q$ の値が 1 でないときは、もちろん $K(p, q)$ の値は 0 である。

$K(p, q)$ を真理関数で表わすため二つの序列変項 $s(p)$ と $s(q)$ を用いる。第 i 区間における p, q の値を $p(i), q(i)$ で表わせば、 $s(p)$ は $p(i-1)$ と $p(i)$ の値が同じときのみ 1 となり、他のときは 0 である。同様に $s(q)$ は $q(i-1)$ と $q(i)$ が同じで値のときのみ 1 となる。すなわち

$$\begin{aligned} s(p) &\equiv (p(i-1) \equiv p(i)) \\ s(q) &\equiv (q(i-1) \equiv q(i)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

p と q は同時に値が変化することなく、各区間でどちらかが一つずつ値を変えるものとすれば、

$$s(p) \equiv \sim s(q) \quad (4.2)$$

故に理論的には二つの序列変項のうち一つだけがあればよい。この序列変項を使えば、 $K(p, q)$ は次の式で与えられる。

$$K(p, q) \equiv (p \wedge q) \wedge s(p) \quad (4.3)$$

q が先に真で、 p が後に真である時間連言は次の式となる。

$$K(q, p) \equiv (q \wedge p) \wedge s(q) \quad (4.4)$$

これを一般化して、2 区間序列関数 $\Phi(p, q)$ を次のように定義する。 $\Phi(p, q)$ は二つの時間的命題 p と q を基項とし、関数の値は、現在の第 i 区間における p と q の真理値だけでなく、それに先立つ第 $i-1$ 区間における p と q の真理値によって決定される。

定 理 3 任意の 2 区間序列関数 $\Phi(p, q)$ は $K(p, q)$ に還元できる。

証明 第 $i-1$ 区間および第 i 区間における p および q の値の組合せは次の表に示すごとく 8 通りある。次の 8 通りの時間連言は、 p および q の 8 通りの値の組合せに対し、それぞれ 8 行のうち 1 行だけにおいて 1 の値をとり、他の行では 0 の値をとる関数である。

$$K(p, q), K(q, p), K(p, \sim q), K(\sim q, p),$$

$$K(\sim p, q), K(q, \sim p), K(\sim p, \sim q), K(\sim q, \sim p)$$

$\cdot \quad \cdot$		$i-1$		i		i	
		p	q	p	q	$s(p)$	$s(q)$
		1	0	1	1	1	0
		0	1	1	1	0	1
		1	1	1	0	1	0
		0	0	1	0	0	1
		0	0	0	1	1	0
		1	1	0	1	0	1
		0	1	0	0	1	0
		1	0	0	0	0	1

この 8 通りの時間連言を仮に原子序列関数といい、それぞれ $A_1, A_2, \dots, A_8$ で表わす。しかるときは任意の 2 区間序列関数 $\Phi(p, q)$ は、もし上表の 8 行のうち第 a 行と第 b 行等において 1 であり、他の行で 0 であるときは、

$$\Phi(p, q) \equiv A_a \vee A_b \vee \dots\dots\dots$$

定 理 4 任意の n 項 2 区間序列関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は $K(p, q)$ に還元できる。

証明 一般に関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の値が第 i 区間および第 $i-1$ 区間における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値によって定まるとき、この関数を n 項 2 区間序列関数という。第 i 区間における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値の組合は 2^n 通りある。それに対し第 $i-1$ 区間における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値はそれぞれ n 通りである。なぜならば、各区間において変項の値は一つだけ変化し、二つ以上が同時に変化することはないものとして約束してあるからである。しかるときは両区間における基項の値の組合せは $n \times 2^n$ である。

これに対し n 項時間連言 $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$ を次のように定義する。第 i 区間において $p_1, p_2, \dots, p_n$ のすべての値が 1 であり、かつ第 $i-1$ 区間で p_n のみが 0、他はすべて 1 であるとき、かつそのときにのみ、 $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の値は 1 である。しかるときは n 項時間連言は 2 項時間連言に還元される。

$$K(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv K((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}), p_n) \quad (4.5)$$

この n 項時間連言をもとにして、 $n \times 2^n$ 通りの n 項原子序列関数を作りうる。しかるときは定理 3 と同様にして、任意の n 項 2 区間序列関数は原子序列関数の選言で表現できる。

($t+1$) 区間序列関数 関数 $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の値が、第 $i-t$ 区間から第 i 区間までの $t+1$ 区間における $p_1, p_2, \dots, p_n$ の値によって定まるとき、この関数を ($t+1$) 区間序列関数という。

($t+1$) 区間序列関数を真理関数で表現するために、各 $p_j (j=1, \dots, n)$ につき t 個ずつ、みなで nt 個の序列変項を用いる。

$$s_x(p_j) \equiv (p_j(i-x-1) \equiv p_j(i-x)) \quad (4.6)$$

$$s_x(p_j) \equiv \prod_{1 \leq k \leq n} \sim s_x(p_k) \quad (j \neq k) \quad (4.7)$$

ただし Π は各項を連言で結合することを意味し、 x は 1 から t までの任意の数、 j は 1 から n までの任意の数とする。 i が小さくて $i \leq x+1$ の場合は、 $s_x(p_j)$ は欠除しているものとする。そのときは関数の値自体も欠除している。すなわち $i \leq t$ のときは、関数の値はない。

簡単な例をあげる。最初第 $i-2$ 区間で $p=0, q=0$ であって、次に第 $i-1$ 区間で $p=1$ となり、さらに第 i 区間で $q=1$ となったとき、かつそのときにのみ、関数の値が 1 であるような関数を $K_{01}(p, q)$ で表わす。01 という下付字は、第 $i-2$, 第 $i-1$ 区間における p の値である。この関係を表示すれば、次のとおりである。

区 間	$i-2$		$i-1$		i		$s_1(p)$	$s_1(q)$	$s_2(p)$	$s_2(q)$	$K_{01}(p, q)$
	p	q	p	q	p	q					
	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0

(下 略)

従って

$$K_{01}(p, q) \equiv (p \wedge q) \wedge s_1(p) \wedge s_2(q) \tag{4.8}$$

最終学歴：

昭和15年 京都大学文学部哲学科卒業

主な著者：

「様相論理学」 山喜房

「数学的論理学」 槇書店