組立作業過程における拘束の表現と解析

比 留 川 博 久*

1. はじめに

組立作業は、力学的には、複数の物体間の接触による拘束関係を変化させる過程であると考えることが出来る。一般に、組立の完了した機構は面接触によって構成されており、その運動学についてはさまざまな研究が行なわれて来ている。ところが、一般に組立作業の過程では、点接触や線接触も起こり、しかも両側拘束ではなく片側拘束になる場合が多い。本稿では、このような場合に物体に働く拘束はどのように表現することが出来、その拘束条件式を解くことでどんな結果が導かれるかについて解説する。その際、まず具体的な例を挙げ、それを抽象化して一般式を与えるという方法で、出来るだけ分かり易く説明することを試みた。また、この手法の応用例を幾つか挙げる。

以下の解析は、主に組立作業の計測と制御への応用を念頭におき、物体の微小変位または速度空間、および、その双対空間である力空間で静学的に行なう。また、簡単のため物体間に摩擦はないものと仮定する。

2. 速度空間の定義

本稿では、注目する被拘束物体の速度を作業空間に固定した絶対座標系の3軸に沿っての微小並進 $\Delta X: 3 \times 1$ 、3軸回りの微小回転 $\Omega: 3 \times 1$ によって表し、この速度空間で拘束を表現することにする。あるいは、これらをそれぞれ微小時間 Δt で除した、並進速度 $\dot{X}$ 、角速度 ω を考えても本質的には同じであるので、基本的には速度空間で話を進める。 $(\dot{X}, \omega)$ は、6次元の速度空間の基底になる。

ω は一見するとオイラー角の様な姿勢を表す変数の微分の様に思えるが、そうはならない¹⁾。この点は、しばしば誤解されるので注意を要する。例えば、剛体の姿勢をロール・ピッチ・ヨー角²⁾ α, β, γ で表すとする、

ω とこれらの微分との関係は、

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 1 & 0 & -\sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (1)$$

となる³⁾が、微分して ω になる様な変数は存在しない。

物体の回転速度を姿勢を表す変数の微分を使わず、 ω を用いて表現する理由は、姿勢の表現に起因する特異点を持たないこと⁴⁾、配置変数の値と独立に回転速度を表現出来ることの2点である。

3. 組立の完了した機構における拘束

本節では完成した機構における拘束について説明し、

図1 低次対偶の例

原稿受付 1993年12月21日

Representation and Analysis of Constraints for Motions of Objects in Assembly Processes

* 電子技術総合研究所

次節で本題である組立作業過程における拘束の話に入る。その理由は、前者が後者の特別な場合に位置付けられることを示すためと、後者の理解を容易にするためである。

一般に、機構の多くは部品と部品の面接触により構成され、この場合可動自由度が3以下であることから低次対偶と呼ばれている。低次対偶における拘束は、1981年に Mason によって詳しく論じられている⁵⁾。以下では、対偶を構成する一方の部品が可動で、一方が固定されているとし、固定部品との接触により生じる可動部品に対する拘束を考察する。例えば、図1に示す様な低次対偶を考える。(a)に示す様な回転対偶の場合、一方のリンクに対する拘束は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

と表すことが出来る。ここで、右辺0は5×1の零ベクトルであり、以下の式中では左辺に応じた次元を持つ零ベクトルとする。(b)の直動対偶の場合、直方体に対する拘束は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

で与えられる。この様に、両側拘束の場合拘束条件式は

$$C \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

という風に、物体の速度についての線形方程式で表現される。ここに、 $C:n \times 6$ は係数行列で、行数 n は機構に応じて変わる。方程式(4)の解は係数行列 C の零空間で、速度空間における線形部分空間になる。上記の2例の場合、いずれの場合も $\text{rank}(C)=5$ であることから、解空間の次元は1になる。実際、(2)式の解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T (\delta_1) \quad (5)$$

となる。ここに、 δ_1 は任意のスカラーで、以下 δ_2 等も同様とする。この解は、 z 軸回りの微小回転のみが許されることを意味する。また、(3)の式の解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T (\delta_1) \quad (6)$$

で与えられ、 z 軸方向の並進のみが可能になる。(c)の円筒対偶の場合、円筒に対する拘束条件式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

となる。この場合 $\text{rank}(C)=4$ であり、その解空間の次元は2で、解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

で与えられる。(d)の球対偶の場合の拘束条件式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

となる。この場合 $\text{rank}(C)=3$ であり、その解空間の次元は3で、解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

で与えられる。以上の例からも分かる様に、一般に、両側拘束の場合に許される速度および角速度は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = V_2 \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{(6-r)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

と表すことが出来る。ここに、 $r=\text{rank}(C)$ 、 $V_2:6 \times (6-r)$ は、解空間の基底ベクトルを各列に並べた行列である。 V_1 ではなく V_2 としたのは、後に示す表現と整合性を取るためである。

これら4つの対偶に、平面对偶とねじ対偶を加えた低次対偶の拘束条件式の係数行列の階数はいずれも3以上である。従って、解空間の次元はいずれも3以下になる。これが、これらの対偶が低次対偶と呼ばれている所以である。

さて、次に力の問題を考えよう。可動物体を A とし、固定物体 B とする。このとき、 A が B との接触により反発力 F ・トルク T を受けながら、微小変位 $(\Delta X, \Omega)$ をしたとする。摩擦はないと仮定しているので、両側拘束の場合これらによってなされる仕事は零で、

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

という関係が成立する。例えば回転対偶の場合は、 A に許される速度・角速度 $(\dot{X}, \omega)$ の集合は、(5)式で与えられるから、可能な反発力 (F, T) の集合は、

$$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

の解で与えられる。この解は、やはり係数行列の零空間であるから、

$$\begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_5 \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。ここに、 ζ_i は仕意のスカラーである。この式の係数行列をよく見ると、(2) 式の係数行列の転置であることが分かる。これは、 $(\dot{X}, \omega)$ に対する拘束条件は、実は可能な反発力の集合により与えられることを意味する。

この様に、両側拘束の場合、 A に許される速度 $(\dot{X}, \omega)$ の集合と可能な反発力 (F, T) の集合は、直交補空間を形成する⁵⁾。他の低次対偶についても、同様のことが成り立つ。Mason⁵⁾ は、複数の機構が幾つか組み合わせられた場合についても解析しているので、参照されたい。

4. 組立作業過程における拘束

いよいよ、本題である組立作業過程における拘束の表現と解析の話に入る。前述した様に、組立過程においては部品間に点接触や線接触状態も起こる。このような組合せは、部品間の相対的な自由度が4以上になることから、高次対偶と呼ばれている。Ohwovoriole と Roth は、奇しくも前述の Mason の論文と同じ 1981 年に、凸多面錐の数学⁶⁾を用いて、この問題に対する基本的な結果を示している⁷⁾。その論文のタイトル “An Extension of Screw Theory” が示す通り、彼らはこの問題をスクリュー座標を用いて定式化している。しかしながら、変数の順序等の点に注意すれば、前述した速度と角速度を用いた定式化と本質的には同じであるので、本節ではこれらを用いて説明する。スクリュー理論について興味がある読者は、文献を参照されたい⁸⁾。

まず、図 2 (a) の様に、直方体が固定されたテーブルと X_A において点接触している場合を考える。このとき、直方体の速度に対する拘束は、直方体がテーブルにめりこまないことから、

$$(0 \ 0 \ 1) \dot{X} \geq 0 \quad (15)$$

(a) (b)
図 2 点接触と線接触の例

と表すことが出来る。一般の場合の拘束の表現と整合性をとるために、この式を

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

と書き直しておく。

次に、図 2 (b) の様に、直方体の 1 辺がテーブルと線接触している場合を考える。この場合に働く拘束は、辺の両端点に働く拘束と等価になる。これを説明しよう。絶対座標系で点 $P=(x, y, z)$ に原点を持つ座標系で表した微小並進 $\dot{X}_P$ と $(\dot{X}, \omega)$ の関係は、これらの座標系の 3 軸の方向が同じだとすると、

$$\dot{X}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \quad (17)$$

で与えられる²⁾。例えば、図 2 (b) の点 $X_B=(0, 0, 10)$ における微小並進 $\dot{X}_B$ と $(\dot{X}, \omega)$ の関係は、

$$\dot{X}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \quad (18)$$

で与えられる。点 X_B における拘束は、(15) 式と同様に、

$$(0 \ 0 \ 1) \dot{X}_B \geq 0 \quad (19)$$

となる。(19) 式に、(18) 式を代入すると、

$$(0 \ 0 \ 1 \ 10 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (20)$$

となり、これが点 X_B における拘束を $(\dot{X}, \omega)$ で表したものである。(20) 式と同様にして、線分 $X_A X_B$ の全ての点の接触による拘束は、 $\forall t, 0 \leq t \leq 1$ に対して、

$$(1-t)(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} + t(0 \ 0 \ 1 \ 10 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

が成立することが導ける。ここで、 t は接触点の位置を示すパラメータである。この式と $(1-t) \geq 0, t \geq 0$ であることから、(21) 式は、(16) 式と (20) 式が同時に成立することと等価になる。すなわち、辺 $X_A X_B$ 全体に対する拘束は、その両端点 X_A, X_B に対する拘束と等

図 3 面接触の例

図 4 接触維持速度の例

値になる。(16) 式と (20) 式が同時に成立するのは、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

と連立不等式の形に書くことが出来る。

線接触の拘束と両端点の拘束の等価性は、平面接触の場合に拡張出来る。例えば図 3 の様に、直方体がテーブルと面接触している場合を考えると、拘束条件は 4 つの頂点に対する拘束と等価になり、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

と表される。以上述べた一連の等価性から、一般の場合の速度に対する拘束条件式は、

$$C \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

という形の、速度についての線形不等式で表されることが分かった。ここに、 $C: n \times 6$ は係数行列で、行数 n は等価な拘束点の数である。前述の 1 点接触の場合 $n=1$ で、この線形不等式の解は速度空間において、原点を通る超平面を境界とする半空間になる。また、線接触の場合は $n=2$ で、解は 2 つの半空間の共通部分である。さらに、図 3 の面接触の場合は $n=4$ で、4 つの半空間の共通部分を示す。この様な、原点を通る超平面を境界とする有限個の半空間の共通集合を凸多面錐 (Polyhedral Convex Cone) と呼び、その数学的理論は既に 1950 年代に詳細に研究されていた⁶⁾。Ohwovoriole と Roth は、その結果を組立作業過程の運動学の解析に応用した訳である。

ここで、(23) 式の解について考えてみよう。まず、

図 5 速度空間における凸多面錐の例

(23) 式の等号を成立させる解を求める。これは、前節で述べた両側拘束の条件式 (4) と全く同じ形なので、その解はやはり係数行列の零空間である。この式の係数行列を眺めると、第 1, 2, 6 列の要素が全て零であり、第 3, 4, 5 列は明らかに 1 次独立であるので、この係数行列のランクは 3 になり、この係数行列の零空間は

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

と表されることが分かる。等号を成立させることから明らかな様に、この様な速度は全ての接触状態を維持する速度になる。この例の場合、 δ_1 に対応するのは x 軸方向の並進、 δ_2 は y 軸方向の並進、 δ_3 は z 軸回りの回転である。これを図 4 に示す。次に、(23) 式の不等号を成立させる解を求めよう。 $\dot{X}, \omega$ の成分表現を $\dot{X}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\omega^T = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とすると、不等号を成立させる解は、零空間の補空間である $(0, 0, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, 0)$ 中にし

図 6 接触離脱速度の例

が存在しない。そこで、不等式 (23) の一部を取り出して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_z \end{pmatrix} > 0 \quad (26)$$

なる不等式の解を考えよう。この不等式の各行は、3次元空間 $(\dot{z}, \omega_x, \omega_y)$ における半空間になり、解の集合はこれら4つの半空間の共通部分で、凸多面錐になる。これを図5に示す。この図からも分かる様に、凸多面錐内の任意の点は、図中に矢印で示した側辺方向のベクトルの非負1次結合で表すことが出来る⁹⁾。この例の場合、4つの平面の交線を求めることにより側辺が求まり、解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .995 & 0.00 & -.0995 \\ .995 & -.0995 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad (27)$$

と表される。ここに、 ε_i は非負のスカラで、前出の δ_i は符合が限定されていなかったことに注意して欲しい。この解が、空間 $(\dot{z}, \omega_x, \omega_y)$ における解である。等号ではなく不等号を成立させる解であることから、いずれかの接触を離脱させる速度に対応する。この例では、各 ε_i に対応する速度は、各辺を持ち上げる速度である。これを図6に示す。これと (25) 式の解を合わせると、(23) 式の一般解は、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & .995 & 0.00 & -.0995 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & .995 & -.0995 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

と表される。両側拘束の場合の解は第1項のみで、一般に片側拘束の場合は第2項が加わる。

次に、前節と同様、可能な反発力 (F, T) の集合について考えてみよう。両側拘束の場合は (12) 式が成立したが、片側拘束を含む一般の場合、可能な反発力 (F, T) は、任意の可能な速度 $(\dot{X}, \omega)$ に対して、

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Omega \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (29)$$

という関係を満たす⁷⁾。以下に、この不等式の解を求めよう。(29) 式が成立するという条件は、例えば ε_1 に対応する速度については、 $\forall \varepsilon_1 \geq 0$ に対して、

$$\varepsilon_1 (0.00 \ 0.00 \ .995 \ 0.00 \ -.0995 \ 0.00) \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

と表され、 $\forall \varepsilon_1 \geq 0$ であることから、

$$(0.00 \ 0.00 \ .995 \ 0.00 \ -.0995 \ 0.00) \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

と等価になる。他の ε_i についても同様である。また、例えば δ_1 に対応する速度については、 $\forall \delta_1$ に対して、

$$\delta_1 (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (32)$$

と表され、 δ_1 は非負とは限らないことから、

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

が、(29) 式が成立するための条件である。これを2つの不等式で書くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (34)$$

と表せる。他の δ_i についても同様である。以上により、(28) 式の任意の解に対して、(29) 式が成立するための条件は、

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & .995 & 0.00 & -.0995 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & .995 & -.0995 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

となる。次節で述べる方法により、この不等式を解を求めると、

$$\begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \quad (36)$$

となる。ここに、 η_i は非負のスカラである。この式を良く見ると、右辺の係数行列は、元々の (23) 式の係数行列の転置であることが分かる。すなわち、「物体どうしが互いにめりこまない」ということから得た拘束条件は、実は、可能な反発力の集合を表していたのである。これは、(29) 式を転置して、

$$\begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (37)$$

と書くと、(24) 式と同じ形をしていることから理解

される。

5. 計算アルゴリズム

前節まで、組立作業過程における拘束の表現と解析について、基礎となる理論を紹介した。ここで、幾つかの問題点について考えてみよう。第1の問題は、(24)式の係数行列 C を、一般の場合に求めるにはどうすれば良いかということである。前節では、図を睨みながら、この点がめり込まないからこういう条件という風にして拘束条件を得た。すなわち、人間が条件を求めたのである。この部分を計算機により自動的に行なえないか。第2の問題は、(24)式の解を、一般の場合に求めるにはどうすれば良いかという点である。Ohwovorioleらは、総当たりにより解を求める方法を示している⁹⁾が、実はこの方法は非常に効率が悪い。筆者らは、この2つの問題に対する答えを示したので^{9),10)}、本節ではこれを解説する。

5.1 拘束条件の導出

まず、拘束条件の導出について説明する。筆者らは、接触している2つの部品の形状モデルと各々の位置・姿勢から、拘束条件を自動導出するアルゴリズムを開発した⁹⁾。この概要を図7に示す。ここに、 A, B は接触している2つの部品とする。このアルゴリズムは、任意の形状の多面体が任意の状態では接触している場合に適用可能である。多面体どうしが接触している場合を考えると、一般に接触領域は多角形・線分または点の集合になるが、前述した通り拘束は有限個の点における拘束と等価になる。この様な点を等価拘束点と呼ぶ。ステップ1と2によりこの等価拘束点が全て求まる。前述の図3の例の等価拘束点を図8(a)中に丸で示す。ステップ3では、各等価拘束点において両近傍の分離面⁹⁾を求める。この

1. 接触点集合 $P_A \leftarrow B$ に接触している A の頂点 + B の稜に接触している A の稜の内点
2. 接触点集合 $P_B \leftarrow A$ に接触している B の頂点 + A の稜に接触している B の稜の内点
3. 接触点集合 P_A, P_B の各組合せに対して、分離面の考え方により拘束条件を求める

図7 拘束条件導出アルゴリズム

図8 等価拘束点と拘束ベクトル

図9 機構の拘束条件の自動導出の例

分離面の法線ベクトルが、例えば(15)式の係数列ベクトルに相当する。これを拘束ベクトルと呼ぶことにする。同じく図3の例の拘束ベクトルを図8(b)中に矢印で示す。以上の考え方により、等価拘束点の位置と各々の点における拘束ベクトルが分るので、(17)式を用いることにより、全ての拘束条件を求めることが出来る。アルゴリズムの詳細は、文献を参照されたい⁹⁾。

以上の方法は、接触している部品の形状が多面体である場合には、最初に説明した完成した機構における拘束の自動導出にも応用出来る。例えば、図1(b)の場合の拘束ベクトルは、図9のようになる。この場合、等価拘束条件の数は16あるが、(36)式を求めたのと同様にして、等価でかつ最小の数の拘束条件を求めると、拘束条件式は、

$$\begin{pmatrix} 10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (38)$$

と表すことが出来る。2つの不等式、

$$\begin{pmatrix} 10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

が、一つの等式、

$$(10.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \quad (40)$$

に等価であることに注意すると、連立不等式(38)式は、実は、連立方程式(3)と等価であることが分かる。言い換えると、両側拘束というのは、この様に不等式と方

図 10 凸多面錐の断面

程式が等価になる特別な場合であると考えることが出来る。3 節において、拘束条件を表す連立方程式を天下りの的に与えたが、部品の形状が多面体の場合にはこの様に幾何モデルから自動的に求めることが出来る。しかしながら、他の対偶の接触面は 2 次曲面で、この場合には、接触曲線に沿っての拘束が (21) 式の様に線形式で表せないことから、線接触や面接触による拘束が、有限個の点における拘束と等価にならない。従って、本手法は適用出来ない。この問題は、今後の課題である。

5.2 拘束条件式の解法

次に、(24) 式の解を効率良く求める方法について説明する¹⁰⁾。前述した例で、係数行列 C の零空間が等号を成立させる解に相当することを述べた。その際は、零空間を係数行列を脱むことにより得た。ここでは、この零空間を一般的に求めるために、係数行列 C を次の様に特異値分解¹¹⁾する。

$$C = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} D_{rr} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \quad (41)$$

ここに、 $r = \text{rank}(C)$ として、 $U_1: n \times r$, $U_2: n \times (n-r)$, $V_1: 6 \times r$, $V_2: 6 \times (6-r)$ は直交行列、 $D_{rr}: r \times r$ は対角行列である。このとき、係数行列 C の零空間は、(11) 式と全く同じ形で与えられる。これは、前述した例では (25) 式に相当する。不等号を成立させる解は、零空間の補空間である

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} \delta_{(6-r+1)} \\ \vdots \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (42)$$

の中にしか存在しない。(41)式から、実は $C = U_1 D_{rr} V_1^T$ であることに注意すると、この空間における不等式は、 $\delta_{(6-r+1)}, \dots, \delta_6$ を変数とみなして、

$$U_1 D_{rr} V_1^T V_1 \begin{pmatrix} \delta_{(6-r+1)} \\ \vdots \\ \delta_6 \end{pmatrix} > 0 \quad (43)$$

と表すことが出来る。 V_1 は直交行列だから $V_1^T = V_1^{-1}$ であるので、この式は、

$$U_1 D_{rr} \begin{pmatrix} \delta_{(6-r+1)} \\ \vdots \\ \delta_6 \end{pmatrix} > 0 \quad (44)$$

となる。これは、前述した例では (26) 式に相当する。

表 1 線形不等式解法アルゴリズムの複雑度

$r = \text{rank}(C_p)$	1	2	3	4	5	6
側辺の最大数	1	2	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
総当たり法	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n^4)$	$O(n^5)$
最適化アルゴリズム	$O(n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$

この線形連立不等式は、図 5 の場合と同様に、原点を頂点とする凸多面錐になる。残された問題は、この錐の側辺を求める方法である。この問題は、実は凸多面体の頂点を求める問題と等価になる¹⁰⁾。これは、図 10 の様な錐の断面を考えると、断面と側辺との交点が断面上の多角形の頂点になっていることから理解される。凸多面体の頂点を求めるアルゴリズムは、計算幾何学分野で精力的に研究され、効率的なアルゴリズムが幾つか開発されている¹⁰⁾。従って、ここではその結果を利用することになると、(44) 式の解、

$$\begin{pmatrix} \delta_{(6-r+1)} \\ \vdots \\ \delta_6 \end{pmatrix} = (E_1 \dots E_m) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (45)$$

を求めることが出来る。ここに、 $E_i: 6 \times 1$ は側辺の方向を向くベクトル、 m は側辺の数である。これを (42) 式に代入すると、不等号を成立させる解が得られる。これは、前述の例では (27) 式に相当する。これと (11) 式を合わせて、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \omega \end{pmatrix} = V_2 \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{(6-r)} \end{pmatrix} + V_1 (E_1 \dots E_m) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (46)$$

が解の一般形であり、前述の例では (28) 式に相当する。

以上示した (24) 式の解を求めるアルゴリズムの計算量を表 1 に示す。ここに、 n は等価拘束条件の数である。Ohwovoriole らの論文で示されていた総当たり法が、如何に効率が悪いかが理解されると思う。

本節で説明したアルゴリズムは、電総研で開発された *Euslisp*¹²⁾ を用いてインプリメントされ、*Euslisp* と共に公開されている。

6. 応 用 例

本節では、以上説明した手法の応用例を幾つか挙げる。詳細は、各文献を参照されたい。

6.1 組立作業過程における計測への応用

(36) 式に示した様に、接触状態が与えられれば、可能性のある反発力は部品のモデルから計算可能である。平井らは、これを組立過程における接触状態遷移の検出に応用している¹³⁾。一般に、反発力から接触状態を一意に同定することは出来ないが、状態遷移の検出は理論的には可能である。

6.2 組立作業過程における制御への応用

(28) 式と (36) 式に示した様に、ある接触状態にあ

図 11 線形近似すると同じ拘束条件になる例

ると、どの方向の速度が許され、どの方向からは反発力を受けられるかが計算出来る。従って、位置と力のハイブリッド制御やインピーダンス制御の目標制御量の自動設定を行なうことも可能になる^{10),14)}。今後の実験的な評価が期待される。

6.3 組立作業計画への応用

本手法によると、(28) 式の様に可動方向が計算出来るので、組立作業計画へ応用出来る可能性もある。実際、ジグによる拘束の解析¹⁵⁾、簡単な離脱動作計画¹⁰⁾、接触状態遷移経路決定問題における接触状態の評価¹⁷⁾、組立分解順序の計画における分解可能必要条件¹⁸⁾、等に応用されている。これらの応用が可能になったのは、局所的な運動の解析で充分なためである。また、並進運動に限定された場合の組立動作計画¹⁶⁾にも応用されている。これは、並進のみに限定すると、微小変位に対する局所的な拘束条件が、大局的にも有効になるからである。

しかしながら、拘束条件を速度に対する条件で表しているということは、一般に非線形の拘束条件式を線形近似していることを意味し、2次以上の微小量を考えると実際には存在しない経路を計画してしまう可能性がある。例えば、図 11 の 2つの接触状態を考えると、線形近似してしまえば同じ拘束条件になる。ところが、実際には (a) は回転可能であるが、(b) は不可能である。この観点から、以上述べた定式化では、作業計画あるいは動作計画への応用には限界がある。筆者らは、拘束条件を非線形のまま扱い、組立作業動作を計画する方法について検討を開始している¹⁹⁾。

7. お わ り に

以上、組立作業過程における拘束の表現と解析、その応用例について述べた。内容をまとめると次の様になる。

- 両側拘束の場合、速度に対する拘束条件は線形方程式で表現される。
- 一般の場合、速度に対する拘束条件は線形不等式で表現出来る。両側拘束は、この線形不等式と等価な線形方程式が存在する特別な場合である。
- 部品の形状が多面体の場合は、これらの条件は幾何モデルから自動的に導出出来る。

- 拘束条件を表す線形不等式の解は、凸多面体の頂点を求めるアルゴリズムにより効率が良く求めることが出来る。
- 拘束条件を接形近似していることから、本手法の主な応用対象分野は組立作業過程における計測と制御で、作業計画への応用には限界がある。

現在残されている問題点としては、摩擦を考慮していないこと、2次曲面から構成される部品の拘束を扱えないことが挙げられる。特に、2次曲面を扱えると、非常に広範囲の機構の運動を幾何モデルから導くことが出来る様になるので応用は広い。今後の課題である。

謝 辞

本解説を書くにあたりご助言を賜った平井成興氏、末広尚士氏、また、日頃ご議論戴いている高瀬國克氏、築根秀男氏、坂根茂幸氏を始めとする電子技術総合研究所ロボット研究グループの諸氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) ゴールドスタイン, 古典力学, 吉岡書店, 1983.
- 2) Paul, R. P., Robot Manipulators, The MIT Press, 1981.
- 3) 内山 勝, 人工の手の運動制御に関する研究, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.45, No.391, pp.314-321, 1979.
- 4) 中村仁彦, ロボットマニピュレータの操作力発生に必要な十分条件, 日本ロボット学会誌, Vol.4, No.1, pp.3-8, 1986.
- 5) Mason, M. T., "Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol.SMC-11, No.6, pp.418-432, 1981.
- 6) Goldman, A. J. and Tucker, A. W., "Polyhedral Convex Cones", Annals of Math. Studies, pp.19-40, Princeton, 1956.
- 7) Ohwovoriole, M. S. and Roth, B., "An Extension of Screw Theory", Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.103, pp.725-735, 1981.
- 8) 杉本浩一, モータ数種のロボット機構学への応用, 日本ロボット学会誌, Vol.5, No.4, pp.415-426, 1991.
- 9) 比留川博久, 松井俊浩, 高瀬國克, 多面体間の接触による拘束条件を幾何モデルから導出する一般的なアルゴリズム, 日本ロボット学会誌, Vol.9, No.4, pp.415-426, 1991.
- 10) 比留川博久, 松井俊浩, 高瀬國克, 多面体間の接触による拘束条件の高速解法とその離脱動作計画への応用, 日本ロボット学会誌, Vol.9, No.7, pp.841-848, 1991.
- 11) 児玉慎三, 須田信英, システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, 1978.
- 12) Matsui, T. and Inaba, M., "Euslisp: An Object-Based Implementation of Lisp", Journal of Information Processing, Vol.13, No.3, pp.327-338, 1990.
- 13) 平井慎一, 浅田春比古, 得丸英勝, 組立作業における接触状態の位置・力信号の解釈による識別とモデルをもとにした識別手続きの自動生成, 計測自動制御学会論文集, Vol.26, No.2, pp.225-232, 1990.

- 14) 平井慎一, 浅田春比古, 得丸英勝, 凸多面体理論を用いたマニピュレーションの運動学とその把握および組立作業への応用, 計測自動制御学会論文集, Vol.24, No.12, pp.1284-1291, 1988.
- 15) Asada, H. and By, A. B., "Kinematic Analysis of Workpart Fixturing for Flexible Assembly with Automatically Reconfigurable Fixtures", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-1, No.2, pp.86-94, 1985.
- 16) Homem de Mello, L. S. and Sanderson, A. C., "Reasoning about the Feasibility of Local Translations for Robotic Assembly of a Part Constrained by Planar Contacts", CMU Technical Report, 1988.
- 17) 吉川恒夫, 横小路泰義, 余永, 拘束状態遷移難度に基づくロボットによる組立作業の計画法, システム制御情報学会誌, Vol.5, No.7, pp.283-293, 1992.
- 18) Wilson, R. H. and Matsui, T. "Partitioning an As-

sembly for Infinitesimal Motions in Translation and Rotation", Proc. IEEE/RSJ Conf. on Intelligent Robots and Systems: IROS '92, pp.1311-1318, 1992.

- 19) 比留川博久, 松井俊浩, 特殊ユニタリー行列を用いた接触動作計画問題の定式化, 第10回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp.315-318, 1992.

比留川博久

(Hirohisa HIRUKAWA)

1987年 神戸大学大学院自然科学研究科システム科学専攻博士課程終了。学術博士。同年電子技術総合研究所入所。現在、知能システム部行動知能研究室主任研究官。知能ロボットの研究に従事。ACM, IEEE, 計測自動制御学会, システム制御情報学会の会員。

(日本ロボット学会正会員)