非ホロノミックロボットシステム

第1回 非ホロノミックなロボットって何？

中 村 仁 彦*

プロローグ

1986年秋から翌年夏にかけて、カリフォルニア大学サンタバーバラ校に客員として偶然に居合わせた金山裕氏（現 Naval Postgraduate School）、内山勝氏（東北大学）と筆者の三人で定期的にロボットコントローラについての研究会を持っていた。移動ロボットが専門である金山氏と、ロボットの腕や指を専門とする他の二人の間でコントローラが持つべき機能についての認識に違いのあることが、何度かの議論の擦れ違いの後に、しだいに明らかになっていった。内山氏と私はコントローラの機能から軌道計画は除くという立場をとるのに対して、金山氏は軌道計画はフィードバックループの中に入れるべきだと主張したのである。

ロボットの腕では手先軌道を時間に関して2回微分可能なものを選ぶと、特異点やアクチュエータの飽和などの付加的な問題を考えなければ自動的に実行可能な軌道となる。フィードバック・コントローラは手先軌道の計画に煩わされることなく、実行可能軌道を忠実にたどるように設計されていればよい。従って、運動の計画と制御を切り離して、それぞれを独立に議論できる。一方、移動ロボットでは実はこのような分離は不可能である。このことが移動ロボットの運動計画とフィードバック制御を難しくしている。

少なくとも筆者は、そしてたぶん内山氏も、前者のような構造をロボットのコントローラに不変な性質と頭から信じていた。金山氏も後者をそのように考えていたようである。認識の相違の原因が、車輪を用いた移動ロボットが非ホロノミックな拘束を利用する機械であることに気づいたのは少なくとも筆者にとっては大きな驚きであった。

1. はじめに

ホロノミック、非ホロノミックとは力学的拘束を分類する用語である。ホロノミックな拘束とは拘束条件が一般化座標と時間を変数にもつ代数方程式で表されるものである。それ以外の拘束条件はすべて非ホロノミックな拘束と呼ばれる。Goldstein¹⁾の古典力学の教科書では非ホロノミックな拘束として次の例があげられている。

(1) 閉じた器の中の気体分子の運動、(2) 水平面上を滑らずに転がる鉛直な円盤の運動。前者では器の壁が不等式拘束条件を作る。後者では円盤の運動が一般化座標の「積分不可能な」(数学的定義は3節で述べる)微分方程式で表される。本講座では、積分不可能な微分方程式で表される拘束を受けるロボットに関する話題を5回の予定でとりあげる。「力学的な伝統に反する」とお叱りを受けることを覚悟して注¹⁾、このようなロボットを便宜的に非ホロノミックなロボットと呼ぶことにする。

ここまで読んで「少し理論的過ぎるようで……」とすでにためらいを感じ初めている人のために、この講座で進める話題について簡単な前宣伝を述べよう。近頃、ロボットの力学、運動学、制御といった話題には新鮮味を感じるものが少なくなった感があるが、本講座の話題の占めるところは基本的にはこのような分野である。運動計画とも関連が強い。最近、カオスやフラクタルなどの非線形現象が注目されているが、その数学的背景は共通するものがある。非線形制御理論や非線形力学が直接関連する分野である。応用分野としては、車輪移動ロボット、水中ロボット、ロボットの指、宇宙ロボット、宇宙構造物、体操ロボットなどがある。「非ホロノミック」なる言葉は以前からロボットの文献にも現われていたが、研究の話題として登場してきたのは87年頃からである。要するに、伝統的な分野に最近登場してきた話題であり、さまざまな先端的な応用分野に関連している、というの

原稿受付 1993年4月26日
Nonholonomic Robot Systems
Part 1: What's a nonholonomic robot?

* 東京大学工学部

注 1) 実際、MIT の Dubowsky 教授からご指摘を受けたことがある。現在ではこの呼び方は ロボティクスや非線形制御の分野で受け入れられている。

が宣伝文句である。従来のロボットの力学、運動学で必要なかったような数学の知識が必要になるので、入り口の敷居は少し高い。しかし中に入って見渡せば、このような数学を単に持つてくるだけでは、容易に解けそうにない興味ある問題がゴロゴロした未開の土地である。フロンティア精神あふれる若い研究者に飛び込んできてもらいたい分野である。

本論に戻って、最近までのこの分野の発展を簡単に紹介する。フランスの LAAS (Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systems) では Laumond²⁾ が移動ロボットの運動拘束についての論文を 1987 年に発表し、アメリカの MIT では Vafa^{3,4)} が 1987 年の学位論文で宇宙ロボットの衛星の姿勢制御を積分不可能性を前提に議論している。これらがロボットの分野で非ホロノミックな性質を積極的に扱おうとした最初の論文であろう。これらではまだ「非ホロノミックな拘束」はキーワードとして用いられていず、これが広い関連分野を持つ一般の問題として十分に意識されていなかったように思われる。

プロログのような研究会のあと、金山氏は移動ロボットの非線形トラッキング・コントローラを研究し成果をあげている^{5,6)}。筆者らは 88 年夏より宇宙ロボットの非ホロノミックな問題を研究するようになった^{7,8)}。「Nonholonomic path planning」のように非ホロノミック性を前面に出したタイトルを持った論文はロボットの分野では筆者らの⁷⁾が最初ではないかと思う。

ロボットの指の転がり接触が非ホロノミックな拘束であることは Salisbury⁹⁾ や Kerr と Roth¹⁰⁾ も指摘していたが、Li, Canny と Heinzinger^{11,12)} は 1989 年に転がり接触の計画問題を議論した。また筆者と Mukherjee¹³⁻¹⁵⁾ は 1989 年に宇宙ロボットの角運動量保存則が非ホロノミックな拘束であることを証明し、非ホロノミックな拘束を受ける運動を Liapunov 関数を用いて計画した。この頃から数学的な背景や非線形制御理論との関係が意識されたように思われる。

非ホロノミックなロボットシステムに関する研究には、三種類の異なる背景を持つ研究者たちが取り組んでいる。移動、指、宇宙などの個々の具体的なシステムから問題指向的に取り組むもの、微分幾何学を用いた非線形制御理論の応用として取り組むもの、非線形力学の問題として取り組むものである。筆者は第一のグループに属している。

1990 年 11 月にグルノーブルで International Workshop in Adaptive and Nonlinear Control: Issue in Robotics¹⁶⁾ なる小さなワークショップが開かれ筆者も参加する機会を得たが、第二の背景からの非ホロノミッ

クなロボットシステムの制御が主要な話題の一つであった。また文献¹⁷⁾では第二および第三の背景からの論文を見ることができる。成書では、91 年に出版された¹⁸⁾の第 9 章の Kinematic Constraints の中で詳しく触れられているが、一部に不正確な記述があるのが残念である。また 91 年には IEEE International Conference on Robotics and Automation の際の Tutorial として「Nonholonomic Motion Planning: Theory, Algorithms and Applications」が開かれた¹⁹⁾。これを下敷きに、今年に入って²⁰⁾が出版されている。

もとより、浅学の筆者には急速に発展しつつあるこの分野の研究の全貌を的確に解説する能力はないことをはじめに断っておきたい。本講座では主に非ホロノミックなロボットシステムを議論する際に常識となりつつある数学的枠組みと、分野別に具体的な研究の成果を紹介し、関心をもたれる方々への招待状としたい。第 1 回の今回は、問題の記述と数学的な枠組みをお話する。

2. ホロノミックと非ホロノミック

ホロノミックな拘束とは一般化座標を $\mathbf{x} \in R^n$ 、時間を t としたときに次のように表される拘束をいう²⁾。

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \in R^m \quad (1)$$

本講座中で現われる関数はすべて解析的²¹⁾であるものとする。いま $m \leq n$ とし、 $\mathbf{h}$ の $\mathbf{x}$ に関するヤコビ行列はフルランクであると仮定する。これは (1) 式に含まれる m 個の式が独立な拘束であることを意味する。陰関数定理によれば、この場合 (1) 式を用いて m 個の一般化座標を解くことができる。この低次元化によって、システム全体の挙動を拘束条件をもたない $n-m$ 個の独立な一般化座標で記述できる。

さて、拘束条件が (1) 式のような代数方程式でなく

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0} \in R^m \quad (2)$$

のような微分方程式で表されることがある。もし (2) 式が (1) 式のような形式に帰着できるならば、その拘束は積分可能であるという。このとき当然、拘束はホロノミックである。(2) 式が (1) 式の形式に帰着できないとき、拘束は積分不可能で、非ホロノミックとなる。拘束が非ホロノミックな場合には、拘束条件を用いて一般化座標の一部を消去し低次元化をはかることができない。

Greenwood²¹⁾ によれば、一般化座標の数から独立な

注 2) 一般化座標は本来どのような物理的次元を持つものでもよく、運動量の次元を持つものを選ぶこともある¹⁾が、ここでは長さや角度の次元を持つものつまり「位置」として表されるものを想像していただきたい。

注 3) すべての変数に関して無限回偏微分可能であり、Taylor 級数の収束性が保障されている。

拘束条件の数を引いたものが「自由度」である。したがって(1)式も(2)式も m 個の独立な式からなるとすると、(1)式で低次元化されたシステムも(2)式を拘束条件とするシステムも共にシステムの自由度は $n-m$ となる。一方、一般化座標の数は前者で $n-m$ 、後者で n である。通常のロボットマニピュレータでは一般化座標の数(関節数)と自由度数はほとんど同義語になっていることと対比されたい。

x - y 平面上に伸びたレールの上を移動するロボットの拘束は(1)式のように表される。例えば、(1)式はレールの中心線である曲線の方程式を x と y で表したものである。このとき時刻 t は含まれない。

移動ロボットの運動、転がり接触などの速度で表される幾何学的拘束や宇宙ロボットの運動量保存則の拘束は $\dot{x}$ と $\dot{x}$ だけを含み $\dot{x}$ について線形な次の微分方程式で表される。

$$G(x)\dot{x}=0, \quad G(x) \in R^{m \times n} \quad (3)$$

ここで、(3)式は独立な m ($< n$) 個の拘束を表し、 $G(x)$ は行フルランクであると仮定する。

筆者らは $g(x, \dot{x}, \ddot{x})=0$ の非ホロノミックな拘束をもつロボットシステムについても研究している。アクチュエータをもたず自由に受動的に回転する関節を持つロボットの拘束条件はこのようになる。具体的には、この式はロボットの運動方程式から関節トルクが零になる関節に対応する部分を選び出したものである。この場合、全関節数が一般化座標の数であり、駆動関節の数が自由度となる。

上の例のように、運動方程式さえも一般化座標の自由な運動を妨げるときには、拘束条件となることに注意されたい。駆動関節はアクチュエータのトルクを適切に選ぶことによって自由な運動を行なえるので、その関節の運動方程式は拘束とはならない。したがって全関節が駆動されるマニピュレータでは運動方程式は自由な運動を妨げず、拘束条件にはならない。

現在までのところ、非ホロノミックロボットシステムの研究の多くは(3)式で表されるような問題に対して行なわれている。以下では、数学的な扱いの基礎について解説するが、これは特に(3)式で表されるシステムに有効である。

3. 非ホロノミックな拘束の性質

(3)式を満たす互いに線形独立な $\dot{x}$ を x の関数として次のように表す。

$$p_i = p_i(x) \quad (i=1, \dots, n-m) \quad (4)$$

$n-m$ 個の p_i は(3)式を満たす $\dot{x}$ の集合であり、 $G(x)$ の零空間の一組の基底をつくる。 $G(x)$ の零空間

図1 (3)式の拘束を満たして実現可能な $\dot{x}$ の全体

は、一般化座標 x において、拘束を満たして実現可能な運動の全体を表している。この様子を図1に示す。

さて、(3)式との対応を考えるために、(1)式のホロノミックな拘束が t を陽に含まず、 $m < n$ を満たすとする。このとき(1)式の時間に関する微分は次式のようにになる。

$$H(x)\dot{x}=0, \quad H(x) \triangleq \frac{\partial h}{\partial x} \in R^{m \times n} \quad (5)$$

もちろん上式は積分可能な微分方程式拘束条件である。

$H(x)$ は h の x に関するヤコビ行列であり、フルランクを仮定していたので、(5)式を満たす $\dot{x}$ の集合は(3)式の場合と同様 $H(x)$ の零空間である $n-m$ 次元空間となる。この一組の基底を x の関数として次のように表す。

$$p_i^h = p_i^h(x) \quad (i=1, \dots, n-m) \quad (6)$$

$h(x)=0 \in R^m$ のホロノミックな拘束は一般化座標 x が $n-m$ 次元の超曲面上に拘束されることを意味するが、(6)式の基底が張る $n-m$ 次元線形部分空間は図2に示すように、この超曲面の x における接超平面となっている。

図1の非ホロノミックな場合と図2のホロノミックな場合とでは、共に x において局所的に可能な運動の集合は $n-m$ 次元超平面となり、一見なんら差がないかのように思われる。

次に、非ホロノミックな拘束とホロノミックな拘束の幾何学的な違いをもう少し詳しく調べよう。いま $p(x)$ と $q(x)$ を共に一般化座標 x において実現可能な速度を表す $n-m$ 次元超平面に含まれる互いに独立なベクトル場とし、次のような一連の運動($0 \leq t \leq 4T$)を考える。

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} p(x(t)) & (0 \leq t < T) \\ q(x(t)) & (T \leq t < 2T) \\ -p(x(t)) & (2T \leq t < 3T) \\ -q(x(t)) & (3T \leq t \leq 4T) \end{cases} \quad (7)$$

この運動の結果得られる $x(4T)$ を以下のようにして、Taylor級数展開して計算する。

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0) + T\dot{\mathbf{x}}(0) + \frac{1}{2}T^2\ddot{\mathbf{x}}(0) + O(T^3) \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(0))$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(0) &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\dot{\mathbf{x}}(0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(2T) = \mathbf{x}(T) + T\dot{\mathbf{x}}(T) + \frac{1}{2}T^2\ddot{\mathbf{x}}(T) + O(T^3) \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(T))$$

$$= \mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) + T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) + O(T^2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(T) &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))\mathbf{q}(\mathbf{x}(T)) \\ &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) + O(T) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(3T) = \mathbf{x}(2T) + T\dot{\mathbf{x}}(2T) + \frac{1}{2}T^2\ddot{\mathbf{x}}(2T) + O(T^3) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(2T) &= -\mathbf{p}(\mathbf{x}(2T)) \\ &= -\mathbf{p}(\mathbf{x}(T)) - T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))\mathbf{q}(\mathbf{x}(T)) \\ &\quad + O(T^2) \\ &= -\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) - T \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) \right\} + O(T^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(2T) &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(2T))\{-\mathbf{p}(\mathbf{x}(2T))\} \\ &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) + O(T) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(4T) = \mathbf{x}(3T) + T\dot{\mathbf{x}}(3T) + \frac{1}{2}T^2\ddot{\mathbf{x}}(3T) + O(T^3) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(3T) &= -\mathbf{q}(\mathbf{x}(3T)) \\ &= -\mathbf{q}(\mathbf{x}(2T)) - T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(2T)) \\ &\quad \times \{-\mathbf{p}(\mathbf{x}(2T))\} + O(T^2) \\ &= -\mathbf{q}(\mathbf{x}(T)) - T \left\{ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))\mathbf{q}(\mathbf{x}(T)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(T))\mathbf{p}(\mathbf{x}(T)) \right\} + O(T^2) \\ &= -\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) - T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) \\ &\quad + O(T^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(3T) &= -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(3T))\{-\mathbf{q}(\mathbf{x}(3T))\} \\ &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) + O(T) \end{aligned}$$

図 2 (5)式の拘束を満たして実現可能な $\dot{\mathbf{x}}$ の全体

(8)式から(11)式までをまとめて次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(4T) &= \mathbf{x}(0) + T^2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{p}(\mathbf{x}(0)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(0))\mathbf{q}(\mathbf{x}(0)) \right\} + O(T^3) \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式は次のことを意味している。(7)式のような運動の後の一般化座標は、 T が十分に小さい時間である場合に T の一次項までで近似すると、時刻 $t=0$ での一般化座標に戻る。これはホロノミック、非ホロノミックを問わず得られる結果である。ホロノミック、非ホロノミックの違いは(12)式の第2項、すなわち T の2次の項によって現われることになる。式を見やすくするために(12)式第2項の T^2 を除いた部分を次のような記号で表す。

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \triangleq \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{q} \quad (13)$$

実は、ホロノミックな拘束の場合には $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ は接超平面に含まれるベクトルとなる。従って、この場合には、(7)式の運動の前後での一般化座標の差は2次近似までで表すと $\mathbf{x}(0)$ での接超平面内のベクトルとなるというのが幾何学的な意味である。このことを次に示そう。

$[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ に $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ を乗じて次式を得る。

$$\mathbf{H}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{q} \quad (14)$$

$\mathbf{p}$ は接超平面に含まれるベクトルであるから

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (15)$$

を満たす。上式を $\mathbf{x}$ で偏微分して次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p} \right\} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T \mathbf{H}_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (16)$$

ここで $\mathbf{H}_i(\mathbf{x})$ は、 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ の第 i 成分 $h_i(\mathbf{x})$ のヘシアン

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right\}^T \quad (17)$$

である。一般に $\partial^2 h_i / \partial x_k \partial x_j = \partial^2 h_i / \partial x_j \partial x_k$ であるから、ヘシアンは対称行列である。(16)式と同様の関係を $\mathbf{q}$ についても求め、これらを(15)式を考慮して(14)式に代入すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 H[p, q] &= \begin{pmatrix} p^T H_1 \\ \vdots \\ p^T H_m \end{pmatrix} q - \begin{pmatrix} q^T H_1 \\ \vdots \\ q^T H_m \end{pmatrix} p \\
 &= \begin{pmatrix} p^T H_1 q - q^T H_1 p \\ \vdots \\ p^T H_m q - q^T H_m p \end{pmatrix} = O \quad (18)
 \end{aligned}$$

ここでは H_i が対称であることを用いた。(18)式より、 $[p, q]$ が接超平面に含まれることが証明された。

拘束が非ホロノミックな場合には、ヤコビアン、ヘシアンは存在しないため、一般に $[p, q]$ は $x(0)$ における実現可能な速度を表す $n-m$ 次元超平面には留まらない。したがって、(7)式の運動の前後では2次近似での差は一般化座標の n 次元空間のどの方向をもとりうる。2次近似でのホロノミックな拘束と非ホロノミックな拘束の違いを図3に示す。この違いは、ホロノミックな拘束には拘束超曲面が存在し、非ホロノミックな拘束にはそのような固定された拘束曲面が存在しないことに起因している。非ホロノミックな拘束では少し「まわり道」をすれば局所的には動けない（接超平面上にない）方向にも動くことができる可能性がある。うまく「まわり道」を選べば、(3)式の m 個の拘束条件にもかかわらず n 次元の一般化座標の空間全体を運動できるかも知れない。これが可能かどうかは具体的な微分方程式拘束条件を調べて判定できる。これについては3節で説明しよう。

誤解を恐れなければ、次のようにも説明することができる。ホロノミックな拘束を受けた運動とは、宙に浮いた滑らかな表面を持つパンの上にのった蟻の運動のようなものであり、パンの表面が蟻の世界の全体である。非ホロノミックな拘束を受けた運動とは、パイに閉じ込められた蟻の運動のようである。局所的には、パンの表面の蟻の運動と同じように、パイの一枚の層上を歩く2次元の運動であるが、まわり道をしてうまく層と層の接点や、層の破れ目を見つけて歩けばパイ全体の3次元の世界を運動することができる。

なお、(3)式のように速度に関して線形な微分方程式となる拘束条件の積分可能性の厳密な数学的判定法については次節で述べるが、(13)式で定義した演算が主な役割を果たすことを指摘しておく。

また、移動ロボットについては次回で詳しく述べるが、非ホロノミックな拘束のロボットの意味を理解していただくよう、自動車の運転が非ホロノミックな拘束を利用していることを説明しておきたい。自動車（オートマチック車）の運転でドライバが操作するにはアクセル、ブレーキ、ハンドルの3つである。アクセルとブレーキは進行方向の正負の運動に対応し、ハンドルは進行方向を変える運動を表す。したがってドライバは常に2変数の操作をしていることになる。われわれは経験的に、自

図3 ホロノミックな拘束と非ホロノミックな拘束の幾何学的な違い

動車を2次元平面内の任意な位置に任意な方向に向けて駐車できることを知っている。つまり3変数を自由に変えることができる。もし自動車の運動がホロノミックであったならば、3変数を自由に変えることは不可能であり、位置と方向を表す3次元空間内のある2次元超曲面上に存在する位置と方向の組み合わせでしか自動車を駐車できないことになる。しかしながら、自動車の運転には練習が必要であり、ドライバは経験に基づいて運動計画と制御をしている。非ホロノミックなロボットシステムにおいて、自動車の運転でプロのドライバがするような巧みな運動計画と制御を計算機制御により実現することが、この分野の研究の主な目的である。

4. 拘束条件の積分可能性

4.1 Lie 括弧積

(13)式で定義した演算 $[p, q]$ は Lie 括弧積と呼ばれ、微分幾何学のアプローチの基礎となる。その定義と性質を次にまとめる²²⁾。

[定義 1: Lie 括弧積] 2つのベクトル場 $p(x), q(x)$ から次のようにして計算される第3のベクトル場を Lie 括弧積と呼ぶ。

$$[p, q](x) = \frac{\partial q}{\partial x}(x)p(x) - \frac{\partial p}{\partial x}(x)q(x) \quad (19)$$

一般に Lie 括弧積は次の性質を持つ。

[定理 1: Lie 括弧積の性質]

(i) **bilinearity**: p_1, p_2, q_1, q_2 をベクトル場とし、 r_1, r_2 を実数とする。このとき

$$\begin{aligned}
 [r_1 p_1 + r_2 p_2, q_1] &= r_1 [p_1, q_1] + r_2 [p_2, q_1] \\
 [p_1, r_1 q_1 + r_2 q_2] &= r_1 [p_1, q_1] + r_2 [p_1, q_2]
 \end{aligned} \quad (20)$$

(ii) **skew commutativity**: p, q をベクトル場とす

ると

$$[p, q] = -[q, p] \quad (21)$$

(iii) **Jacobi identity**: p, q, r をベクトル場とすると

$$[p, [q, r]] + [q, [r, p]] + [r, [p, q]] = 0 \quad (22)$$

上の3つの性質は(19)式の定義に基づいて計算すれば容易に導くことができる。

4.2 積分可能性 (Frobenius の定理)

$\dot{x}$ として、(3)式を満たす(4)式で定義された線形独立なベクトル場 $p_i(x)$ ($i=1, \dots, n-m$) を用いて次の行列 $P(x)$ を作る。

$$P(x) = (p_1(x) \cdots p_{n-m}(x)) \in R^{n \times (n-m)} \quad (23)$$

このとき $P(x)$ が次式を満たすことは明らかである。

$$G(x)P(x) = 0 \quad (24)$$

もし、 $h(x) = (h_1(x) \cdots h_m(x))^T = 0$ が存在し、そのヤコビ行列が行フルランクであり

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} P(x) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (25)$$

を満たすならば、(3)式を満たす $\dot{x}$ の集合はすべての x において $h(x) = 0$ の接超平面に一致する。これは(3)式の微分方程式拘束条件が $h(x) = 0$ の形に帰着できるホロノミックな拘束であることを意味する。

(25)式のような一階偏微分方程式の可解性については、Frobenius の定理と呼ばれるものがあり、これを使って判定することができる。はじめに distribution, involutivity, 完全積分可能性を以下のように定義しておく²²⁾。

[定義 2: distribution] 変数 $x \in R^n$ のもとで定義されたベクトル場 $q_i(x)$ ($i=1, \dots, k$) の集合が x で張る線形空間を distribution と呼び $\Delta(x)$ で表す。

あるベクトル場の集合に対して、その distribution の次元がすべての x において一定になるとき、distribution は nonsingular と呼ばれる。distribution を用いて involutivity を次のように定義する。

[定義 3: involutivity] distribution $\Delta(x)$ に含まれる任意な2つのベクトル場の Lie 括弧積がやはり $\Delta(x)$ に含まれるとき、その distribution は involutive である。

定理1の(i)と(ii)の性質より、ベクトル場の集合 $q_i(x)$ ($i=1, \dots, k$) から2つのベクトル場を選ぶ kC_2 個の組み合わせに対して、Lie 括弧積がすべて $\Delta(x)$ に含まれることを確認することにより、 $\Delta(x)$ の involutivity を結論できる。

[定義 4: 完全積分可能性] nonsingular で $n-m$ 次元の distribution $\Delta(x)$ がすべての $x \in R^n$ において、 $\partial h_i / \partial x$ ($i=1, \dots, m$) の張る線形空間が常に $\Delta(x)$ に

直交するような $h_i(x)$ ($i=1, \dots, m$) をもつとき、その distribution は完全積分可能であるといわれる。

定義4は distribution が $h_i(x) = 0$ ($i=1, \dots, m$) の接超平面になるとき完全積分可能ということに他ならない。以上の3つの概念を用いて Frobenius の定理は次のように記述される²³⁾。

[定理 2: Frobenius の定理] nonsingular な distribution が完全積分可能であるための必要十分条件はその distribution が involutive であることである。

ベクトル場 $p_i(x)$ ($i=1, \dots, n-m$) により distribution を

$$\Delta(x) = \text{span} \{p_1(x), \dots, p_{n-m}(x)\} \quad (26)$$

と与えよう。 $p_i(x)$ は常に線形独立と仮定したから、すべての x において $\dim \Delta(x) = n-m$ が成り立ち、 $\Delta(x)$ は nonsingular である。 $\Delta(x)$ は(23)式の行列 $P(x)$ の値域空間と一致するため、 $\Delta(x)$ が完全積分可能であれば(25)式を満たす $h_i(x) = 0$ ($i=1, \dots, m$) が存在し、ホロノミックな拘束条件式となる。したがって、定理2の対偶をとれば、非ホロノミックな拘束を判定する次の定理を得る。

[定理 3: 非ホロノミックな拘束の判定] (3)式の微分方程式拘束条件を満たす(4)式のベクトル場の集合が nonsingular な distribution をもつとき、その拘束条件が非ホロノミックであるための一つの必要十分条件は distribution が involutive でないことである。

5. 可 制 御 性

(3)式がホロノミックな拘束を表す微分方程式のときには、その解である一般化座標の運動は拘束超曲面 $h(x) = 0$ に限られ、この超曲面を脱出して動くことはできない。一方、(3)式が非ホロノミックな拘束を表すときには、このような固定された拘束超曲面は存在しない。ここで、われわれの基本的な関心は、非ホロノミックなシステムが拘束微分方程式を満たして運動するとき、 n 次元一般化座標空間の任意な初期点から出発して別の任意な終端点へたどり着く軌道が存在するかどうかである。

(2)式のような一般の非ホロノミックな微分方程式拘束条件に対して上の質問に応えるような強力な結果は見つかっていない。しかし、幸い(3)式のような形式の拘束については答えることが可能である。

(3)式の拘束条件に対して、(4)式のような線形独立なベクトル場 $p_i(x)$ ($i=1, \dots, n-m$) が見つかったとしよう。このとき(23)式で定義した行列 $P(x)$ と任意ベクトル u を用いて、拘束を満たす任意な $\dot{x}$ は次のように表すことができる。

$$\dot{x} = P(x)u \quad u \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (27)$$

(27) 式は x を状態量 u を入力と考えれば、ある種の非線形制御システムを表していると考えられる。

任意な $x(t_1)$ から別の任意な $x(t_2)$ ($t_2 \geq t_1$) へ有限時間で状態を移せる入力 $u(t)$ が存在するかどうかは、自動制御の分野で可制御性と呼ばれる概念である。ある構造をもつ非線形制御システムの可制御性に関連した性質を議論するために微分幾何学を用いた方法が確立されており、(27) 式のようなシステムにはこれを適用することができる。本節の以下ではこの方法に基づく非ホロノミックシステムへのアプローチを紹介する。

一般に次式のように入力 u に関して線形な非線形システムをアフィンシステム (Affine system) と呼ぶ。

$$\dot{x} = f(x) + P(x)u \quad (28)$$

アフィンシステムの可制御性を議論するための第一ステップとして local accessibility という概念がある。これは直感的には、 $x(t_1)$ からたどり着くことのできる x の集合が任意の $x(t_1)$ に対して n 次元空間で零でない容積をもつ開集合となることである²⁴⁾。厳密な定義等は文献を参照されたい。(28) 式のアフィンシステムが locally accessible かどうかは Lie 括弧積を用いて判定することができる。

locally accessible であるシステムが $x(t)$ を常に開集合の内部にもつ場合には (図 4 (a)), 開集合を連続的にたどることにより任意な x へたどり着くことができ、可制御となる。しかし、locally accessible であっても $x(t_1)$ が開集合の境界上に存在することがある場合には (図 4 (b)), 可制御性の判定はさらに別の評価が必要になる²⁴⁾。非線形システム $\dot{x} = f(x, u)$ が $f(x, -u) = -f(x, u)$ を満たすとき対称なシステムと呼ばれる。(27) 式はアフィンかつ対称なシステムである。このようなシステムには local accessibility は図 4 (a) の場合だけを意味する。したがって、対称アフィンシステムの local accessibility はそのまま可制御性と一致する。

以上の議論を次の定義 5 と定理 4 の形でまとめる。

[定義 5: accessibility distribution] ベクトル場 $p_i(x)$ ($i=1, \dots, n-m$) と、これらから次式のようにして求めるすべてのベクトル場が張る線形空間 $\Delta_p(x)$ を accessibility distribution と呼ぶ。

$$[r_k, [r_{k-1}, [\dots, [r_2, r_1] \dots]]] \quad k=2, 3, 4, \dots \quad (29)$$

$$r_i \in \{p_1(x), \dots, p_{n-m}(x)\}$$

定義 5 の r_i の選択では重複が許される。つまり、 $r_i = r_j = p_k(x)$ ($i \neq j$) のこともありうる。accessibility distribution は x の近傍で到達可能な開集合を表している。

[定理 4: 対称アフィンシステムの可制御性] 対称ア

(a) 開集合の中に $x(t_1)$ がある場合

(b) 開集合の境界上に $x(t_1)$ がある場合

図 4 Local Accessibility の 2 つの場合

フィンシステムの accessibility distribution $\Delta_p(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $\dim \Delta_p(x) = n$ を満たすならば、そのシステムは可制御である。

定理 4 の証明は文献 24) を参照されたい。

(28) 式のような対称でないアフィンシステムの local accessibility は定義 5 において $p_i(x)$ ($i=1, \dots, n-m$) のベクトル場の集合に $f(x)$ (drift 項と呼ばれる) を加えた $n-m+1$ 個のベクトル場に対して accessibility distribution を計算し、定理 4 の「可制御性」を「local accessibility」と言い換えて判定することができる。

なお、 $\dot{x} = Ax + Bu$ で表される線形定係数システムの local accessibility 条件は次式よく知られた可制御性ランク条件と一致する^{22,23)}。

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (30)$$

微分幾何学に基づく非線形制御理論については石島辰太郎氏による詳しい解説記事がある²⁵⁾。特に、解説 [I], [II] では 3 節と 4 節の内容のより厳密な説明を読むことができる。

状態量が一般化座標だけからなる場合には、定理 2 と定理 4 より次の結果が得られる。

[定理 5: 可制御性と拘束条件] 入力数が状態量 (一般化座標) の数より少ないアフィンかつ対称な非線形システムが可制御ならば、そのシステムは非ホロノミックな拘束を受けている。

制御理論において、入力 u の数が状態量 x の数より少ないのは珍しいことではない。われわれが問題にしているのは入力数が状態量の数より少ないシステムでなく、入力数が一般化座標の数より少ないシステムである。力学システムでの状態量には一般化座標のほかにその速度なども含まれることがある。したがって、状態量に基づく可制御性の議論と一般化座標に関する非ホロノミックな拘束の議論は完全にはかみ合っていないことに注意する必要がある。入力数が状態量の数より少ない可制

御なシステムが非ホロノミックであるという命題は一般には誤りである。

6. 第1回のまとめ

非ホロノミックロボットシステムの研究の発展の経過、非ホロノミックな拘束条件の定義・性質、ならびに非ホロノミックロボットシステムを議論するために必要になる数学の基礎について講義を行なった。扱い方の複雑さに惑わされずに、物理的な意味を押さえながら結果を理解することが大事である。

第2回は移動ロボットの非ホロノミック運動の研究を中心に、第1回で解説した数学がどのように利用され、どのような結論が導かれるかを紹介する。

参 考 文 献

- Goldstein, H.: Classical Mechanics, second edition, Addison-Wesley, pp.11-16, 1980.
- Laumond, J.-P.: Feasible trajectories for mobile robots with kinematic and environment constraints, in Intelligent Autonomous Systems, (O. L. Hertzberger, and F. C. A. Groen, eds), pp.346-354, 1987.
- Vafa, Ziaeddin: The kinematics, dynamics and control of space manipulators: the virtual manipulator concept, Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, November, 1987.
- Eubowsky, S., and Vafa, Z.: A virtual manipulator model for space robotic systems, Proc. Workshop on Space Telerobotics, NASA, Vol.3, pp.335-344, Pasadena, CA, July 1987.
- Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., and Noguchi, T.: A stable tracking control of an autonomous mobile robot, Proc. 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.384-389, Cincinnati, OH, May, 1990.
- Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., and Noguchi, T.: A stable tracking control method for a nonholonomic mobile robots, Proc. IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91, pp.1236-1241, Osaka, November, 1991.
- Nakamura, Y., and Mukherjee, R.: Redundancy of space manipulator on free-flying vehicle and its nonholonomic path planning, Proc. NASA Conf. on Space Telerobotics, pp.181-190, Pasadena, CA, Jan. 1989.
- Nakamura, Y., and Mukherjee, R.: Nonholonomic path planning of space robots, Proc. 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1050-1055, Scottsdale, Arizona, May, 1989.
- Salisbury, J. K.: Kinematic and force analysis of articulated hands, Ph.D. thesis, Dept. Mechanical Engineering, Stanford University, 1982.
- Kerr, J., and Roth, B.: Analysis of multifingered hands, International Journal of Robotics Research, Vol.4, No.4, pp.3-17, 1986.
- Li, Z., Canny, J., and Heinzinger, G.: Robot motion planning with nonholonomic constraints, in Robotics Research: the Fifth International Symposium (August 1989, Tokyo), MIT press, pp.309-316, 1990.
- Li, Z., and Canny, J.: Motion of two rigid bodies with rolling constraint, IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol.6, pp.62-72, February, 1990.
- Nakamura, Y., and Mukherjee, R.: Bi-directional approach for nonholonomic path planning of space robots, in Robotics Research: the Fifth International Symposium (August 1989, Tokyo), MIT press, pp.405-416, 1990.
- Nakamura, Y., and Mukherjee, R.: Nonholonomic path planning of space robots via bi-directional approach, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1764-1769, Cincinnati, OH, May, 1990.
- Nakamura, Y., and Mukherjee, R.: Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach, IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol.7, No.4, pp.500-514, 1991.
- Canudas de Wit, C. ed.: Advanced Robot Control, (Proc. International Workshop on Nonlinear and Adaptive Control: Issues in Robotics, Grenoble, France, November 1990), in Lecture Notes in Control and Information Sciences series, No.162, Springer-Verlag, 1991.
- Marsden, J. E., Krishnaprasad, P. S., and Simo, J. C., eds.: Dynamics and Control of Multibody Systems, Contemporary Mathematics, Vol.97, (Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, July 30-August 5, 1988), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1989.
- Latombe, J. C.: Robot Motion Planning, Kluwer Academic Pub., 1990.
- Canny, J. F., Li, Z. X., Burdick, J. Wen, J. (Eds.): Nonholonomic motion planning: theory, algorithms and applications, The handout of Tutorial F2 at the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA, May, 1991.
- Li, Z., and Canny, J. F. (eds.): Nonholonomic motion planning, Kluwer Academic Pub., 1993.
- Greenwood, D. T.: Principles of dynamics, 2nd ed., Prentice Hall, 1988.
- Nijmeijer, H., and van der Schaft, A. J.: Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, 1990.
- Ishidori, A.: Nonlinear Control Systems, second edition, Springer-Verlag, 1989.
- Hermann, R., and Krener, A.: Nonlinear controllability and observability, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.22, No.5, pp.728-740, 1977.
- 石島・微分幾何とシステム論 [I] [II] [III] [IV] [V], 計測と制御, Vol.25, No.11, 12, および Vol.26, No.2, 3, 5, 1986-87 年.

中村仁彦

(Yoshihiko MAKAMURA)

1954年9月22日生。1977年京都大学工学部精密工学科卒業。82年同大学大学院博士課程修了。同年より87年まで同大学助手。87年より91年3月までカリフォルニア大学サンタバーバラ校助教、準教授。同年4月より東京大学工学部機械情報工学科助教。工学博士。

(日本ロボット学会正会員)