非ホロノミックロボットシステム

第4回 動力学的な非ホロノミック拘束の下での運動

中 村 仁 彦*

前回までのあらすじ

第1回では拘束条件が積分不可能なとき非ホロノミックと呼ばれることを述べ、そのような拘束を受ける運動の物理的な意味とそれを扱う数学的な枠組みを解説した。第2回では Brockett のフィードバック安定化不可能性の定理を紹介した後、幾何学的な理由により得られる拘束条件が非ホロノミックである場合の運動計画について詳説した。第3回では幾何学的な非ホロノミック拘束の下での運動制御と題して、開ループ制御と閉ループ制御の主な話題を紹介した。開ループ制御では、nilpotent あるいは nilpotent 化可能なシステムに各 P.Hall 座標に沿った運動を計画し、それに対する入力を計算する Lafferriere と Sussman の方法、chained from に変換し、Murray と Sastry の周期の異なる正弦波入力を利用する方法について述べた。閉ループ制御では、Brockett の定理の条件を満たさないような問題設定として、トラッキング制御、時変状態フィードバック制御、区分解析的フィードバック制御が研究されていることを解説した。

1. 第4回の構成

第4回と第5回ではシステムの力学的な構造がシステムの運動に対して拘束条件を形作り、それが非ホロノミック、つまり積分不可能になる場合について解説する。これには自由飛行型宇宙ロボットの運動、飛び込みやトランポリンなどの体操運動、宇宙遊泳中の宇宙飛行士のジェットを使わない姿勢変化法、落下中の猫が巧みに体をひねることで足を地面に向けて着地するいわゆる「猫ひねり」など、運動量及び角運動量保

存則が関係する場合が代表的である。これ以外には、自由関節を持つマニピュレータや自由関節で連結された宇宙建造物の運動がある。これらでは駆動力が常に0の関節が存在し、その運動方程式が直接、積分不可能な拘束条件となる。前者のグループも後者のグループもいずれの場合でも、一般化座標の数よりもアクチュエータの数が少ないことが特徴であり、Under-Actuated Mechanisms と呼ばれる^{#1)}。今回はこのようなシステムが非ホロノミックな拘束条件を持つようになる力学的な理由を中心に解説しよう。Under-Actuated Mechanisms の制御については次回に述べる。

2. 猫ひねり・宙返り・宇宙遊泳

一般化座標の数に比べて入力の数が少ないことが、厳密には必要条件でも十分条件でもないが、非ホロノミックな拘束を受けるシステムが典型的に持つ特徴の1つである。このような特徴を持つ力学系が示す一見不可能に思える挙動は古くから、力学を研究する者の好奇心を刺激してきた²⁾。

図1はいわゆる「猫ひねり」(falling cat phenomenon) と呼ばれるものである³⁾。背を地面に向けてように猫の手足を持ち静かに放してやると、猫は空中で胴体を回転させ、背を上へ手足を地面に突き立てるようにして着地する。最初と最後だけを見れば、手足はそのまま胴体だけを回転させているかのように見える。初期角運動量0で外からトルクを受けない猫にこれは不可能な運動である^{#2)}。実は良く見れば、落ちる間に猫は体をひねり、もがくような運動をしていることが分かる。このような一見不可能に見える運動が可能な理由を力学的に説明することに関心が持たれてきた。Kane と Scher³⁾は猫の上半身と下半身を表す2

原稿受付 1993年9月16日
Nonholonomic Robot Systems
Part 4 Motion under Dynamical Nonholonomic Constraints

* 東京大学工学部

注1) Baillieul¹⁾は関節の数がアクチュエータの数よりも多いメカニズムを Super-Articulated Mechanisms と呼んでいる。同じ特徴を逆の視点から見た呼び名である。

図1 猫ひねり

図2 トルクなし後方 1/4 宙返り (back drop)⁴⁾

つの剛体とその間の回転により猫ひねりが可能であることを数値計算により示した。

猫ひねりは何も猫だけの特技ではない。Frohlich⁴⁾はトランポリンや水泳の高飛び込みでの宙返りを、力学的に解析し、初期角運動量 0 でも可能であることを説明している。図 2 は Back-Drop と呼ばれる技である。初期角運動量が 0 であっても、1-2-3-4-5-6 の一連の運動により約 82 度の回転が可能である。論文の中で、アンケート結果を示し、図 2 の運動が可能かどうかという問いに、コーチの 38% や物理学者の 34% が不可能と答えたと言っている。

Kane と Scher⁵⁾は猫ひねりを宇宙遊泳中の宇宙飛

注 2) 重力が働いているために外力は 0 でない。しかし自由落下中の運動は同時に重力加速度で落下する座標系から見ると、無重力下での運動とみなせることから、猫が必要を感じるかどうかは別にして、無重力状態でも「猫ひねり」は力学的に可能である。実際、Kane と Scher の計算³⁾では重力の影響を考慮していない。

図3 ヨー角運動モデル⁵⁾

行士の姿勢を変化させるのに使うことを提案した。手足にある決まった周期運動をさせることで 1 周期当たり約 30 度の pitch 及び yaw の回転運動が可能であることを図 3 のような簡単な剛体モデルを用いた計算により示した。さらに Kane, Headrick と Yatteau⁶⁾は実験によりこれを検証した。図 4 は yaw, pitch, roll 運動を行うための腕の周期運動を示している³⁾。

上のようなシステムでは入力は胴体あるいは手足の関節の速度やトルクである。系全体の一般化座標はこれらの関節の角度のほかに 1 つの代表的な剛体（どれでもよい）の絶対的な位置と姿勢の 6 変数を含む。したがって、一般化座標の数が入力の数より常に 6 個多い。入力では直接変化しない一般化座標の運動を自由に操っていることがこのような運動が不思議に見える理由であろう。

これらの先駆的研究では主に特定の運動現象の説明などが主題であった。最近では、ロボット工学や制御理論的な見地から、猫ひねり、宙返り、空中での姿勢制御を研究したものも現われている^{7)~12)}。山藤、小林、河村⁹⁾は空気圧人工筋で駆動される背骨型関節を持つロボットを試作し、実験的に猫ひねり運動を行わ

注 3) 日本人宇宙飛行士、毛利衛さんがスペースシャトルの無重力の中で、手足を素早く動かして体の姿勢を変えるシーンを記憶されている方もあろう。あれは非ホロノミックな姿勢制御と空気抵抗を利用した「泳ぎ」の混在したものであると思う。ゆっくりと手足を動かして、後者の影響を少なくした動きも見せてもらえればよかった。少し残念である。

図4 自己回転操作⁶⁾

せることに成功している。

3. 力学系の対称性と運動量・角運動量保存則

3.1 Under-Actuated Mechanisms の拘束条件

前節で述べた一見不思議に見える運動の種明かしは、角運動量保存則の非ホロノミック性にある。実際、前節の例では、一般化座標を $x \in R^n$ とすると、運動量・角運動量保存則が、

$$G(x)\dot{x}=0, \quad G(x) \in R^{6 \times n} \quad (1)$$

の形で表される。このうち運動量保存則に対応する3つの拘束条件は容易に積分できる。一方、角運動量保存則に対応する残りの3つの拘束条件は一般には非可積分であり、非ホロノミックとなる。ここでは、前節の例のような Under-Actuated Mechanisms がどのような力学的特徴により、このような性質を持つことになるのかを見る。

図5は無重力中を浮遊する $n+1$ 個の剛体からなる多体リンク系を表している。ここで、多体リンク系は直列のものだけを考える⁴⁾。関節は1自由度を持ち、それぞれにアクチュエータを備えている。関節角度は系の相対位置を完全に記述するが、系の運動を論じるためには慣性座標系から見た絶対運動を記述しなければならない。このためには関節角度に加えて n 個のリンクのうちのいずれか1つの絶対座標が必要で

図5 浮遊多体リンク系

ある。一端の剛体をリンク0と呼び、順にリンク1からリンク n までがつながっていると看する。リンク0の慣性座標から見た位置、姿勢を $R^3 \times SO(3)$ で表す。 R^3 は位置を表す3次元ユークリッド空間、 $SO(3)$ は3次元での姿勢を表す多様体である。 $SO(3)$ は行列式の値が1のすべての 3×3 直交行列の集合に等しい⁵⁾。

多様体の定義により、 $SO(3)$ は局所的には R^3 とみなすことができる。特異点以外において、オイラー角は局所的に選ばれる1つの R^3 座標系と考えることができる。以下では速度、加速度などの局所的な運動を議論するので、オイラー角を用いる。オイラー角の特異点の近傍では異なった種類のオイラー角に切り替えればよい⁶⁾。

$$x_1 = \begin{pmatrix} r_0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in R^6 \quad (2)$$

をリンク0の絶対座標とする。 $r_k \in R^3$ ($k=0, \dots, n$) はリンク k の重心の位置、 $\alpha \in R^3$ はリンク0の姿勢の局所座標としてのオイラー角である。関節角度ベクトルを $x_2 = (\theta_1 \dots \theta_n)^T \in R^n$ とすると、全一般化座標は次のようになる。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^{6+n} \quad (3)$$

リンク k の慣性座標系に対する角速度を ${}^I\omega_k$ 、質量を m_k 、慣性座標系で表した質量中心回りの慣性モー

注4) 木構造開リンクのものは本質的に直列のものと同じである。閉リンク系となるものは別の拘束条件を付加的に持ち複雑になるのでここでは扱わない。

注5) つまり、行列式が1となる 3×3 のいわゆる姿勢変換行列で表される姿勢の全体を意味するのが $SO(3)$ と考えてよい。 $SO(3)$ による姿勢の記述は、オイラー角(R^3)で姿勢を表す際に問題になる座標系の選び方によって変わる特異点や異方向性を持たない。地球儀をメルカトル図法などによって2次元平面(R^2)に射影するのではなく、球面($SO(2)$)として理解するほうが正確であるのを思い出していただきたい。

注6) 例えば、Z-Y-X オイラー角 (特異点、 $\beta = \pi/2 + N\pi$, N は整数) で $\beta = \pi/2$ の近傍になると、Z-Y-Z オイラー角 (特異点、 $\beta = N\pi$, N は整数) へ切り替えればよい。

メントを ${}^I\mathbf{I}_k$ とすると、系の全運動エネルギーは、

$$T = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} m_k {}^I\dot{\mathbf{r}}_k {}^T {}^I\dot{\mathbf{r}}_k + \frac{1}{2} {}^I\boldsymbol{\omega}_k {}^T {}^I\mathbf{I}_k {}^I\boldsymbol{\omega}_k \quad (4)$$

となる。無重力を仮定しているため、系の運動は Euler-Lagrange 方程式を解いて、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau}^T \quad (5)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\tau} \in R^{6+n}$ は一般化座標 $\mathbf{x}$ に対応して定義される一般化力である。 $\boldsymbol{\tau}$ を 2 つに分けて、

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\tau}_1 \in R^6, \boldsymbol{\tau}_2 \in R^n \quad (6)$$

とする。 $\boldsymbol{\tau}_2$ は関節トルクを表す。 $\boldsymbol{\tau}_1$ は $\mathbf{x}_1$ に対応しているが、リンク 0 には関節 1 で加わる内力以外の力・トルクを受けないため、 $\boldsymbol{\tau}_1 = 0$ である。したがって、式(5)は次のように 2 つの式に分けられる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_1} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_2} = \boldsymbol{\tau}_2^T \quad (8)$$

式(7)は系に許された加速度運動を制約するものであり、その意味で拘束条件とみなせる⁷⁾。式(8)は式(7)を満足する加速度運動をする際の駆動関節トルクを与える式である。式(7)の拘束条件が、もし

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = 0 \in R^6 \quad (9)$$

の形に積分可能なら、式(7)はホロノミックであり、そうでなければ非ホロノミックである。

3.2 運動量保存則と循環座標

式(4)の ${}^I\dot{\mathbf{r}}_k$ 、 ${}^I\boldsymbol{\omega}_k$ と一般化座標の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^I\dot{\mathbf{r}}_k &= {}^I\dot{\mathbf{r}}_0 + {}^I\boldsymbol{\omega}_0 \times ({}^I\mathbf{r}_k - {}^I\mathbf{r}_0) + \sum_{i=1}^k {}^I\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \dot{\theta}_i \\ {}^I\boldsymbol{\omega}_k &= {}^I\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{i=1}^k {}^I\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \dot{\theta}_i \\ {}^I\boldsymbol{\omega}_0 &= \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)で $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ はオイラー角の速度 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ を角速度に変換する 3×3 行列である。オイラー角の特異点では特異となるが、 $\boldsymbol{\alpha}$ を局所座標と考えているので常に正則としてよい。

${}^I\mathbf{h}_i$ 、 ${}^I\mathbf{f}_i$ は関節速度 $\dot{\theta}_i$ が ${}^I\mathbf{r}_k$ 、 ${}^I\boldsymbol{\omega}_k$ に与える影響を表すベクトルであり、一般化座標 $\mathbf{x}$ の関数となっている。 ${}^I\mathbf{h}_i$ 、 ${}^I\mathbf{f}_i$ の物理的な意味を考えると、これらが次のような構造的特徴を持つ関数であることが分か

る。

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) {}^B\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_2) \\ {}^I\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) {}^B\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$ はリンク 0 の姿勢を表す 3×3 直交行列である。 ${}^B\mathbf{h}_i$ 、 ${}^B\mathbf{f}_i$ はそれぞれリンク 0 に固定した座標系から見たリンク k の速度と角速度(${}^B\dot{\mathbf{r}}_k$ 、 ${}^B\boldsymbol{\omega}_k$)に与える $\dot{\theta}_i$ の影響を表している。式(11)で ${}^I\mathbf{h}_i$ 、 ${}^I\mathbf{f}_i$ がすべての i で共通因子 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$ を持つこと、 ${}^B\mathbf{h}_i$ 、 ${}^B\mathbf{f}_i$ に $\mathbf{x}_1$ が入らないことに注意されたい。

式(10)、(11)を用いて式(4)を計算すると、運動エネルギー T は次のような形の関数であることが分かる。

$$T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}) \quad (12)$$

つまり、 T には ${}^I\mathbf{r}_0$ は陽に含まれていない。一般に Lagrangian $L = T - U$ に一般化座標 x_i が陽に現れないとき、 x_i は循環座標(cyclic coordinates)と呼ばれる。一般化力が 0 のとき、循環座標 x_i に対する Euler-Lagrange 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (13)$$

つまり、

$$p_i \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const} \quad (14)$$

となる。ここで p_i は x_i に対する一般化運動量と呼ばれる。式(14)は循環座標に対する一般化運動量が保存されることを示している¹³⁾。

われわれは $U=0$ を仮定しているため、式(12)は ${}^I\mathbf{r}_0$ が循環座標であることを示している。したがって、 ${}^I\mathbf{r}_0$ に対する一般化運動量 ${}^I\mathbf{p}_0$ は保存され、

$${}^I\mathbf{p}_0 \triangleq \left(\frac{\partial T}{\partial {}^I\dot{\mathbf{r}}_0} \right)^T = \text{const} \quad (15)$$

となる。式(4)、(10)、(11)を用いて計算すると、

$${}^I\mathbf{p}_0 = \sum_{k=0}^n m_k {}^I\dot{\mathbf{r}}_k = \text{const} \quad (16)$$

を得る。 ${}^I\mathbf{p}_0$ は系の全運動量にほかならず、これが保存されることが分かる。式(10)、(16)より、運動量保存則が一般化座標の速度に線形な式(1)の形式になることは明らかである。

${}^I\mathbf{r}_k = {}^I\mathbf{r}_k(\mathbf{x})$ となることを考慮すると、式(16)は容易に積分で次のようになる。

$$\mathbf{h}_0(\mathbf{x}, t) \triangleq \sum_{k=0}^n m_k {}^I\mathbf{r}_k(\mathbf{x}) - (t - t_0) {}^I\mathbf{p}_0 - \mathbf{k}_0 = 0 \quad (17)$$

ここで、 t_0 は初期時刻、 ${}^I\mathbf{p}_0$ と $\mathbf{k}_0$ は定数ベクトルである。したがって式(7)の上半分はホロノミックな拘束であると結論できる。なお、初期運動量を零(${}^I\mathbf{p}_0 = 0$)とし、式(17)を全質量 $\sum_{k=0}^n m_k$ で割ると、

注 7) $\boldsymbol{\tau}_2$ を入力として自由に変えることができると考えると、式(8)で $\dot{\mathbf{x}}$ は何ら拘束を受けない。よって、式(8)は拘束条件ではない。この意味で、通常のマニピュレータはホロノミックである。

$$\frac{\sum_{k=0}^n m_k \mathbf{r}_k(\mathbf{x})}{\sum_{k=0}^n m_k} = \frac{\mathbf{k}_0}{\sum_{k=0}^n m_k} \quad (18)$$

となる。式(18)左辺は系全体の質量中心であり、これが動かないことを表している。なお、式(7)上半分の拘束条件に対し、式(10)を第一積分、式(17)を第二積分と呼ぶことがある。

3.3 角運動量保存則

式(12)より T に α が陽に含まれるため、 α に対応する保存則を循環座標の考え方で見つけることはできない。しかしながら、 T の関数構造から α の一般化運動量でない別の物理量の保存則を導くことができ、これが角運動量保存則と呼ばれる。以下に手短かにこれを示そう。

α と式(10), (11)に現われる $\mathbf{K}(\alpha)$, $\mathbf{R}(\alpha)$ はオイラー角の種類によらず⁸⁾、次式を満足することが容易に証明できる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} (W \dot{\alpha}) &= 0 \\ W(\alpha) &\triangleq \mathbf{R}^T(\alpha) \mathbf{K}(\alpha) \end{aligned} \quad (19)$$

式(7)より、 α に対して Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \quad (20)$$

となるが、式(4), (10), (11), (19)を用いて式(20)を計算すると、 $\mathbf{K}$ の正則性の仮定により、等価的に次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right)^T + {}^I \dot{\mathbf{r}}_0 \times {}^I \mathbf{p}_0 = 0 \quad (21)$$

さらに、式(21)は次のように変形できる。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right)^T + {}^I \dot{\mathbf{r}}_0 \times {}^I \mathbf{p}_0 \right\} = {}^I \dot{\mathbf{r}}_0 \times {}^I \dot{\mathbf{p}}_0 \quad (22)$$

ここで、運動量保存を仮定すれば (${}^I \dot{\mathbf{p}}_0 = 0$)、式(22)は次のように積分できる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right)^T + {}^I \dot{\mathbf{r}}_0 \times {}^I \mathbf{p}_0 = \text{const} \quad (23)$$

式(23)の左辺を式(4), (10), (15)を用いて計算すると次の式が得られる。

$$\sum_{k=0}^n {}^I \mathbf{I}_k {}^I \boldsymbol{\omega}_k + m_k {}^I \mathbf{r}_k \times {}^I \dot{\mathbf{r}}_k = \text{const} \quad (24)$$

式(24)の左辺は各リンクの慣性座標系に対する角運動量の和である。したがって、全角運動量は保存されることが分かる。保存されるのが α に対する一般化運動量 $\partial T / \partial \dot{\alpha}$ ではないことに注意されたい。

したがって、式(7)の下半分の拘束条件が式(24)の

注8) 連続する2つの回転軸が直交するように選ぶ限りは、どのような3つの回転軸を用いて定義されるオイラー角でもよい。

ような第一積分を持つことが明らかになった。式(10)より、式(24)も一般化座標の速度に関して線形であり、式(1)の形式になる。式(24)が第二積分を持つかどうか、すなわちホロノミックかどうかは、運動量保存則の場合のように簡単に答えることはできない。

${}^I \mathbf{I}_k$, m_k やその他のパラメータが具体的に与えられたときには、第1回の4.5節で述べたように、式(1)の形式から、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (25)$$

を導き、 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ の列ベクトル間の Lie 括弧積を計算して、involutivity を調べることで積分可能かどうかを判断できる。図5のような構造の宇宙ロボットに対して適当なパラメータを仮定し、ある特定の姿勢で Lie 括弧積を計算し、その姿勢の近傍で非ホロノミックで可制御であることが判定されている^{14), 15), 16)}。一般に、3次元の浮遊多体リンク系では特殊なパラメータや特殊な姿勢を除いて、非ホロノミックであり可制御であることが予想される。この厳密な証明や、どのような状況でそうならないかについてはまだ明確な解答が得られていない。

なお、図5のような浮遊多体リンク系の運動の効率的な計算法については、文献^{17), 18), 19)}を参照されたい。文献^{18), 19)}のアルゴリズムは外力が存在する場合にも適用でき、運動量・角運動量の陽な計算を含んでいることが特徴である。

4. 自由関節を持つ多体リンク系の拘束条件

4.1 自由関節を持つ多体リンク系

荒井、館²⁰⁾は駆動用モータを備えない自由関節を持つ平面マニピュレータの位置制御について研究している。自由関節にはブレーキが装着され、駆動用モータを備えた能動関節の運動を入力と見て自由関節を制御することと、自由関節にブレーキをかけて能動関節だけを制御することの2段階に分けて制御している²⁹⁾。自由関節のブレーキは仕事を取り出すものではないが、その関節の運動に影響を与えるので、ある種のアクチュエータと考えられる。したがって、このシステムは Under-Actuated Mechanism ではない。

注9) 一般に、線形化したモデルが可制御の場合には非線形モデルも可制御であるが、前者が不可制御であっても後者を不可制御と結論することはできない。自由関節を持つマニピュレータの非線形運動方程式を線形化した式は不可制御となるが、このことから、直ちに非線形モデルが可制御か不可制御か、判断することはできないことに注意されたい。つまりブレーキ無しでも自由関節を持つマニピュレータの位置決めができないとは言いきれない。

荒井, 館²¹⁾は自由関節を持つマニピュレータによる経路追従制御にも成功している。

自由関節を持つマニピュレータは地上では実用的に意味のあるものは平面構造のものに限られるが, 宇宙の無重力状態では空間構造のものに発展させることができる。どちらの場合でもポテンシャルエネルギーを0を考えることができるので, 系の Lagrangian は運動エネルギーに等しい。したがって, $\mathbf{x}_1 \in R^n$ を自由関節, $\mathbf{x}_2 \in R^n$ を駆動関節とし, 一般化座標を $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T)^T$ とすると, 運動方程式は式(7), (8)の形で表される。式(7)の拘束条件がこのときホロノミックになるか非ホロノミックになるか, さらに非線形モデルが可制御になるかどうかは興味ある問題である。

中村, 岩本^{22),23)}は姿勢制御装置を持つ人工衛星に, 全関節を自由関節としたリンク系を搭載した浮遊多体リンク系の制御を研究している¹⁰⁾。この場合, α に対応した一般化力は姿勢制御装置から供給される。運動量保存則はホロノミックなので $\mathbf{r}_0$ を α と関節角度の関数として表し, 従属変数として一般化座標から消去できる。よって, α を $\mathbf{x}_2$, 関節角度を $\mathbf{x}_1$ とすれば, やはり運動方程式は式(7), (8)で表される。

以下では, 自由関節の拘束条件がホロノミックになるための条件を紹介する。

4.2 自由関節拘束条件の可積分性

Oriolo と Nakamura^{24),25)}は自由関節を持つ平面マニピュレータのブレーキを使用しない制御について研究をしている。そこでは自由関節の拘束条件がホロノミックになる条件を与え, 条件を満たす特殊な構造, 質量分布の場合を除いて一般に自由関節拘束条件は非ホロノミックになることが指摘されている。

浮遊多体リンク系の自由関節も同様に扱えるが, ここでは表記を単純にするために自由関節を持つ地上マニピュレータを仮定する。 $\mathbf{x}_1 \in R^n$, $\mathbf{x}_2 \in R^n$ をそれぞれ自由関節, 駆動関節を表すものとする。また一般性を持たせるために平面構造を仮定しない。一般化座標 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T)^T$ とその速度の関数として Lagrangian L は次のようになる。

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - U(\mathbf{x}) \quad (26)$$

これに対して Euler-Lagrange 方程式は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_1} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_2} = \boldsymbol{\tau}_2^T \quad (28)$$

となる。 $\boldsymbol{\tau}_2 \in R^n$ は駆動関節のトルクである。式(27)が自由関節拘束条件である。式(27), (28)は一般に次のような形式になることが知られている。

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) = 0 \quad (29)$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{c}_2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_2 \quad (30)$$

ここで,

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathbf{A} \in R^{(m+n) \times (m+n)}$, $\mathbf{b} \in R^{m+n}$, $\mathbf{c} \in R^{m+n}$ はそれぞれよく知られた慣性行列, コリオリ・遠心トルク, 重力トルクを表す。

結果を2つの定理にまとめる。

[定理9: 第一積分の存在条件] 式(29)で表される自由関節拘束条件が第一積分を持つための必要十分条件は次の2つの条件を満足することである。

- (1) 重力トルク $\mathbf{c}_1$ が定数となること。
- (2) マニピュレータの慣性行列 $\mathbf{A}$ が自由関節の角度 $\mathbf{x}_1$ を陽に含まないこと。

条件が満たされるとき, 第一積分は次式で与えられる。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{k}_2 = 0 \quad (31)$$

ここで $\mathbf{k}_2$ は積分定数である。

定理9で重力トルクが零の場合には, (2)の条件は $\mathbf{x}_1$ が循環座標になることを意味する。

[定理10: 第二積分の存在条件] 式(29)で表される自由関節拘束条件が第二積分を持つための必要十分条件は次の2つの条件を満足することである。

- (1) 第一積分が存在すること。
- (2) $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)$ の零空間 $\Delta(\mathbf{x}_2)$ が involutive であること。

条件が満たされるとき, 第二積分は次式で与えられる。

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{c}_1}{2} t^2 + \mathbf{k}_2 t + \mathbf{k}_3 \quad (32)$$

ここで $\partial \mathbf{h}_1 / \partial \mathbf{x} = \mathbf{H}_1$ であり, $\mathbf{k}_3$ は積分定数である。

水平面内にある2関節ロボットについて, これらの定理から次のことが言える。第1関節が自由関節で第2関節が駆動関節の場合は, 定理9と定理10が共に満たされホロノミックになる。第2関節が自由関節で第1関節が駆動関節の場合には, 第2リンクの重心が第2関節の回転軸上にある場合のみホロノミックになる。

注10) 研究はまだ基礎的な段階であるが, このようなものが自由に制御できるならば大型の宇宙マニピュレータとして, 宇宙ステーションの建設などに利用できる。自由に形状が変えられなくとも, 例えば一直線に伸びた状態に安定化できるならば, コンパートメントをつなげて構成する可変構造の大型宇宙構造物などに使える。大型柔軟構造物の欠点である低剛性が原因となって生じる振動の問題を考えなくてよい点が特徴である。

り、ほかの場合は非ホロノミックである。

5. 第4回のまとめ

Under-Actuated Mechanisms の運動方程式から生まれる加速度拘束条件がメカニズムの力学的構造により第一積分, 第二積分を持つことがある。第二積分を持つ場合には拘束条件はホロノミックになる。運動量保存則は第一積分であるが, 第二積分をも持つ。角運動量保存則は第一積分であり, 一般には第二積分は持たない。また, 自由関節を持つマニピュレータの拘束条件が第一, 第二積分を持つ条件も紹介した。

最終回は, 動力学的な非ホロノミック拘束の下での運動制御について解説する予定である。

参考文献

- 1) J. Baillieul, "The Nonlinear Control Theory of Super-articulated Mechanisms," Proc. American Control Conference, pp. 2448-2451 (1990)
- 2) M. Marey, "Des Mouvements que Certains Animaux Exécutent pour Retomber sur leurs Pieds, lorsqu'ils Sont Précipités d'un lieu Élevé," C. r. Hebd. Seanc. Acad. Sci., Vol. 119, pp. 714-717 (1894)
- 3) T. R. Kane and M. P. Scher, "A Dynamical Explanation of the Falling Cat Phenomenon," International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, pp. 663-670 (1969)
- 4) C. Frohlich, "Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?," American Journal of Physics, Vol. 47, pp. 583-592 (1979)
- 5) T. R. Kane and M. P. Scher, "Human Self-rotation by Means of Limb Movements," Journal of Biomechanics, Vol. 3, pp. 39-49 (1970)
- 6) T. R. Kane et al., "Experimental Investigation of an Astronaut Maneuvering Scheme," Journal of Biomechanics, Vol. 5, pp. 313-320 (1972)
- 7) 河村他, "空中を落下するロボットの姿勢制御と軟着地(第1報, ねこひねりによる空中姿勢制御)", 日本機学会論文集(C編), Vol. 57-544, pp. 3895-3900 (1991)
- 8) 河村他, "空中を落下するロボットの姿勢制御と軟着地(第3報, ねこひねりによる落下実験)", 日本機学会論文集(C編), Vol. 58-552, pp. 2495-2500 (1992)
- 9) 山藤他, "猫ひねり動作の解明とロボットによる猫ひねりの実現", 日本ロボット学会誌, Vol. 10-5, pp. 648-655 (1992)
- 10) 中野, 土屋, "空中姿勢制御の研究", 日本ロボット学会誌, Vol. 11-1, pp. 91-99 (1993)
- 11) 高島, 遠藤, "器械体操における空中姿勢の制御および着地のシミュレーション", 日本ロボット学会第9回学術講演会予稿集, pp. 711-714, (1991)
- 12) V. V. Lapshin, "Motion Control of a Legged Machine in the Supportless Phase of Hopping", International Journal of Robotics Research, Vol. 10-4, pp. 327-337 (1991)
- 13) H. Goldstein, "Classical Mechanics," pp. 11-16 second edition, Addison-Wesley (1980)
- 14) Y. Nakamura and R. Mukherjee, Bi-directional Approach for Nonholonomic Path Planning of Space Robots, in Robotics Research: the Fifth International Symposium (August 1989, Tokyo) pp. 405-416, MIT press (1990)
- 15) Y. Nakamura and R. Mukherjee, "Nonholonomic Path Planning of Space Robots via bi-directional Approach," Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1764-1769 (1990)
- 16) Y. Nakamura and R. Mukherjee, "Nonholonomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach," IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol. 7-4, pp. 500-514 (1991)
- 17) 山田, "宇宙多体システムの定式化とその制御への応用", 博士学位論文, 東京大学 (1989)
- 18) R. Mukherjee and Y. Nakamura, "An Efficient Algorithm for the Inverse Dynamics Computation of Space Manipulators," Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 560-565 (1992)
- 19) R. Mukherjee and Y. Nakamura, "Formulation and Efficient Computation of Inverse Dynamics of Space Robots," IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol. 8-3, pp. 400-406 (1992)
- 20) 荒井, 館, "非駆動関節を有するマニピュレータの動力学的干渉による位置制御", 計測自動制御学会論文集, Vol. 25-9, pp. 1012-1017 (1989)
- 21) 荒井, 館, "非駆動関節を有するマニピュレータの経路追従制御", 計測自動制御学会論文集, Vol. 27-7, pp. 800-805 (1991)
- 22) 中村, 岩本, "自由関節で連結された宇宙構造物の形状制御", 第10回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp. 471-474 (1992)
- 23) Y. Nakamura and R. Iwamoto, "Stabilization of the Shape of Space Multibody Structure with Free Joints", Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 2095-2101 (1993)
- 24) G. Oriolo and Y. Nakamura, "Free-joint Manipulators: Motion Control under Second-order Nonholonomic Constraints," Proc. IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91, pp. 1248-1253 (1991)
- 25) G. Oriolo and Y. Nakamura, "Control of Mechanical Systems with Second-order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators," Proc. Conference on Decision and Control (1991)

中村仁彦

(Yoshihiko NAKAMURA)

1954年9月22日生。1977年京都大学工学部精密工学科卒業。82年同大学大学院博士課程単位取得退学。同年より87年まで同大学助手。87年より91年3月までカリフォルニア大学サンタバーバラ校助教, 準教授。同年4月より東京大学工学部機械情報工学科助教授。工学博士。
(日本ロボット学会正会員)