研究速報

連続状態フィードバックによる車輪型移動ロボットの位置制御

羅 正 華*

Position Control of Wheeled Mobile Robots
Using Continuous State Feedback

Zheng-Hua Luo*

Wheeled mobile robots are representative of nonholonomic systems. It is already known that there does not exist a continuous state feedback law to stabilize a nonholonomic system to a single equilibrium point. However, it may be possible to stabilize a nonholonomic system to a manifold, instead of a single equilibrium point, by using continuous state feedback. In this paper, we show that by suitably choosing a cartesian coordinate the position (corresponding to a manifold in the configuration space) of mobile robots can be controlled very easily.

Key Words: Mobile Robots, Nonholonomic Systems, Manifold, Position Control

1. は じ め に

車輪駆動型移動ロボットは非ホロノミックシステム(Non-holonomic System)の典型的な例である。一般的に、連続状態フィードバックによって非ホロノミックシステムをある平衡状態から別の孤立平衡点への安定化制御はできないことが知られている[1]。非ホロノミックシステムでは、少ない制御入力で多くの状態を制御しようとしているから問題が複雑になり、そのため連続な状態フィードバックが存在しないと理解してもよいであろう。しかし、現実の問題では、システムの全状態を制御しなくてもよい場合がある。例えば、単輪車の場合では、車輪の接地点の x, y 座標、車輪の回転角、車輪の方向角などが状態変数である。これらの状態のすべてを制御しなくても、 x, y 位置だけ、あるいは x, y 位置と車輪の方向角を制御すればよい場合が多い。自転車車輪の回転角、場合によっては車輪の方向角を制御しなくてよいのは日常生活において誰もが経験することであろう。車輪の回転角や方向角がどうなってもよいということは、数学的には、状態を孤立平衡点へ制御するのではなく多様体へ制御することになる。孤立平衡点へは連続な状態フィードバックで安定化できないが、多様体なら連続な状態フィードバックでも制御可能である。しかし、どういう多様体で、どういうシステムなら連続な状態フィードバックで制御できるかは明らかになっていない。わずか、Bloch らはある十分条件が満たされれば、連続な状態フィードバックが構成できることを示した[2]。また、Kapitanovsky らは与えられた多

様体へではなく、ある導かれた多様体への連続状態フィードバック則の一設計法を提案している[3]。しかし、例え単輪車のような簡単なモデルでも、文献[2]の十分条件も満たされないし、文献[3]の方法も適用できない。これについては後ほど詳しく述べる。

本文では、単輪車を例にとり、連続状態フィードバックによる多様体への制御問題を考え、単輪車の位置座標を適当に選べば、本来簡単に制御できない車体の位置決めも容易に行えることを示す。

2. 単輪車の運動モデルと従来の位置制御法

Fig. 1 に示すような xy 平面内で運動する単輪車を考える。車輪の姿勢と位置はそれぞれトルク τ_1 と τ_2 で制御できるものとする。車輪の回転半径を r とし、また、

x, y : 車輪の接地点の座標
 ϕ : 車体の姿勢角(方向角)

Fig. 1 Cartesian coordinates for a unicycle model

原稿受付 1994年2月16日

*長岡技術科学大学

*Nagaoka University of Technology

ϕ : 車輪の回転角

I_ϕ, I_ψ : 回転慣性

m : 車体の総質量

とする。単輪車の動的モデルは次のように与えられている [4].

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ I_\phi\ddot{\phi} = \tau_1 \\ I_\psi\ddot{\psi} = -\lambda_1 r \cos \phi - \lambda_2 r \sin \phi + \tau_2 \\ \dot{x} = r\dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{y} = r\dot{\psi} \sin \phi \end{cases} \quad (1)$$

λ_1, λ_2 は車輪と地面との摩擦力になっていることがわかる。これらを消去することによって、式(1)と等価な低次元化されたシステムが得られる。式(1)の最後の2式の両辺を時間微分し、最初の2式に代入すると、

$$\begin{cases} \lambda_1 = m\ddot{x} = -mr\dot{\psi} \sin \phi \dot{\phi} + mr\ddot{\psi} \cos \phi \\ \lambda_2 = m\ddot{y} = -mr\dot{\phi} \cos \phi \dot{\psi} + mr\ddot{\phi} \sin \phi \\ I_\phi\ddot{\phi} = \tau_1 \\ (I_\phi + mr^2)\ddot{\psi} = \tau_2 \\ \dot{x} = \dot{\phi} r \cos \phi \\ \dot{y} = \dot{\psi} r \sin \phi \end{cases} \quad (2)$$

式(2)を式(1)の等価方程式と呼び、摩擦力の効果として車輪の回転慣性が大きくなったことがわかる。式(2)に摩擦力 λ_1, λ_2 が含まれていないので、シミュレーションに用いやすい。

変数

$$q_1 = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

を新たに導入すると、式(2)の最後の2式は

$$\dot{q}_2 = J(q_1) \dot{q}_1, J = \begin{pmatrix} 0 & r \cos \phi \\ 0 & r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

と書き換えられる。いま、多様体を

$$M = \{(q, \dot{q}) | \dot{q} = 0, s(q_2) = 0\} \quad (4)$$

としよう。ここに関数 $s(q_2)$ は $s(q_2) = q_2 - q_{2d}$ で与えられ、 q_{2d} は目標位置で一定とする。制御の目的は状態を多様体 M に到達させることである。すなわち、車輪を静止させ、かつ車輪の接地点をある指定された位置に収束させ、車体の姿勢と車輪の回転角は任意でもよい。

s の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \dot{q}_1 \\ \ddot{s} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \ddot{q}_1 \end{aligned}$$

で与えられるから、 K_1 と K_2 を任意な対称正定行列とすると、

$$\ddot{s} + K_1 \dot{s} + K_2 s = 0 \quad (5)$$

が満たされるように制御トルクを決めておけば、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $s(q_2) \rightarrow 0$ となることがわかり、車体の位置制御が実現できる [2]。式(5)は、すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \Lambda^{-1} \tau + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \right) \dot{q}_1 \\ & + K_1 \frac{\partial s}{\partial q_2} J(q_1) \dot{q}_1 + K_2 s(q_2) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

である。ここに $\Lambda = \text{diag}(I_\phi, (I_\psi + mr^2))$, $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$ 。いまの場合、 $\partial s / \partial q_2 = I$ は単位行列、 $J(q_1)$ は不可逆であるので、式(6)から制御トルク τ が決まらない。したがって、文献[2]の方法で状態を多様体 M へ制御できない。

一方、式(3)のシステムに対して、文献[3]の方法では、制御則を

$$\dot{q}_1 = -J(q_1)^T s(q_2) \quad (7)$$

のように決める。このとき閉ループ系の方程式は

$$\dot{s}(q_2) = -J(q_1) J(q_1)^T s(q_2) \quad (8)$$

のようになる。

$$V(t) = \frac{1}{2} s(q_2)^T s(q_2)$$

とすると、

$$\dot{V}(t) = s(q_2)^T \dot{s}(q_2) = -s(q_2)^T J J^T s(q_2) = -\|J^T s(q_2)\|^2$$

となるので、 $\dot{V}(t) = 0$ とすると、 $J^T s(q_2) = 0$ 、すなわち $\cos \phi(x - x_d) + \sin \phi(y - y_d) = 0$ 。これより、文献[3]の方法は $x \rightarrow x_d, y \rightarrow y_d$ を保証することができない。

文献[5]では、Lyapunov の安定判別法を孤立平衡点の安定問題から多様体の安定問題へ拡張し、単輪車モデルに対して、姿勢角と回転角を制御し、車輪の位置を任意にするような連続フィードバック制御則を導いたが、実際の問題としては、位置制御が必要となる場合が多いから、実用性は乏しいであろう。この拡張 Lyapunov 法をいま考えている車体の位置制御に簡単に応用できないことがわかっていてる。

また、時変的な状態フィードバックを用いて非ホロノミックシステムの状態の一部分ではなく、全状態をある孤立平衡点へ制御する研究もある [6][7]。文献[6]では、非ホロノミックシステムの全状態を孤立平衡点を含む任意の近傍へ制御する連続状態フィードバック則を提案し、制御入力に高周波の正弦波関数を導入することによって安定化を図っている。Fig. 2 は式

(3)のシステムに $\dot{q}_1$ を入力関数 $\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ と考えて、

Fig. 2 Control results by using high frequency time varying state feedback (for the original model)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{\varepsilon} k_1 \phi(t) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ u_2 &= -2\sqrt{\varepsilon}(k_2 x(t) \cos \phi + k_3 y(t) \sin \phi) \\ &\quad + \sqrt{2}(k_2 x(t) \cos \phi - k_3 y(t) \sin \phi) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

としたときのシミュレーション結果である。ただし、 $k_1=k_2=k_3=5$, $\varepsilon=0.0005$ とした。 ε が小さければ小さいほど状態が原点の小さい近傍に収束するが、状態変数の過渡応答に高周波の振動が現れ、アクチュエータの性能限界などを考え合わせるとこの制御則は実現しにくいと考えられる。例え実現できにしようとしても、車体の経過した軌道があまりにも不自然で、無駄な動きが多いのも問題である。一方、文献[7]の制御則では、時変要素は高周波である必要はないが、収束するにはかなりの時間を要することは問題である。

以上のように、単輪車のような最も簡単なモデルに対してさえ、連続状態フィードバックで車輪の位置制御はそう簡単に行えない。そこで、次章では、車体の位置座標を適切に選べば位置制御が簡単に行えることを示す。

3. 単輪車の修正モデルと位置制御

単輪車の場合には、車体の位置を車輪と地面の接触点に代表させるのは普通である。しかし、この接触点での車体の前進速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ は姿勢角 ϕ の変化速度 $\dot{\phi}$ の影響を直接的に受けない。それが原因で制御が難しくなっていると考えられる。そこで、車体の位置を接地点に代表させるのではなく、接地点から距離 l だけ離れた車体に固定された点（例えば自転車の前輪の泥よけ上の点）に代表させる。Fig. 1 においてそのような点を座標 (x_0, y_0) で示している。実際の問題においては位置座標を車体のどの点をとっても差し支えない場合が多いと考えられる。そうすると、

$$\begin{aligned} x_0 &= x + l \cos \phi \\ y_0 &= y + l \sin \phi \end{aligned} \quad (10)$$

となるので、上式の両辺を時間微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x} - l \sin \phi \dot{\phi} = r \dot{\phi} \cos \phi - l \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y}_0 &= \dot{y} + l \cos \phi \dot{\phi} = r \dot{\phi} \sin \phi + l \dot{\phi} \cos \phi \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。運動学的制御を考えると、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} l \dot{\phi} \\ r \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

を制御入力とおけば、車体の位置に関する運動学方程式は

$$\dot{q}_2(t) = A(q_1)u(t) \quad (13)$$

となる。ここに、

$$A(q_1) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

とおく。したがって、 K を対称正定行列とすると、制御入力を

$$\begin{aligned} u &= -KA(q_1)^T(q_2 - q_{2d}) \\ &= -KA(q_1)^T s(q_2) \end{aligned} \quad (15)$$

とすれば、閉ループ系の方程式は

$$\dot{s}(q_2) = -A(q_1)KA(q_1)^T s(q_2) \quad (16)$$

となり、安定になりうる。 $A(q_1)A(q_1)^T = I$ が恒等的に成り立つから、例えば $K=I$ とおけば、式(16)は

$$\dot{s}(q_2) = -s(q_2)$$

となり、したがって、 $q_2(t) \rightarrow q_{2d}$ で位置制御が実現される。

このように制御が簡単にできた背景を理解するために、修正前の運動学モデルを

$$\ddot{w}(t) = g_1 \ddot{u}_1 + g_2 \ddot{u}_2$$

とおく。ここに、 $\ddot{w}(t) = (\phi, x, y)^T$, $g_1 = (1, 0, 0)^T$, $g_2 = (0, r \cos \phi, r \sin \phi)^T$, $\ddot{u}_1 = \ddot{\phi}$, $\ddot{u}_2 = \ddot{\phi}$ である。すると、修正後の運動学モデルは

$$\dot{w}(t) = g_1 \ddot{u}_1 + g_2 \ddot{u}_2 + \frac{1}{r} [g_1, g_2] \ddot{u}_1$$

で表せる。ただし、 $w(t) = (\phi, x_0, y_0)^T$ で、 $[g_1, g_2]$ はベクトル場 g_1 と g_2 の Lie 括弧積を表す。修正後のモデルに入力ベクトル場の Lie 括弧ベクトル場が陽に入っているから制御がしやすくなったのである。非ホロノミックシステムでは、少ない制御入力で多くの状態変数を制御可能とする理由は、Lie 括弧ベクトル場方向にも制御が行き届くからである。モデルに入力ベクトル場の Lie 括弧を陽に含ませることで、入力の影響を一層強化したと理解できる。この考察は、位置座標の選び方を示唆している。

動力学的レベルの制御を考えよう。車体の位置座標を (x, y) から (x_0, y_0) へ変更したことで、動的方程式(1)、あるいはその等価方程式(2)が変わったわけではない。これは直感的にも、また数式的に計算しても簡単にわかる。したがって、つぎの方程式

$$\begin{cases} I_\phi \ddot{\phi}(t) = \tau_1(t) \\ (I_\phi + mr^2) \ddot{\phi}(t) = \tau_2(t) \\ \dot{x}_0(t) = r \dot{\phi}(t) \cos \phi(t) - l \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \\ \dot{y}_0(t) = r \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) + l \dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \end{cases} \quad (17)$$

がシステムの方程式になる。 q_1 , q_2 , $A(q_1)$, Λ などの記号は式(12)(13)で定義したのと同じものを使い、そして制御入力トルクを

$$\begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} = -\Lambda \begin{bmatrix} 1/l & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} A(q_1)^{-1} [\dot{A}(q_1) \dot{q}_1(t) + K_1 A(q_1) \dot{q}_1 + K_2 s(q_2)] \quad (18)$$

のように与えると、

$$\dot{s} + K_1 s + K_2 s = 0$$

が得られ、定数行列 K_1 , K_2 を対称正定と選べば、 $s(q_2)$ は零に収束する。すなわち、式(18)の制御トルクでシステム(17)の状態を多様体

$$M = \{(q_1, \dot{q}_1, q_2) | \dot{q}_1 = 0, s(q_2) = 0\}$$

へ制御することができる。

Fig. 3 に数値シミュレーション結果を示す。 $I_\phi=6$, $I_\phi=15$, $m=10$ とし、フィードバックゲイン $K_1=\text{diag}(2, 2)$, $K_2=\text{diag}(1, 1)$ とした。初期状態を $(\phi(0), \dot{\phi}(0), x_0(0), y_0(0)) = (-1, 2, 3, 4)$ と適当に決めた。車体の目標位置は $q_{2d} = (0, 0)$ とした。Fig. 3(a) は車体の位置 (x_0, y_0) の応答である。いずれも原点に収束することがわかる。Fig. 3(b) は車体の姿勢角 ϕ と車輪の回転角 ψ の応答を表す。これらは制御していないので、どこか適当な状態に収束していく。Fig. 3(c) はそのときの入力トルク τ_1 , τ_2 である。なお、ここでは $l=r=1$ とした。式(18)から、距離 l が小さければ小さいほど、 τ_1 が大きくなり、

Fig. 3 Position control results by using dynamic feedback (for the modified model)

制御しにくくなることがわかる。極端に $l=0$ となると、無限大の入力が必要になる。これは前章で観測した結果と一致する。Fig. 3(d)は xy 平面で見た車体の位置の軌跡であり、ごく自然な動きを示している。

4. おわりに

本文では、単輪車モデルを例にとり、非ホロノミックシステムの連続状態フィードバックによる孤立平衡点、あるいは多様体への安定化制御の難しさとそれに関連したこれまでの研究結果を述べたとともに、車体の位置を車輪の接地点にとるのではなく、少しずらした所にとれば、車体の位置に関する運動学的あるいは動力学的レベルの制御が簡単に行えることを示した。この考えに沿って積極的に修正モデルをもつような移動ロボットを新しく設計し制御する問題について現在研究中である。本稿の掲載が決定され、印刷中のときに、文献[8]が著者の手に入り、それを通じて修正モデルを導入するのと類似の発想がすでにあったことを知った。

参考文献

[1] R. W. Brockett: "Asymptotic stability and feedback stabiliza-

- tion," in Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Basel-Boston, pp. 181-191, 1983.
- [2] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu and N. H. McClamroch: "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 37, no. 11, 1992.
- [3] A. Kapitanovsky, A. A. Goldenberg and J. K. Mills: "Dynamic control and motion planning technique for a class of nonlinear systems with drift," Systems and Control Letters, vol. 21, pp. 363-369, 1993.
- [4] J. I. Neimark and N. A. Fufaev: "Dynamics of Nonholonomic Systems," Transactions of Mathematical Monographs, vol. 33, Providence, 1972.
- [5] R. Hui and A. A. Goldenberg: "Stability of non-holonomic systems," Proc. IEEE/RSJ Int. Workshops IROS '91, pp. 1260-1265, 1991.
- [6] L. Gurvits and Z. X. Li: "Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning," in Z. X. Li and J. Canny Eds., Progress in Nonholonomic Motion Planning, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [7] J.-B. Pomet: "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift," Systems and Control Letters, vol. 18, pp. 147-158, 1992.
- [8] Y. Yamamoto and X. Yun: "Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 39, no. 6, pp. 1326-1332, 1994.