学術論文

ホルツァ法に基づくフレキシブルマニピュレータの 動力学モデリング

近 野 敦* 内 山 勝*

Modeling of a Flexible Manipulator Dynamics Based on the Holzer's Method

Atsushi Konno* and Masaru Uchiyama*

In this paper, we discuss the modeling of flexible manipulators. In the modeling of flexible manipulators, there are two approaches: one is based on the distributed-parameter modeling and the other on the lumped-parameter modeling. The distributed-parameter model is effective for simple flexible manipulators such as a one-link planar manipulator. For flexible manipulators with multi-link and multi-DOF (degree-of-freedom), however, the distributed-parameter model will be too complicated to use in control. In this paper, we propose a new model for the flexible manipulators based on the lumped-parameter model. Our model is simple enough to construct and implement in control schemes. This model can also be easily applied to manipulators which have flexibility at their joints. Based on our model, dynamic equations of motion are derived by the Lagrange's method. The effectiveness of our model is shown by comparing simulation results with the experimental results.

Key Words: Flexible Manipulator, Kinematics, Dynamics, Modeling, Lumped-Parameter Model

1. は じ め に

宇宙で用いられるロボットマニピュレータは、それ自身の質量に対して可搬質量が非常に大きい、アクチュエータ以外の部分は非常に軽量化されているなどの特徴をもつ。このようなマニピュレータでは、アーム部またはジョイント部の柔軟性を考慮する必要がある。このような柔軟で、軽量のフレキシブルマニピュレータの研究は1970年代頃より盛んに行われるようになった[1]。産業用マニピュレータにおいても、高速動作に伴うアームの振動が問題となっており、フレキシブルマニピュレータの研究の必要性はますます高まっている。

フレキシブルマニピュレータの動力学解析、制御則の構築にはどのようなモデルを作成するかが重要なポイントとなる。初期の研究は、振動学における弾性体の振動解析法をそのままフレキシブルマニピュレータに適用したものが多く、仮定モード法で近似する方法[2]や有限要素法によるもの[3][4]が主流であった。現在でも多くの研究者がこの立場からモデリングを行っている[5]~[7]。

しかし、このようなモデリングは、主として1リンク、または2リンクの平面フレキシブルマニピュレータに応用されたが、多リンク多自由度をもつ空間フレキシブルマニピュレータ

ではモデルの作成が困難であるばかりではなく、得られたモデルに基づく制御則の構築も現実的ではない。このような反省から近年は、より簡便で現実的なモデリング手法が提案されている[8]~[13]。

本論文ではこの路線上で、フレキシブルマニピュレータの新しいモデルを提案する。従来のモデルは、リンクのたわみ曲線をいかに近似するかということに力点がおかれ[9][10][12]、剛体マニピュレータとの関連が必ずしも明確ではなかった。提案するモデルは、剛体マニピュレータとの関連が明確で、剛体マニピュレータのモデルをも包含する。本モデルではすべてのマニピュレータはフレキシブルマニピュレータとして取り扱われ、剛体マニピュレータは剛性の大きいリンクを有するマニピュレータとして表現される。これに基づき、従来の剛体マニピュレータの動力学と本モデルを用いたフレキシブルマニピュレータの動力学との関連について考察する。最後に、シミュレーションと実験により、本モデルの有効性を検証する。

2. 集中ばね質量モデル

弾性体の固有振動数を求める近似解法として、分布定数系(連続系)として取り扱う Rayleigh 法, Ritz の方法, Galerkin 法, 仮定モード法, また集中定数系(離散系)として取り扱う Holzer 法, Myklestad 法, 有限要素法などが知られている[14]。集中定数系の各手法は、弾性体を幾つかの要素に分割し、それぞれの要素の振動数方程式を求め、それらをマトリク

原稿受付 1993年8月23日

*東北大学工学部

*Faculty of Engineering, Tohoku University

スを用いて足し合わせ、全体の振動数方程式を構築する。ロータのねじり振動の解析法である Holzer 法と、それを梁の曲げに拡張した Myklestad 法はその要素の分割法に特徴をもつ。分布定数系の各手法が、比較的密度や重量が均一な系を対象としたのに対し、Holzer 法は細長い軸で連結されたロータのねじり振動系を対象としており[14][15]。このような密度あるいは重量が不均一である系に対して、非常に有効である。フレキシブルマニピュレータは、重量を削ることが難しいアクチュエータを、軽量化したアームで連結する構造になっており、Holzer 法や Myklestad 法が対象とした構造によく合致している。本論文では、Holzer 法、Myklestad 法で用いられた集中ばね質量モデルをフレキシブルマニピュレータのモデリングに応用する。

フレキシブルマニピュレータは、アクチュエータにより駆動されるジョイント(joint)と、それにより結合されたリンク(link)により構成される。ここでは、各ジョイントは回転ジョイントとし、各リンクの長さは不変とする。まず、問題となるアームを適当な区間に分割する。ひとつのリンクを複数の区間に分割してもよいし、複数のリンクをひとつの区間と考えてもよい。分割した各区間の質量を二分し、それを各区間の両端に集中質量としてつける。つまり、アームの切断点に集中質量が存在し、各集中質量間は無質量のばねであると考え、Holzer 法ではこの集中質量部をステーション(station)、無質量のばね部をフィールド(field)と呼ぶ[14]。ここで提案するモデルにおいても、Holzer法にならい、集中質量部をステーション、無質量のばね部をフィールドと呼ぶことにする。このようにして作成されたモデルを Fig. 1 に示す。フレキシブルマニピュレータは点状する複数のジョイントと集中質量が無質量のばねによって結合された構造物としてモデル化される。

リンクの分割数を幾つにすればよいかという問題は、適用しようとするマニピュレータの特性や制御法、あるいはどこまで精密なモデルが必要かといったことに照らし合わせて決定する。例えば、非常に柔軟性の大きいリンクを有するフレキシブルマニピュレータの場合は、精度の高い近似モデルを得るためには十分な分割数をとる必要があり、逆に、関節部や先端に大きな質量が分布し、リンクの質量が非常に小さいマニピュレータの場合は、ひとつのリンクにひとつのフィールドを対応させても、十分な近似モデルが得られると考えられる。

フィールドは、ばね定数をもち、両端のステーションまたはジョイントの間の相対位置関係を与える無質量の弾性梁である。Fig. 2 にフィールド k に加わる力とモーメント、及びそれにより発生する弾性変形を示す。フィールド k ($k=1, 2, \dots, q$) の変形は、一端の他端に対する相対変位の変化分、ベクトル $\mathbf{s}_k$ によって表される。一般に、 $\mathbf{s}_k$ は位置、姿勢の変化を表す 6 次元ベクトルである。また、全フィールドの弾性変形を表すつぎのベクトル $\mathbf{e}$ を定義する。ベクトル $\mathbf{s}_k$ を 6 次元とした場合は $m=6q$ となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= [\mathbf{s}_1^T \ \mathbf{s}_2^T \ \cdots \ \mathbf{s}_q^T]^T \\ &= [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m]^T \end{aligned} \quad (1)$$

フィールド k の一端にかかる力とモーメントを $\mathbf{f}_k, \mathbf{n}_k$ とし、他端の力とモーメントを便宜上 $\mathbf{f}'_k, \mathbf{n}'_k$ とする。フィール

Fig. 1 Lumped-mass and spring model

Fig. 2 Forces, moments and deflections at the k th field

ドは無質量であるからフィールドの途中で力とモーメントの入出力がなければ $\mathbf{f}_k, \mathbf{n}_k$ はそのまま他端へと伝達される。力とモーメントの釣り合いから $\mathbf{f}'_k, \mathbf{n}'_k$ は容易に求めることができる。

$\mathbf{f}_k, \mathbf{n}_k$ と $\mathbf{s}_k$ の関係は次式により与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix} = \mathbf{K}_k \mathbf{s}_k \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{K}_k$ は、フィールド k の剛性を表す行列である。

ステーションは、質量と慣性テンソルをもち、フィールドの端に位置する質点である。ステーション j ($j=1, 2, \dots, p$) の質量と慣性テンソルを m_j, I_j とする。 m_j, I_j を用いて行列 $\mathbf{R}_j$ をつぎのように定義する。

$$\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_j \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{E}_3$ は 3×3 の単位行列である。

ジョイントは、軸回りの 1 自由度の回転の自由度を有し、二つの隣接するフィールドを接続するものとする。ジョイント i ($i=1, 2, \dots, n$) の回転角を θ_i とし、 θ_i よりなる回転角度ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を次式により定義する。

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T \quad (4)$$

ジョイント、ステーション、フィールドは同一箇所が存在してもかまわない。例えば、ジョイント部のみに柔軟性をもつマニピュレータは、フィールドとジョイントが同一箇所が存在するとみなすことができる。

3. フレキシブルマニピュレータの運動学

3.1 座標変換行列

フィールド k のベース寄りの一端を原点として座標系 Σ_k をとり、他端を原点として座標系 Σ_k'' をとる。フィールド k に弾性変形がない場合の、 Σ_k'' が存在するべき位置に Σ_k' をとる (Fig. 3)。 Σ_k 及び Σ_k'' は、それぞれの原点位置に存在するステーションまたはジョイントの特性を表現しやすいうように設定する。例えば、 Σ_k の原点位置に回転ジョイントが存在する場合、回転ジョイントの回転軸方向に z_k 軸を、リンクの軸方向に x_k 軸を設定するのはひとつの方法である。

Σ_k から Σ_k' への変換行列を F_k' 、 Σ_k' から Σ_k'' への変換行列を F_k'' とする。 F_k' は定数行列、 F_k'' は s_k の関数である。フィールドの両端の座標変換行列、つまり Σ_k から Σ_k'' への座標変換行列 F_k は

$$F_k = F_k' F_k'' \quad (5)$$

となる。 F_k をフィールド座標変換行列と呼ぶことにする。

座標変換行列 A_i は、ジョイント i に隣接する二つのフィールド端の座標系間の座標変換行列で、ジョイント回転角 θ_i に依存しない座標変換行列 A_i' と依存する座標変換行列 A_i'' の積からなる。すなわち

$$A_i = A_i' A_i'' \quad (6)$$

である。

また、ステーション j の座標変換行列を S_j とする。 S_j はステーションに隣接する二つのフィールド端の座標系間の座標変換行列で、定数行列である。 S_j をステーション座標変換行列と呼ぶことにする。

ジョイント i とジョイント $i+1$ 間のリンク i に属するフィールド及びステーションの座標変換行列をそれぞれ F_{i1} , F_{i2} , $\dots$, F_{if} ; S_{i1} , S_{i2} , $\dots$, $S_{i,f-1}$ とすると、リンク i の座標変換行列 L_i は

$$L_i = F_{i1} S_{i1} F_{i2} S_{i2} \dots S_{i,f-1} F_{if} \quad (7)$$

となる。

ステーション j のベース側であって、ステーション j に最も近いジョイントとフィールドの番号をそれぞれ、 N_j , Q_j とすると、ベースからステーション j への座標変換行列 0T_j は

$${}^0T_j = L_0 A_1 L_1 \dots A_{N_j} F_{N_j} S_{N_j} \dots F_{Q_j} \quad (8)$$

Fig. 3 Coordinate systems at the k th field

となる。ただし、 N_j , N_j' は、それぞれ、ジョイント N_j のステーション j 寄りの隣にあるフィールドとステーションの番号である。式(8)より、ステーション j の位置、姿勢が θ , e の関数として求められる。

3.2 ステーションの速度、加速度

ステーション j の速度ベクトル v_j を

$$v_j = \begin{bmatrix} v_j \\ \omega_j \end{bmatrix} \quad (9)$$

により定義する。ただし、 v_j , ω_j はそれぞれステーション j の速度、角速度ベクトルである。 v_j はジョイントの回転速度 $\dot{\theta}$ とフィールドの弾性変形の速度 $\dot{e}$ を用いて

$$v_j = J_{\theta_j} \dot{\theta} + J_{e_j} \dot{e} \quad (10)$$

と表すことができる。ここで、 J_{θ_j} , J_{e_j} はそれぞれ、ステーション j の θ , e に関するヤコビ行列で

$$J_{\theta_j} = \begin{bmatrix} J_{\theta_j}^v \\ J_{\theta_j}^{\omega} \end{bmatrix} = [j_{\theta_j 1} \ j_{\theta_j 2} \dots j_{\theta_j N_j} \ 0 \dots 0] \quad (11)$$

$$J_{e_j} = \begin{bmatrix} J_{e_j}^v \\ J_{e_j}^{\omega} \end{bmatrix} = [j_{e_j 1} \ j_{e_j 2} \dots j_{e_j M_j} \ 0 \dots 0] \quad (12)$$

と表される。 N_j , M_j は、それぞれ、ステーション j のベース側であって、ステーション j に最も近いジョイントの番号、及びフィールドの弾性変形成分の番号である。 J_{θ_j} , J_{e_j} は、前節で求めた 0T_j より、容易に計算することができる。 v_j はまた、つぎのように表すこともできる。

$$v_j = J_j \dot{q} \quad (13)$$

$$J_j = [J_{\theta_j} \ J_{e_j}] \quad (14)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(10)の両辺を時間微分するとステーション j の加速度ベクトル $\dot{v}_j$ が

$$\dot{v}_j = J_{\theta_j} \ddot{\theta} + \dot{J}_{\theta_j} \dot{\theta} + J_{e_j} \ddot{e} + \dot{J}_{e_j} \dot{e} \quad (16)$$

と求められる。

4. ラグランジュの運動方程式

この章ではラグランジュの方法を用いて運動方程式を導出する。いま、ステーション j の位置を表すベクトルを $r_j \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ とする。アームの運動に伴うモータの回転部の運動の影響を無視すると、アーム全体の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は、それぞれ、次式により与えられる。

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_{ai} \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} v_j^T R_j v_j \quad (17)$$

$$U = \sum_{k=1}^q \frac{1}{2} s_k^T K_k s_k - \sum_{j=1}^p r_j^T m_j g = \frac{1}{2} e^T K e - \sum_{j=1}^p r_j^T m_j g \quad (18)$$

ただし

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_q \end{bmatrix} \quad (19)$$

とする。 $g \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ は重力加速度ベクトル、 I_{ai} ($i=1, 2, \dots, n$) は

モータの回転部の慣性モーメントである。ラグランジアン L は

$$L = T - U \\ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_{ai} \dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{v}_j + \mathbf{r}_j^T \mathbf{m}_j \mathbf{g} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (20)$$

となる。ラグランジュの運動方程式は次式により与えられる。

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_l} \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

本論文では、式(21)をリンク運動方程式、式(22)をフィールド運動方程式と呼ぶことにする。リンク運動方程式はリンクの剛体運動を、また、フィールド運動方程式はフィールドの弾性運動を表す。

4.1 リンク運動方程式

式(21)に式(20)の L を代入し、式(13)を考慮し整理すると、各項は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = I_{ai} \ddot{\theta}_i + \sum_{j=P_i^e} (j_{\theta ji}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \\ + \sum_{j=P_i^e} \frac{d}{dt} (j_{\theta ji}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \sum_{j=P_i^e} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{j=P_i^e} \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \theta_i} \mathbf{m}_j \mathbf{g} \quad (24)$$

となる。ここで、 P_i^e は θ_i を含む $\mathbf{v}_j$ の中で最小の j である。すなわち、ジョイント i のエンドエフェクタ側のステーションで、ジョイント i に最も近いステーションの番号である。ここで

$$\mathbf{j}_{\theta ji} = \begin{bmatrix} j_{\theta ji}^v \\ j_{\theta ji}^w \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{g}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

とすると、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \theta_i} = \mathbf{j}_{\theta ji}^T \quad (27)$$

であるから、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial \theta_i} \mathbf{m}_j \mathbf{g} = \mathbf{j}_{\theta ji}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6 \quad (28)$$

となる。式(23)、(24)、(28)から式(21)は

$$\tau_i = I_{ai} \ddot{\theta}_i + \sum_{j=P_i^e} (j_{\theta ji}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{j=P_i^e} \frac{d}{dt} (j_{\theta ji}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \sum_{j=P_i^e} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) - \sum_{j=P_i^e} (j_{\theta ji}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6) \quad (29)$$

となる。 $i=1, 2, \dots, n$ について上式をまとめると

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_a \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{\theta j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{\theta j} \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{\theta j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{\theta j} \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{\theta j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{\theta j} \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \sum_{j=1}^p (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) \\ - \sum_{j=1}^p (\mathbf{J}_{\theta j}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6) \quad (30)$$

となる。ただし

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} I_{a1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I_{an} \end{bmatrix} \quad (31)$$

とする。

式(30)の第1～3項は一般化座標の加速度によって発生する

慣性力の項、第4,5項は遠心力、コリオリ力など非線形の変位依存力の項、第6項は重力項である。これを考慮し、式(30)をまとめると次式を得る。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) + \mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \quad (32)$$

4.2 フィールド運動方程式

フィールド運動方程式(22)も同様に展開できる。式(22)に式(20)の L を代入し、式(13)を考慮し整理すると、各項は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_l} \right) = \sum_{j=P_l^e} (j_{e li}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \\ + \sum_{j=P_l^e} \frac{d}{dt} (j_{e li}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e_l} \sum_{j=P_l^e} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{j=P_l^e} \frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial e_l} \mathbf{m}_j \mathbf{g} \\ - \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial e_l} \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (34)$$

となる。ここで、 P_l^e は e_l を含む $\mathbf{v}_j$ の中で最小の j である。すなわち、 e_l を含むフィールドのエンドエフェクタ側にあって、そのフィールドに最も近いステーションの番号である。ここで

$$\mathbf{j}_{e li} = \begin{bmatrix} j_{e li}^v \\ j_{e li}^w \end{bmatrix} \quad (35)$$

とすると、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial e_l} = \mathbf{j}_{e li}^T \quad (36)$$

であるから、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j^T}{\partial e_l} \mathbf{m}_j \mathbf{g} = \mathbf{j}_{e li}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6 \quad (37)$$

となる。式(33)、(34)、(37)から式(22)は

$$0 = \sum_{j=P_l^e} (j_{e li}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{j=P_l^e} \frac{d}{dt} (j_{e li}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j) \dot{\mathbf{q}} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e_l} \sum_{j=P_l^e} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) - \sum_{j=P_l^e} (j_{e li}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6) \\ + \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial e_l} \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (38)$$

となる。 $l=1, 2, \dots, m$ について上式をまとめると

$$\mathbf{0} = \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{e j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{e j} \right) \ddot{\mathbf{e}} + \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{e j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{e j} \right) \ddot{\mathbf{e}} \\ + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p \mathbf{J}_{e j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_{e j} \right) \dot{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \sum_{j=1}^p (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{J}_j \dot{\mathbf{q}}) \\ - \sum_{j=1}^p (\mathbf{J}_{e j}^T \mathbf{m}_j \mathbf{g}_6) + \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (39)$$

となる。式(39)の第1,2項は一般化座標の加速度によって発生する慣性力の項、第3,4項は遠心力、コリオリ力など非線形の変位依存力の項、第5項は重力項、第6項はフィールドのばね力によって発生する復元力の項である。これを考慮し、式(39)をまとめると次式を得る。

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_{21}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{22}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{h}_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \\ + \mathbf{g}_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) + \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (40)$$

4.3 モータ運動方程式

ジョイント i のエンドエフェクタ側にあってジョイント i に隣接するフィールドをフィールド $i1$ とする。また、フィールド $i1$ の両端にかかる力とモーメントを **Fig. 4** のように定義する。 $\mathbf{f}_{i1}$ 、 $\mathbf{n}_{i1}$ とたわみ変位ベクトル $\mathbf{s}_{i1}$ の関係は式(41)のよう

Fig. 4 *i*th field and *i*th joint

に与えられ、次式ようになる。

$$\begin{bmatrix} f_{i1} \\ n_{i1} \end{bmatrix} = K_{i1} S_{i1} \quad (41)$$

ジョイント *i* にかかるモーメント n'_{i1} はモーメントのつりあいから次式のように求められる。

$$n'_{i1} = n_{i1} + l_{i1} \times f_{i1} \quad (42)$$

ここで、 l_{i1} は座標系 Σ_{i1} における Σ'_{i1} の原点の位置ベクトルである。問題を簡単にするため、ここではジョイント *i* の回転方向に z_{i1} 軸をとり、 l_{i1} 方向に x_{i1} 軸をとる。このように座標系を設定した場合、 l_{i1} は

$$l_{i1} = [l_{i1} \ 0 \ 0]^T \quad (43)$$

となる。

さて、式(41)、(42)、(43)から n'_{i1} をつぎのように表すことができる。

$$n'_{i1} = Z_{i1} K_{i1} s_{i1} \quad (44)$$

ただし、

$$Z_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_{i1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{i1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

とする。

ジョイント *i* が発生すべきトルク τ_i はアクチュエータのロータ部の慣性モーメント I_{ai} を考慮すると

$$\tau_i = I_{ai} \ddot{\theta}_i - [0 \ 0 \ 1] n'_{i1} \quad (46)$$

である。式(44)、(46)から、 τ_i はつぎのように表すことができる。

$$\tau_i = I_{ai} \ddot{\theta}_i - W_{i1} K_{i1} s_{i1} \quad (47)$$

s_{i1} を6次元のベクトルとしたとき、 W_{i1} は 1×6 の行列となる。式(47)から、 τ_i は弾性変位ベクトル s_{i1} とフィールドに固有のばね定数を表す行列 K_{i1} から算出できることがわかる。 $i = 1, 2, \dots, n$ について式(47)をまとめると

$$\tau = R_a \ddot{\theta} - W K e \quad (48)$$

を得る。ただし、 $W \in R^{n \times m}$ は

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & W_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & W_{21} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & W_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

で表される行列である。式(48)をモータ運動方程式と呼ぶことにする。

式(44)、(46)、(47)、(49)から一般には W は定数行列となる。しかし、実際にはフィールド *k* の弾性変位ベクトル s_k が

定義できない場合がある。例えば、ジョイント *i* とジョイント *i+1* が同一点に存在すると仮定し、ジョイント *i* とジョイント *i+1* を結合しているフィールド *i1* に対し、その長さ l_{i1} を0とし、そのばね定数を無限大と仮定した場合などがこれに相当する。このとき、式(44)が成り立たなくなる。このような場合、ジョイント *i+1* に隣接するエンドエフェクタ側のフィールド (*i+1*)1 の弾性変位ベクトル $s_{(i+1)1}$ より、

$$n'_{i1} = A_{i+1} n'_{(i+1)1} \quad (50)$$

なる関係を利用して、

$$n'_{i1} = A_{i+1} Z_{(i+1)1} K_{(i+1)1} s_{(i+1)1} \quad (51)$$

からモータ運動方程式を構築することができる。 $s_{(i+1)1}$ が定義できない場合には、同様に、式(50)を順次適用していく。このとき、 n'_{i1} が θ の関数となり、式(46)、(47)、(49)から、 W は姿勢に依存した行列となる。なお、本節で導いたモータ運動方程式は、式(32)、(40)において項の消去を行うことにより導くこともできる[13]。

5. 考 察

フレキシブルマニピュレータの運動方程式がリンク運動方程式とフィールド運動方程式で表されることを示した。また、この二つの運動方程式をまとめた形の運動方程式として、モータ運動方程式を導いた。以下、これらの運動方程式について考察する。

リンク運動方程式(30)で $\ddot{e} = \dot{e} = e = 0$ とおくと

$$\tau = R_a \ddot{\theta} + \left(\sum_{j=1}^p J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \right) \ddot{\theta} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^p (\dot{\theta}^T J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \dot{\theta}) - \sum_{j=1}^p (J_{\theta j}^T m_j g_0) \quad (52)$$

を得る。これは、剛体マニピュレータの運動方程式を表す。すなわち、リンク運動方程式が剛体マニピュレータの運動方程式の自然な拡張であることがわかる。

また、このとき、フィールド運動方程式(39)は式(2)を考慮に入れると、

$$0 = \left(\sum_{j=1}^p J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \right) \ddot{\theta} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e} \sum_{j=1}^p (\dot{\theta}^T J_{\theta j}^T R_j J_{\theta j} \dot{\theta}) - \sum_{j=1}^p (J_{\theta j}^T m_j g_0) + \begin{bmatrix} f_1 \\ n_1 \\ \vdots \\ f_q \\ n_q \end{bmatrix} \quad (53)$$

となる。式(53)を解くことにより、リンク各部に加わる力とモーメントを得る。式(53)はいままで剛体マニピュレータでは考慮されていない。剛体リンクの仮想的な弾性変位を考えることで各リンクの力とモーメントが計算できるということは非常に興味深い。

以上、本論文で導いたリンク運動方程式、フィールド運動方程式で剛体マニピュレータ及びフレキシブルマニピュレータの運動方程式を統一的に論じることが可能であることを示した。剛体マニピュレータはフレキシブルマニピュレータのある特殊な形態であると考えられる。

最後にモータ運動方程式について考察する。モータ運動方程式(48)はモータの回転部の慣性負荷を除けば、慣性力項、遠心力及びコリオリ力の項、重力項などのステーションの慣性によって発生する力の項が表面には現れない。これらの項はすべて、各ジョイントに直結するフィールドの復元力として表現される。運動方程式をこのような簡潔な形にまとめることができるのは、各ジョイントに直結するフィールドの弾性変形が、それらのジョイントにかかる力とモーメントに対応しているからである。多くのトルクセンサは、モータの出力軸に弾性部分を設け、その弾性歪みを測定することでトルクを検出しているが、これは言い換えれば、モータの出力軸にフィールドを取り付け、そのフィールドの弾性変位を測定していることにほかならない。

6. 適用例

以上の理論を実際の実験機に適用する。モデルを作成し、モデルに基づいたシミュレーション結果と実験機による実験結果を比較することでモデルの妥当性を検証する。簡便のため、ステーションの慣性モーメントはここでは考慮しない。ステーションの慣性モーメントを考慮しない簡略化された運動方程式は

$$\begin{aligned} \tau = & R_a \ddot{\theta} + \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{\theta j}^{vT} J_{\theta j}^v \right) \ddot{\theta} + \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{\theta j}^{vT} J_{e j}^v \right) \ddot{e} \\ & + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{\theta j}^{vT} J_j^v \right) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^p m_j (\dot{q}^T J_j^{vT} J_j^v \dot{q}) \\ & - \sum_{j=1}^p (J_{\theta j}^{vT} m_j g) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{e j}^{vT} J_{\theta j}^v \right) \ddot{\theta} + \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{e j}^{vT} J_{e j}^v \right) \ddot{e} \\ & + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^p m_j J_{e j}^{vT} J_j^v \right) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial e} \sum_{j=1}^p m_j (\dot{q}^T J_j^{vT} J_j^v \dot{q}) \\ & - \sum_{j=1}^p (J_{e j}^{vT} m_j g) + K e \end{aligned} \quad (55)$$

となる。以下、式(54)、(55)を用いて議論を進める。

6.1 2リンク7ジョイント型フレキシブルマニピュレータ

当研究室と(株)富士通研究所で共同開発した2リンク7ジョイント型フレキシブルマニピュレータ ADAM[16] のモデルを

Fig. 5 Model of the experimental robot ADAM

Fig. 5 のように作成する。Fig. 5 で点線で囲った部分は同一箇所が存在することを示す。実験機 ADAM は大きく分けて shoulder module, elbow module, wrist module の三つのモジュールとそれらをつなぐアームから構成されている。今回はそれぞれのアームをひとつのフィールドとし、各モジュールにひとつずつステーションが存在するようなモデルを作成した。

実験機 ADAM は7ジョイントを有しているが、エンドエフェクタの位置に直接関与するのはジョイント1~4なので、これらをジョイント角度ベクトルと考える。ジョイントトルクベクトル τ とジョイント角度ベクトル θ 、たわみ変位ベクトル e をそれぞれつぎのようにとる。

$$\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4]^T \quad (56)$$

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T \quad (57)$$

$$e = [\delta_{y3} \ \delta_{z3} \ \delta_{y5} \ \delta_{z5}]^T \quad (58)$$

ただし、 δ_{y3} , δ_{z3} , δ_{y5} , δ_{z5} はそれぞれフィールド3, 5の y , z 軸方向のたわみである。たわみ変位ベクトル e の要素として、各座標軸回りのたわみ角変位 ϕ_{x3} , ϕ_{y3} , ϕ_{z3} , ϕ_{x5} , ϕ_{y5} , ϕ_{z5} も考えられるが、本節のモデルではステーションの慣性モーメントを考慮していないため、 δ_{y2} , δ_{z2} , δ_{y3} , δ_{z3} に従属な変数となる [11]。また、フィールドの軸方向の変位 δ_{x2} , δ_{x3} は微小であるとし、 e には含めない。

作成したモデルに基づき、式(54)、(55)より運動方程式を計算する。計算に用いる各パラメータについては、実験機の実験値をそのまま用いることにする。このことにより、モデル化誤差が大きくなると考えられるが、モデル化誤差を小さくするためには、ステーションの数を増やし実験機により近いモデルを構築すればよい。運動方程式で用いた各パラメータを Table 1 に示す。Field 3, 5 に相当する実験機のリンクの質量はそれぞれ、0.7[kg], 0.5[kg]であるが、この質量を2分し、両端の関節部の質量にそれぞれ付加し、ステーションの質量とした。

6.2 シミュレーション及び実験

実験機 ADAM は速度指令型のマニピュレータであるため、これに合わせて、シミュレーションも速度指令型とした。このシミュレータではつぎのような近似式を用いて、速度指令から入力トルクを作成する。

$$\tau = G_r K_{sp} (V_{ref} - K_{sv} \dot{\theta}_m) \quad (59)$$

ここで、 τ はシミュレータへの入力トルクベクトル、 G_r はモ

Table 1 Parameters in the equations of motion

Parameter	Notation	Value
Length of fields	l_3 [m]	0.50
	l_5 [m]	0.50
Bending stiffness of fields	$E_3 I_3$ [Nm ²]	291.6
	$E_5 I_5$ [Nm ²]	102.1
Mass of stations	m_2 [kg]	6.6
	m_3 [kg]	3.0
Rotor's inertia	I_{m1} [Nms ²]	1.63×10^{-4}
	I_{m2} [Nms ²]	0.99×10^{-4}
	I_{m3} [Nms ²]	0.99×10^{-4}
	I_{m4} [Nms ²]	0.15×10^{-4}

(a) Joint responses

(b) Tip displacement in the y direction

(c) Tip displacement in the z direction

Fig. 6 Simulation results

(a) Joint responses

(b) Tip displacement in the y direction

(c) Tip displacement in the z direction

Fig. 7 Experimental results

ータの減速比行列, K_{sp} は速度フィードバックゲイン行列, V_{ref} はアンプに入力する速度指令入力ベクトル, $\dot{\theta}_m$ はモータの減速前の回転角速度ベクトルである。実際の実験機では V_{ref} は $-10 \sim 10$ [V] の電圧で表現され, モータが無負荷の状態で 9 [V] の入力に対し 3000 [rpm] の出力が得られるように K_{sv} が調整されている。シミュレーションでは $G_r = \text{diag}[100 \ 100 \ 100 \ 100]$ とし, K_{sp} はシミュレーション結果が実験結果に近いものになるように調整した。

シミュレータでは 4 次の Runge-Kutta-Gill 法による積分を用いた。積分のきざみ幅は 0.1 [ms] とした。また, 式 (59) で記述される速度フィードバックを 1 [ms] ごに行った。シミュレーションのサンプリング時間は実験機による実験と同じ 10 [ms] とした。

目標位置のステップ入力に対する応答実験をシミュレータ, 及び実験機を用いて行い, その応答を比較する。制御則は簡単な P 制御で, 位置制御ゲインはシミュレータ, 実験共に 4.0 [s^{-1}] を与えた。シミュレーション結果及び実験結果をそれぞれ Fig. 6, 7 に示す。

シミュレーション結果では実験結果に比べて, アームの振動の減衰が早くなっているが, これはシミュレータが実験機の速度指令型アンプの特性を完全にはシミュレートできていないためであると思われる。

本節で作成したモデルは, 簡便のため関節部の慣性モーメントを無視したこと, 実験機の関節部の質量に比べてリンクの質量が小さいことなどから, 吉川, 村上, 細田のモデル [11] と結果的に, ほぼ同一のモデルとなった (本論文ではリンクの質量

を考慮した点が異なる)。しかしながら、本論文のモデリング手法ではステーションの数を増やすことや、ステーションの慣性モーメントを考慮することで、より精度の高い近似モデルを作成することが可能である。関節部の質量に比べてリンクの質量が無視できないぐらい大きい場合やリンクの柔軟性が非常に大きく高次モードの考慮が必要な場合などに、本手法の優位性が示せるものと思われる。

7. お わ り に

機械振動学でよく知られた Holzer 法による柔軟構造物のモデル化手法をフレキシブルマニピュレータに適用し、運動学との関連が明確で、非常に見通しの良いモデルを導出した。このモデルに基づきリンク運動方程式、フィールド運動方程式、モータ運動方程式を導いた。そして、これらの運動方程式に考察を加え、フレキシブルマニピュレータと剛体マニピュレータの関連性について論じ、これらのマニピュレータを統一的に論じることの可能性を示唆した。なお、本論文で導いたリンク運動方程式、フィールド運動方程式、モータ運動方程式は本モデリング手法に固有のものではなく、どのようなモデリング手法を用いても導くことができる。

筆者らは、このモデルをフレキシブルアームの振動抑制制御法に適用し、その有効性を検証した[17]。またこのモデルを用いて、モード可到達性の概念を論じた[18]。しかし、筆者らは本モデルの適用範囲はこれだけに限定されず、逆運動学、逆動力学の解法[19]。アームの運動学[20]など、広範囲の応用が可能であると考えている。

参 考 文 献

- [1] “フレキシブルアーム特集”, 日本ロボット学会誌, vol. 6, no. 5, 1988.
- [2] R. H. Cannon Jr. and E. Schmitz: “Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot,” Int. J. of Robotics Research, vol. 3, no. 3, pp. 62-75, 1984.
- [3] W. H. Sunada and S. Dubowsky: “On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members,” Trans. of ASME, J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol. 105, pp. 42-51, 1983.
- [4] E. Bayo: “A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot,” J. of Robotic Systems, vol. 4, no. 1, pp. 63-75, 1987.

- [5] 内山勝: “ロボットのダイナミックス”, 機械の研究, vol. 36, no. 1, pp. 131-136, 1984.
- [6] 姜兆慧: “フレキシブルロボットアームの制御に関する研究”, PhD thesis, 東北大学, 1988.
- [7] 山田克彦: “宇宙多体システムの定式化とその制御への応用”, PhD thesis, 東京大学, 1989.
- [8] 坂和愛幸, 松野文俊, 大澤善樹, 清原誠, 阿部敏久: “3 自由度フレキシブル・マニピュレータのモデリングと加速度センサを用いた振動制御”, 日本ロボット学会誌, vol. 6, no. 1, pp. 42-51, 1988.
- [9] 下山勲, 三浦宏文: “静たわみ曲線を用いたフレキシブルアームの動力学モデル”, 日本ロボット学会誌, vol. 6, no. 5, pp. 436-442, 1988.
- [10] Y. Huang and C. S. G. Lee: “Generalization of newton-euler formulation of dynamic equations to nonrigid manipulators,” Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 110, pp. 308-315, 1988.
- [11] 吉川恒夫, 村上弘記, 細田耕: “2 本のフレキシブルリンクを有する 3 自由度マニピュレータのモデリングと制御”, 日本ロボット学会誌, vol. 9, no. 1, pp. 1-10, 1991.
- [12] 吉川恒夫, 細田耕: “仮想的な剛体リンクと受動関節を用いたフレキシブルアームのモデリング”, 計測自動制御学会論文集, vol. 27, no. 12, pp. 1389-1395, 1991.
- [13] 内山勝, 近野敦: “ホルツァ法に基づくフレキシブルアームの動力学モデリング”, 日本ロボット学会第 1 回ロボットシンポジウム予稿集, pp. 247-252, 1991.
- [14] L. Meirovitch: “Analytical Methods in Vibrations,” Macmillan Publishing Co., Inc., 1967.
- [15] デンハルトック, (谷口修, 藤井澄二共訳): “機械振動論(改訂版)”, コロナ社, 1960.
- [16] M. Uchiyama, A. Konno, T. Uchiyama, and S. Kanda: “Development of a flexible dual-arm manipulator testbed for space robotics,” In Proc. of IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems '90, pp. 375-381, Tsuchiura, Japan, 1990.
- [17] A. Konno and M. Uchiyama: “Configuration-dependent vibration control of multi-link spatial flexible manipulators,” In T. Takamori and K. Tsuchiya, editors, Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems, pp. 937-942: Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1993.
- [18] A. Konno, M. Uchiyama, Y. Kito, and M. Murakami: “Vibration controllability of flexible manipulators,” In Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 308-314, San Diego, USA, 1994.
- [19] E. Bayo, P. Papadopoulos, J. Stubbe, and M. A. Serna: “Inverse dynamics and kinematics of multi-link elastic robots: An interactive frequency domain approach,” Int. J. of Robotics Research, vol. 8, no. 6, pp. 49-62, 1989.
- [20] 姜兆慧, 内山勝: “フレキシブルロボットアームの可補償性”, 日本ロボット学会誌, vol. 6, no. 5, pp. 416-423, 1988.

近野 敦 (Atsushi Konno)

1966 年 1 月 4 日生。1988 年東北大学工学部精密工学科卒業。1993 年同大学大学院博士課程修了, 博士。同年東北大学工学部機械航空工学科助手。現在フレキシブルマニピュレータなどの研究に従事。(日本ロボット学会正会員)

内山 勝 (Masaru Uchiyama)

1949 年 9 月 16 日生。1972 年東京大学工学部産業機械工学科卒業, 1977 年同大学大学院博士課程修了, 工学博士。同年東北大学工学部精密工学科助手, 1980 年同助教授, 1992 年同学部機械航空工学科教授, 宇宙機械学講座を担当。宇宙ロボットの研究, 教育に従事。日本航空宇宙学会北部支部幹事。(日本ロボット学会正会員)