線形拘束条件下の物体の挙動の分類

小 方 博 之^{*1} 高 橋 友 一^{*2}

Classifying Feature of Object's Motion under Linear Constraints

Hiroyuki Ogata^{*1} and Tomoichi Takahashi^{*2}

Analysing character of object's motion under constraints is important to understand the mechanism of assembly tasks. Such analyses have been studied to solve the contact state transition problem. In those studies, the state of a manipulated object is often represented only by a combination of contacts between the manipulated object and objects in the environment. However, such a representation does not describe all the feature of motion in environments with concave or multiple objects. This paper points out some defects in traditional representation and suggest a solution addressing to the problem.

Key Words: Path Planning, Task Knowledge, Contact State Transition, Motion Understanding, Configuration Space

1. は じ め に

拘束条件下の物体の挙動を分析することは作業のメカニズムを解釈するのに重要である。拘束条件下の物体の振舞いの分析は、従来から接触状態遷移プランニングの問題を解くために様々な研究がなされてきた。定式化については、DonaldのEuler角を用いたもの[2]、Cannyの四元数によるもの[1]、Hirukawaのspin行列を用いたもの[3]などが知られている。そして、操作する物体の状態は、その操作物体と環境の物体との頂点、稜、面の接触のコンビネーションで表されるのが一般的である。

接触状態下での物体の挙動は、これらの接触状態表現から導かれる連立多項式方程式の解の形で表される。Cannyはroadmap法に適用するために、この連立多項式方程式が自明でない解を持つ条件を終結式で判別し、自明でない解を持つ場合に、近似解を求めるアルゴリズムを示した[1]。このアルゴリズムを用いれば、接触状態下での物体の具体的な挙動を求めることができる。

状態遷移グラフで接触状態の挙動を表す場合には、同一の状態であれば互いに遷移可能なことが前提となる。しかし、従来のように、接触のコンビネーションで表現する場合には、上述の前提を満たさない。その例をFig.1に示す。Fig.1において、(a)と(b)は同じ接触のコンビネーションで表される。すなわち、「辺 e_0 と点 p が接触し、点 p_0 と辺 e が接触する」状態である。

しかし、(a)と(b)の状態の間は、これらの接触を保ったまま互いに遷移することはできない。これでは、接触のコンビネーションによる状態表現を用いて接触状態遷移のプランニングができたとしても、実際にはそれを満足する経路が存在しない事態もあり得る。

これを解決するためには、接触のコンビネーションによる表現を、物体の挙動に応じてさらに細かく分類していく必要がある。本論文では、連立多項式方程式から求めた一般解を超二次曲面の性質で区分し、物体の挙動を分類する方法を示す。

本論文の手法には未だ以下のような限界が存在する。Fig.1のような例への対処は今後の課題である。

- 三次元で回転軸が時間的に変化する場合。
- 同時に生じる接触の種類が異なる場合。

2. 拘 束 の 記 述

2.1 接触の分類

二次元で物体の形状が多角形の環境では、物体同士の接触は頂点、辺の2要素の間で生じる。ここで生じる接触には次の2

Fig. 1 Two different states with same contacts

原稿受付 1994年12月21日

^{*1}日本電信電話株式会社

^{*2}中部大学

^{*1}Nippon Telegraph and Telephone Co.

^{*2}Chubu University

Fig. 2 Two types of two-dimensional contact

種類がある (Fig. 2).

- type A: (操作物体の) 辺-(環境物体の) 頂点
- type B: 頂点-辺

一方、三次元で物体の形状が多面体の環境では、物体同士の接触は頂点、稜、面の3要素の間で生じる。この場合の接触は次の3種類である [5] (Fig. 3).

- type A: 面-頂点
- type B: 頂点-面
- type C: 稜-稜

上述のタイプ以外の組み合わせで生じる接触はすべて上述の組み合わせで代用できる。例えば、二次元における辺-辺接触は「二つの type A 接触」、「二つの type B 接触」、または「一つの type A 接触と一つの type B 接触」のいずれかで表現できる。

2.2 回転の表現

回転の表現には、ここでは一般回転行列を用いる。一般回転行列による表現は、回転と並進運動を一度に表せる四元数や spin 行列ほどスマートではないが、直観になじむ長所を持つ。また、これは Euler 角も含んだ一般的な表現である。以下の議論は四元数や spin 行列でも成立する。

二次元の場合、回転行列は

$$R = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 \\ q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

で表される。ここで、 q_0 と q_1 は $q_0^2 + q_1^2 = 1$ なる関係を満たす。

三次元の場合には、 $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ なる p_0, p_1, p_2, p_3 を用いて

$$R = \begin{bmatrix} p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 2(p_1p_2 - p_0p_3) \\ 2(p_2p_1 + p_0p_3) & p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \\ 2(p_3p_1 - p_0p_2) & 2(p_3p_2 + p_0p_1) \\ & 2(p_1p_3 + p_0p_2) \\ & 2(p_2p_3 - p_0p_1) \\ & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

と書ける [4] が、回転軸を $\mathbf{l} = [l_x, l_y, l_z]$ ($\mathbf{l}$ は単位ベクトル) に固定した場合には

$$R = L^{-1} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L \quad (3)$$

と簡単化できる。ここで L は、

$$L = \begin{bmatrix} j_x & k_x & l_x \\ j_y & k_y & l_y \\ j_z & k_z & l_z \end{bmatrix}$$

で、 $\mathbf{j} = [j_x, j_y, j_z]$ と $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]$ は $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{l}$ なる単位ベクトルである ($\times$ は外積)。また、 $q_0^2 + q_1^2 = 1$ である。

2.3 拘束条件式

物体が回転行列 R と並進ベクトル T によって移動した場合、物体の各要素もその影響を受ける。ここではその定式化を行った上で type A, B, C の拘束条件式を導く。 T の成分は二次元、三次元でそれぞれ次で表す。

$$T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

まず、物体の各要素の表現であるが、頂点は

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

という座標で表す。また、二次元の辺や三次元の面は外側法線ベクトル $\mathbf{a}_0$ と定数 b_0 を用いて

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} + b_0 = 0$$

という関係式で記述する ($\cdot$ は内積)。三次元における稜は、その上の点 $\mathbf{p}_0$ と方向ベクトル $\mathbf{d}_0$ で

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}_0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

のようなパラメータ表現を用いる。

これらの表現を用いると、二次元の場合は、物体の頂点と辺の移動は

$$\text{vertex:} \quad \mathbf{p}_0 \rightarrow R\mathbf{p}_0 + T, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{edge:} \quad & \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} + b_0 = 0 \rightarrow \\ & R\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} + (b_0 - R\mathbf{a}_0 \cdot T) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。

また、三次元の場合は

$$\text{vertex:} \quad \mathbf{p}_0 \rightarrow R\mathbf{p}_0 + T, \quad (6)$$

$$\text{edge:} \quad \mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}_0 \rightarrow (R\mathbf{p}_0 + T) + tR\mathbf{d}_0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{face:} \quad & \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} + b_0 = 0 \rightarrow \\ & R\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} + (b_0 - R\mathbf{a}_0 \cdot T) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

のように記述できる。

これらの関係式から拘束条件式は以下のように導かれる。

二次元の場合

type A の拘束式

操作物体の辺 $\mathbf{a}_0 \mathbf{x} + b_0 = 0$ が環境物体の頂点 $\mathbf{p}$ から拘束を受ける場合は、 $\mathbf{p}$ を式 (5) に代入することで次の拘束式が得られる。

$$R\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{p} + (b_0 - R\mathbf{a}_0 \cdot T) = 0 \quad (9)$$

Fig. 3 Three types of three-dimensional contact

これは、次のように線形化できる。

$$\begin{bmatrix} -a_{0x}, a_{0y}, a_{0x}p_x + a_{0y}p_y, a_{0x}p_y - a_{0y}p_x \\ q_0t_x + q_1t_y \\ q_1t_x - q_0t_y \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = -b_0 \quad (10)$$

type B の拘束式

操作物体の頂点 $\mathbf{p}_0$ が環境物体の辺 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ から拘束を受ける場合は、式 (4) を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ に代入することで次の拘束式が得られる。

$$\mathbf{a} \cdot (R\mathbf{p}_0 + T) + b = 0 \quad (11)$$

これは、次のように線形化できる。

$$\begin{bmatrix} a_x, a_y, a_xp_{0x} + a_y p_{0y}, -(a_x p_{0y} - a_y p_{0x}) \\ t_x \\ t_y \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = -b \quad (12)$$

三次元の場合

type A の拘束式

操作物体の面 $\mathbf{a}_0\mathbf{x} + b_0 = 0$ が環境物体の頂点 $\mathbf{p}$ から拘束を受ける場合は、 $\mathbf{p}$ を式 (8) に代入することで次の拘束式が得られる。

$$R\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{p} + (b_0 - R\mathbf{a}_0 \cdot T) = 0 \quad (13)$$

式 (3) で $L = E$ の場合、これは次のように線形化できる。

$$\begin{bmatrix} -a_{0x}, a_{0y}, a_{0z}, a_{0x}p_x + a_{0y}p_y, a_{0x}p_y - a_{0y}p_x \\ q_0t_x + q_1t_y \\ q_1t_x - q_0t_y \\ t_z \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = -b_0 - a_{0z}p_z \quad (14)$$

$L \neq E$ の場合は、次の変形を施すと $L = E$ の場合と同様に扱える。まず式 (13) に式 (3) ($R = L^{-1}R'L$ と記述する) を代入すると以下ようになる。

$$(L^{-1}R'La_0) \cdot \mathbf{p} + (b_0 - (L^{-1}R'La_0) \cdot T) = 0$$

ここで、内積の $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y})$ なる性質から、上式は以下のように変形できる。

$$R'(La_0) \cdot ((L^{-1})^T \mathbf{p}) + (b_0 - R'(La_0) \cdot ((L^{-1})^T T)) = 0$$

これは式 (13) で $L = E$ の場合と同じ形式である。

type B の拘束式

操作物体の頂点 $\mathbf{p}_0$ が環境物体の面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ から拘束を受ける場合は、式 (6) を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ に代入することで次の拘束式が得られる。

$$\mathbf{a} \cdot (R\mathbf{p}_0 + T) + b = 0 \quad (15)$$

$L = E$ の場合、これは次のように線形化できる。

$$\begin{bmatrix} a_x, a_y, a_z, a_xp_{0x} + a_y p_{0y}, -(a_x p_{0y} - a_y p_{0x}) \\ t_x \\ t_y \\ t_z \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = -b - a_z p_{0z} \quad (16)$$

$L \neq E$ の場合も type A 同様に $L = E$ の場合と同じ形に変形できる。

type C の拘束式

拘束式は以下のよう求める。操作物体の稜を $\mathbf{p}_0 + t\mathbf{d}_0$ 、環境物体の稜を $\mathbf{p} + u\mathbf{d}$ とする。

まず、二つの稜が接触する条件は

$$(R\mathbf{p}_0 + T) + tR\mathbf{d}_0 = \mathbf{p} + u\mathbf{d}$$

なる t と u が存在することである。そこで、これを t と u に関する連立方程式とみなすと、拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} R\mathbf{d}_0 & -\mathbf{d} & R\mathbf{p}_0 + T - \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

となる。 t と u が解を持つには、この行列式の値が 0 になればよいので、 $|\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}| = |\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{u}| = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ より、次の関係式を得る。

$$-(R\mathbf{p}_0 + T - \mathbf{p}) \cdot (R\mathbf{d}_0) \times (-\mathbf{d}) = 0$$

この関係式は内積の線形性と、外積の性質によって、次のように簡単化される。

$$R(\mathbf{p}_0 \times \mathbf{d}_0) \cdot \mathbf{d} + (T - \mathbf{p}) \cdot (R\mathbf{d}_0) \times \mathbf{d} = 0$$

これは、一般的に式 (14) や式 (16) のように係数と変数を分離した 5 行の形には線形化できない。

3. 拘束条件下の物体の挙動解析

物体の挙動を解析するために次に述べる特異値分解と、超 2 次曲面の分類を用いる。

3.1 特異値分解

任意の $m \times n$ 行列 A は特異値分解によって次のように記述される。

$$A = QWV^T$$

$$W = \begin{bmatrix} W_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

ここで Q は $m \times n$ の直交行列, W_r は $r \times r$ ($r \leq n$) の対角行列 (対角成分は非ゼロ), V は $n \times n$ の直交行列である。また, r は行列 A の階数である。特異値分解は Householder 変換と QR 分解によって数値的に行える。

行列 A の一般化逆行列は

$$A^- = V \begin{bmatrix} W_r^{-1} & S_1 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} Q^T$$

によって与えられる。ここで S_1, S_2, S_3 は任意の行列である。これによって、連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の一般解はパラメータ s_i を用いて

$$\mathbf{x} = A^-\mathbf{b} + \sum_{i=1}^{n-r} s_i \mathbf{v}_i$$

と書ける。ここで, $\mathbf{v}_i$ は行列 W で対応する対角成分が 0 となるような V の縦ベクトルである。

3.2 超二次曲面の分類

二次形式を n 個の変数 x_i と係数 a_{ij} ($a_{ij} = a_{ji}$) によって

$$f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (17)$$

と記述すると、超二次曲面は $f = 0$, $x_n = 1$ となる図形で表される。二次曲線、二次曲面は $n = 3$, $n = 4$ となる超二次曲面である。

式 (17) を

$$f = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

($\mathbf{x} = [x_i], A = [a_{ij}]$) のように行列表現し、適当なアフィン変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を施すことで標準形

$$f = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

に変形できる。(Λ は $\Lambda = P^T A P$ で表される)

超二次曲面は、標準形の形によって分類できる。一般に、 $f = 0$ は次のいずれかの形をとる [6]。

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2y_{r+1} = 0$$

Table 1 Class of quadratic curves ($n = 3$)

CQHS, $r = 2$	
$\lambda'_1 y_1^2 + \lambda'_2 y_2^2 + 1 = 0$	imaginary ellipse
$\lambda'_1 y_1^2 + \lambda'_2 y_2^2 - 1 = 0$	ellipse
$\lambda'_1 y_1^2 - \lambda'_2 y_2^2 \pm 1 = 0$	hyperbola
CQHS, $r = 1$	
$\lambda'_1 y_1^2 + 1 = 0$	imaginary lines
$\lambda'_1 y_1^2 - 1 = 0$	two lines (parallel)
QHC, $r = 2$	
$\lambda'_1 y_1^2 + \lambda'_2 y_2^2 = 0$	point
$\lambda'_1 y_1^2 - \lambda'_2 y_2^2 = 0$	two lines (cross)
QHC, $r = 1$	
$\lambda'_1 y_1^2 = 0$	line
NQHS, $r = 1$	
$\lambda'_1 y_1^2 \pm 2\lambda'_2 y_2 = 0$	parabola

Table 2 Class of quadrics ($n = 4$)

CQHS	
$r = 3$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 1 = 0$
	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0$
	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 1 = 0$
	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 1 = 0$
$r \leq 2$	Same as quadratic curves
QHC	
$r = 3$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$
	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$
$r \leq 2$	Same as quadratic curves
NQHS	
$r = 2$	$y_1^2 + y_2^2 \pm y_3 = 0$
	$y_1^2 - y_2^2 \pm y_3 = 0$
$r = 1$	Same as quadratic curves

ここで r は A の階数である。これらはそれぞれ有心二次超曲面 (central quadric hypersurfaces: CQHS), 二次超錐面 (quadric hypercones: QHC), 無心二次超曲面 (noncentral quadric hypersurfaces: NQHS) と呼ぶ。

二次曲線はこれらの分類と, A の階数と, λ_i の符号の組み合わせから 9 種類の曲線に分類できる。その分類を Table 1 に掲げる。ただし, $\lambda'_i = |\lambda_i|$ とする。

同様に、二次曲面は 17 種類に, $n = 5$ の二次超曲面は 28 種類に分類できる。これらの分類を Table 2 と Table 3 に掲げる。(係数 λ'_i は省略)

3.3 解析例

Type A, Type B の拘束下の物体の挙動は式 (10) (12) (14) (16) および回転行列の条件式 $q_0^2 + q_1^2 = 1$ によって記述される。

例えば、二次元で二つの type B 拘束下にある物体の挙動は以下の連立方程式で表される。ただし、操作物体の頂点 $[p_{1x}, p_{1y}]$ と $[p_{2x}, p_{2y}]$ がそれぞれ環境物体の辺 $[a_{1x}, a_{1y}]^T \mathbf{x} + b_1 = 0$, $[a_{2x}, a_{2y}]^T \mathbf{x} + b_2 = 0$ から拘束を受けているものとする。

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1x}p_{1x} + a_{1y}p_{1y} & -(a_{1x}p_{1y} - a_{1y}p_{1x}) \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2x}p_{2x} + a_{2y}p_{2y} & -(a_{2x}p_{2y} - a_{2y}p_{2x}) \end{bmatrix}$$

Table 3 Class of hyperquadrics in 4 dimension ($n = 5$)

CQHS	
$r = 4$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 1 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + 1 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - 1 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 + 1 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - 1 = 0$
$r \leq 3$	Same as quadrics
QHC	
$r = 4$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$
$r \leq 3$	Same as quadrics
NQHS	
$r = 3$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \pm y_4 = 0$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \pm y_4 = 0$
$r \leq 2$	Same as quadrics

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix}, \quad q_0^2 + q_1^2 = 1$$

左式に特異値分解を適用すると次の形で解が得られる。

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n-r} s_i \mathbf{v}_i. \quad (18)$$

物体の操作物体の自由度はパラメータ s_i の数 $n - r$ から 1 を引いたものになる。残りの一つは $q_0^2 + q_1^2 = 1$ に対するものである。

ところで、解 (18) において、 q_0 と q_1 は s_i の 1 次式である。そこで、これらを条件式 $q_0^2 + q_1^2 = 1$ に代入すると、 s_i に関する二次形式が得られる。これを標準形に変換し、超二次曲面の分類に当てはめることによって、物体の挙動の性質を知ることができる。ここで、次元が d 、拘束数が c の問題に要する超二次曲面の n は $n = d - c + 3$ である。例えば、三次元で拘束数が 2 の物体の挙動を調べるには二次曲面の分類を用いる。

具体例として、操作物体の頂点 $[0, 2]$ と $[3, 0]$ (いずれも局所座標) がそれぞれ直線 $y = 0$, $y = 2$ に拘束されている場合を考える。このときの連立方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

左辺の係数行列に対して特異値分解を行い、次の一般解を

Fig. 4 Examples of parallel-two-lines type contact with two different states

得る。

$$\begin{aligned} t_x &= s_1 \\ t_y &= -0.163265 - 0.857143s_2 \\ q_0 &= 0.0816327 + 0.428571s_2 \\ q_1 &= -0.612245 + 0.285714s_2 \end{aligned}$$

q_0 , q_1 の値を関係式 $q_0^2 + q_1^2 = 1$ に代入すると

$$-0.618492 - 0.279883s_2 + 0.265306s_2^2 = 0$$

となり、さらに標準形に直すと次の式を得る。

$$0.383221y^2 - 1 = 0$$

Table 1 によると、これは平行 2 直線型に分類される。 s_1 - s_2 空間で平行 2 直線として表されているということは、一方の直線上にある点は、与えられた条件下では連続的にもう一方の直線上に移動できないことを意味する。この例題が二つの状態を持つことはこうした点から説明できる。

二つの状態を持つ例を **Fig. 4** に示す。(a) は二つの type A 接触から成る例である。ここでは一方からもう一方の状態に遷移することは可能だが、一旦別の接触状態を経る必要がある。(b) は先の例題にも挙げた、type B 接触二つから成る例である。この場合はもう一方の状態への遷移はローカルには (与えられた拘束のみを考慮した場合には) 不可能である。

3.4 考察

二次曲線の分類を詳細に見ると、このように二つの曲線に分離している型は平行 2 直線型と双曲線型の 2 通りである。つまり、分類した結果、平行 2 直線型か双曲線型のいずれかの型であったら、その拘束では二つの状態が存在すると判定できる。

同様に、二次曲面の分類では二つの曲線に分離している型は平行 2 平面型、双曲柱面型、二葉双曲面型の 3 種類が考えられる (**Fig. 5**)。また、 $n = 5$ の超二次曲面の分類では、二次曲面の三つの型を y_4 軸に平行移動して生じる超曲面の場合と $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + 1 = 0$ に代表される二葉双曲面を拡張した型の場合の 4 種類が考えられる。

Fig. 5 Types of separated quadrics

また、超二次曲面は三つ以上に超曲面が分離しているケースは存在しない。これは拘束式が超二次曲面に変換できる限り、1組の拘束式が3状態以上を表す場合は存在しないことを意味する。

二つの状態は二次形式の標準形の式の形で区別される。例えば、平行2直線型に分類される二つのケースが同じ状態か否かは $\lambda_1 y_1^2 - 1 = 0$ の y_1 のとる値によって判定できる。つまり、二つのケースで y_1 が同じ値であれば、二つの状態は同じであり、異なる値であれば、異なる状態である。双曲線型についても、標準形 $\lambda_1 y_1^2 - \lambda_2 y_2^2 \pm 1 = 0$ で y_1 または y_2 の符号を調べることで区別できる。二葉双曲面型も、標準形 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 1 = 0$ の y_3 の符号で区別がつく。

現状では、この手法にはいくつかの限界が存在する。まず、Fig. 1 のように異なるタイプの接触が同時に存在する場合を扱えない。これは、例えば式 (10) と (12) に見られるように、左辺の変数ベクトルの成分が異なるためである。これに目をつぶって連立方程式を立てても、パラメータ s_i の数がふえて、解析が困難になる。

次に、三次元で type C のケースが扱えない。これはほかのタイプのように、係数行列と変数ベクトルの項が分離できず、ここで述べた手法が適用できないためである。

また、三次元では適用が回転軸を固定した場合に限られる。これは、回転軸を固定しない場合の回転行列が式 (2) に示したように2次の成分を持ち、1次の拘束式が作成できないためである。ただし、回転軸の2自由度の空間をメッシュに切って個別に本手法を用いて調べていくという、離散の方法との併用で挙動を解析することも考えられる。これは大概の二次元問題

を総当たりの方法でも無理なく解ける今の計算機的能力からみて十分実用に耐えるだろう。

4. おわりに

本論文では、拘束条件下の物体の状態を表現する問題で

- 従来からの接触タイプの組み合わせのみを用いた場合に不都合が生じる事例を指摘した。
- 線形拘束条件下の物体の挙動を超二次曲面の性質を利用して分類する手法を提案した。
- 上述の分類を用いて不都合が生じる条件が判別できること、また同一拘束条件下の物体の状態が区別できることを示した。

また超二次曲面の性質を利用した分類の限界もあわせて示した。

参考文献

- [1] J.F. Canny: "The Complexity of Robot Motion Planning," MIT Press, 1987.
- [2] B.R. Donald: "A Search Algorithm for Motion Planning with Six Degrees of Freedom," Artificial Intelligence, vol.31, pp.295-353, 1987.
- [3] H. Hirukawa, Y. Papegay and T. Matsui: "A Motion Planning Algorithm for Convex Polyhedra in Contact under Translation and Rotation," IEEE Conference on Robotics and Automation, pp.3020-3027, 1994.
- [4] 例えば K. Kanatani: "Geometric Computation for Machine Vision," Oxford University Press, 1993.
- [5] T. Lozano-Pérez: "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," IEEE Trans. on Computers, vol.32, no.2, pp.108-120, 1983.
- [6] 田坂隆士: 「2次形式 I」, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店.

小方博之 (Hiroyuki Ogata)

1965年10月17日生。88年、東京大学工学部精密機械工学科卒業。90年、同大学大学院工学系研究科修士課程修了。同年、日本電信電話株式会社入社。現在、同社ヒューマンインタフェース研究所にてロボット教示システムの研究に従事。精密工学会の会員。(日本ロボット学会正会員)

高橋友一 (Tomoichi Takahashi)

1952年3月12日生。74年、名古屋大学理学部物理学科卒業。76年、同大学大学院工学系研究科修士課程修了。同年日本電信電話公社(現・日本電信電話株式会社)入社。87-90年 ATR 通信システム研究所に出身。95年中部大学経営情報学科教授。工学博士。知識処理、知的インタフェースの研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会などの会員。