学術論文

自由関節を持つ平面アームのカオス的挙動と非線形制御 — ドリフトを持つ非ホロノミック機械の制御 —

中 村 仁 彦* 濃 沼 雅 史* 鈴 木 高 宏*

Chaotic Behavior and Nonlinear Control of a Two-joint Planer Arm with a Free Joint — Control of Nonholonomic Mechanisms with Drift —

Yoshihiko Nakamura*, Masabumi Koinuma* and Takahiro Suzuki*

The nonholonomic systems considered in robotics are mechanical systems with nonintegrable constraints. These systems have the property that the dimension of the reachable space is larger than the number of degree-of-freedom. A two-joint planar manipulator with the second joint free is one of such systems. Chaos, on the other hand, is another major topic in nonlinear dynamics and has the property that a dynamical system is sensitive in the initial conditions. The two phenomena have the same mathematical background from integrability point of view. In this paper, we study when and how the manipulator exhibits the chaotic behavior. We propose a control strategy for simultaneous positioning of the two joints, based on the analysis of nonlinear behavior. Its effectiveness is to be shown by experiments.

Key Words: Nonlinear dynamics, Underactuated mechanism, Nonholonomic constraints, Free joints, Chaotic behaviour

1. は じ め に

自由関節を持つ平面アームの受ける動力学的拘束は非ホロノミックであることが知られている [1]. この性質を用いて少ないアクチュエータで多くの一般化座標を持つ多体リンク系を制御することができれば、宇宙用の大型クレーンなど、様々な利用が考えられる。

自由関節を持つロボットの制御では、自由関節に電磁ブレーキを持つものの軌道制御が行われ [2], また自由関節の運動が一般に非ホロノミックな拘束となることが示された [3]. 非ホロノミックな系の制御では、平衡点へ漸近安定させるような滑らかなフィードバック則が存在しないことが知られ [4], 運動を続ける目標点へ漸近収束させることや、積分多様体上の点へ収束させることが議論されている。本論文で取り扱う平面 2 関節アームは拘束条件にドリフト項を持ち、比較的未開拓な分野である 2 階の非ホロノミックシステムの一つである。

一方、非線形力学で最近注目を集めている話題に、カオス現象がある。カオスとは初期条件の差がその後の系の挙動に大きな影響を与え、時間の十分にたった後では確率的議論しかできないような現象のことをいう。拘束条件の不可積分性という観点から両者は共通の数学的根拠を持つものである。

本研究では平面 2 関節アームという具体的な力学システムを通して、このような二つの非線形現象の関係について述べると

ともに、その非線形性を利用した制御法を構築し、実験装置を用いた検証を行う。

1.1 本論文の構成

本論文では第 2 関節が自由関節であるような平面 2 関節アームを扱う。第 2 章ではアームのモデリングを行い、入力が存在しない場合のシステムの挙動を示す。第 3 章ではまずカオスの定義に始まり、入力が存在しない場合にはカオスとなり得ないことを証明する。その上で、単純な周期入力を加えた場合の非線形現象、カオス的挙動をシミュレーションにより示す。第 4 章では、非線形制御の観点から新たなモデリングを行い、位置制御の戦略をシミュレーションを交えて説明する。第 5 章において、この制御則を実験により検証する。

2. 平面二関節アームの動力学

2.1 アームの動力学モデル

Fig. 1 に示すような 2 リンクからなるアームは、第 1 関節のみが駆動可能で第 2 関節は自由関節となっている。これは、自由関節をもつ非ホロノミックシステムとしては、実験可能な最も簡単なものである。

θ_i : 第 i 関節の角度 [rad]

m_i : 第 i リンクの質量 [kg]

s_i : 第 i 関節軸から第 i リンクの重心までの距離 [m]

l_1 : 第 1 関節軸から第 2 関節軸までの距離 [m]

I_i : 第 i リンクの、重心回りの慣性モーメント [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]

原稿受付 1995 年 6 月 15 日

*東京大学大学院工学系研究科

*Graduate School of Engineering, University of Tokyo

Fig. 1 A two-joint planer arm with a free joint

τ : 第1関節の駆動トルク [N・m]

運動方程式は Lagrange 方程式を解くことにより得られる。摩擦によるエネルギーの減衰はないものと仮定する。系の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} \{ m_1 s_1^2 + m_2 (l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos \theta_2) + I_1 + I_2 \} \dot{\theta}_1^2 + \{ m_2 (s_2^2 + l_1 s_2 \cos \theta_2) + I_2 \} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (m_2 s_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 \quad (1)$$

となる。位置エネルギーは 0 なのでラグランジアンはこの運動エネルギー T と等しい。これを Euler-Lagrange 方程式に代入して、

$$M(\theta) \ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} a + 2b \cos \theta_2 + c & b \cos \theta_2 + c \\ b \cos \theta_2 + c & c \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$c(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} -b \sin \theta_2 \cdot (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \\ b \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。ここで、物理的パラメータを以下のように置いている。

$$a = m_1 s_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad b = m_2 l_1 s_2, \quad c = m_2 s_2^2 + I_2$$

式 (2) は上下二つの式からなるが、そのうちの下の式

$$(b \cos \theta_2 + c) \ddot{\theta}_1 + c \ddot{\theta}_2 + b \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 = 0 \quad (6)$$

が、第2関節が自由関節であることによる拘束を表す。

この式が2回積分できるならば、 θ_1 と θ_2 の間の関係が直接求まることになり、システムはホロノミックである。中村らによると、式 (2) のように表されるシステムにおいて、式 (6) の第一積分が存在するための条件は次のように表される [11]。

命題 2.1 式 (6) が1回積分可能であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} (\dot{\theta}^T M \dot{\theta}) = 0 \quad (7)$$

である。

そこで式 (4) で表される M から

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} (\dot{\theta}^T M \dot{\theta})$$

を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} (\dot{\theta}^T M \dot{\theta}) = -2m_2 l_1 s_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \neq 0 \quad (8)$$

となり、 $s_2 \neq 0$ すなわち第2リンクの重心が第2関節上にはないときには条件を満たさない。したがってこのとき式 (6) は1回も積分できず、システムが非ホロノミックになることが分かる。式 (2) よりハミルトンの正準変換を行うと一般化運動量は、

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + 2b \cos \theta_2 + c) \dot{\theta}_1 + (b \cos \theta_2 + c) \dot{\theta}_2 \\ (b \cos \theta_2 + c) \dot{\theta}_1 + c \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

で定義される。ハミルトニアンは式 (1) から

$$H = \frac{a J_2^2 + 2b \cos \theta_2 \cdot J_2 (J_2 - J_1) + c (J_2 - J_1)^2}{2(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)} \quad (10)$$

と変換される。これを用いて運動方程式は以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \frac{b \sin \theta_2 P(\theta_2, J_1, J_2) \cdot Q(\theta_2, J_1, J_2)}{(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)^2} \\ \frac{Q(\theta_2, J_1, J_2)}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \\ \frac{-P(\theta_2, J_1, J_2) - Q(\theta_2, J_1, J_2)}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$P(\theta_2, J_1, J_2) = b \cos \theta_2 \cdot J_1 - (a + b \cos \theta_2) J_2$$

$$Q(\theta_2, J_1, J_2) = c J_1 - (c + b \cos \theta_2) J_2$$

2.2 入力のない場合の系の挙動

入力のない場合、つまり $\tau(t) = 0$ の場合を考える。状態方程式 (11) にこれを代入すると、

$$\dot{J}_1 = \tau = 0 \quad (12)$$

より第1関節の一般化運動量 J_1 が定数となる。さらにハミルトニアン H も外力のない状態では不変のため、式 (10) は θ_2 と J_2 の時間に依らない拘束関係を表す式となる。初期条件として J_{10} , H_0 を与えればその後の軌道は第2関節の位相平面上では

$$(a + 2b \cos \theta_2 + c) \cdot J_2^2 + 2(b \cos \theta_2 + c) J_{10} \cdot J_2 + c J_{10}^2 - 2H_0 (ac - b^2 \cos^2 \theta_2) = 0 \quad (13)$$

で表される閉曲線をなぞったものとなる。

式 (11) で表される状態空間は四次元であるが、この $J_1, H = \text{const}$ という時間に依らない拘束条件は初期状態

Fig. 2 Phase plane at $J_1 = 0.1$ [kgm²rad/sec]

から到達し得る点の空間を等 J_1 , 等 H 平面へ収めてしまう。つまり、到達し得る状態空間の次元を 2 としてしまう。式 (10) より θ_2 が求まればその時間的経緯によらず式 (13) から J_2 が定まることになる。

Fig. 2 は J_1 を一定とし、ハミルトニアン H を様々に変えて数値積分により得られた軌道を θ_2 の位相平面上で描いたものである。式 (13) から閉軌道となることが分かる。このように入力がない場合の自励系で表されるシステムをここではハミルトン系と呼ぶことにする。

3. 自由関節アームにおけるカオスの挙動

カオスという言葉の表す意味を明確に定めることは、非常に難しいことであるが、S. Wiggins は以下のようにカオスを定義している [5]。カオスには二つの特徴的な性質がある。あるベクトル場 $\dot{x} = f(x)$ について ($x \in \mathbf{R}$)、生成される流れを $\phi(t, x)$, $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ をコンパクトで $\phi(t, x)$ で不変な相空間とすると、

- (1) 初期条件への鋭敏依存性: ある $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $x \in \Lambda$ と任意の x の近傍 U について、ある $y \in U$ と $t > 0$ が存在して $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \varepsilon$ が成立すること。
- (2) 位相推移性: 任意の二つの開集合 $U, V \subset \Lambda$ に対して $\exists t \in \mathbf{R}, \exists \phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$ となること。

初期条件への鋭敏依存性とは直観的に説明すれば、任意の点 $x \in \Lambda$ について (少なくとも) 1 点 Λ 上に任意に近い点が存在して x から離れていくことをいう。位相的に推移的とは、 Λ 内の任意の点から出発した軌道はいつかは任意の開集合を通過することを意味している。 Λ がカオス的であるとは $\phi(t, x)$ が上記の二つの性質を同時に満たすことである。

3.1 ハミルトン系の場合

2.2 節にあるような自励系がカオスではないことは、この定義を用いて示される。

$$(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \in \Lambda \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \quad (14)$$

なる Λ 上で初期条件鋭敏依存性、位相的推移性のどちらかが欠けていることをいえばよい。Fig. 2 から明らかなように軌

道は $(J_2, \theta_2) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1$ 上で閉曲線を描く。これらの閉軌道の周期 T は J_1, H の関数つまり $T = T(J_1, H)$ となる。ある (J_{10}, H_0) に対する周期 T_0 の閉軌道の近傍に (J'_{10}, H'_0) なる周期 T'_0 の軌道が存在し、これらの軌道は周期の違いから時間を追うごとに軌道間距離を増す。つまり指数的ではないものの初期条件鋭敏依存性を持つ。しかし、これらの軌道はいかに時間をかけても隣接する (J'_{10}, H'_0) である閉軌道に移ることはできず、 Λ は不変な閉軌道群の集合体となる。したがって、ある点を出発した軌道は任意の開集合を通過することはできず、位相推移性を持たない。つまりカオス的ではない。

ある閉軌道の内部

$$(\theta_1, \theta_2) \in \Lambda \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, J_1 = J_{10}, H = H_0 \quad (15)$$

ではどうであろうか。 θ_2 は上記のように振動または回転する。この 1 サイクルあたりの周期を $\bar{T}$, θ_1 の進む距離を $\bar{\theta}_1$ とすると、

$$\frac{\pi}{\bar{\theta}_1} = \text{無理数}$$

であれば二次元トーラス面 T^2 上を稠密に埋め尽くし、位相的推移性を持つ。ただし、どちらの方向にせよ、軌道間の誤差は拡大や縮小されることはなく、初期条件鋭敏依存性を持たない。さらに、

$$\frac{\pi}{\bar{\theta}_1} = \text{有理数} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は自然数})$$

の場合には周期 $n\bar{T}$ の運動、つまり軌道はトーラス上で 1 本の閉曲線となる。位相的推移性さえも持たない。

状態方程式 (11) を満たす式 (14) の Λ 空間は時間に依らない拘束と微分方程式による時間に依存した拘束をそれぞれ二つずつ受けている。これまで相空間の次元は 4 として考えたが、当然のことながら等エネルギー (超) 平面、等 J_1 平面を脱出できないことが位相的に推移的でないと結論を導いた。むしろこのシステムがカオス的であるかどうかは式 (15) で表される二次元相空間 Λ を調べるべきであることが分かる。

一方、カオスは連続時間の場合、三次元以上の相空間でしか起こらないことが知られている [7]。面積が有限な平面内で、近接しあう軌道対が次第にはなれていくと、三次元以上でないといつかは交差するが、運動方程式の解の唯一性から、軌道が交差することは許されないからである。これらのことから、カオスの起こり得る必要条件として時間に依存した拘束条件が三つ以上存在することが挙げられる。このことは、もし自由関節を一つ増やせば外力なしでもカオスの起こり得ることを意味している。

非ホロノミックな拘束とは拘束条件が一般化座標 x と時間 t の代数方程式

$$f(x, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

で表すことができない拘束をいう。ここでいう位相推移性を妨げる拘束条件は状態量、つまり一般化速度 $\dot{x}$ あるいは一般化運動量 p を含めた状態空間での代数方程式拘束条件

$$g(x, \dot{x}) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

あるいは

$$g(x, p) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, p \in \mathbf{R}^n$$

のことであり、これがそのままホロノミックな拘束を表すのではないことに注意されたい。

3.2 入力のある系

入力として式 (11) におけるトルク τ に $\tau = \gamma \cos \omega t$ の三角関数を加えた場合を考える。 γ は振幅、 ω は角振動数である。運動方程式 (11) を書き直すと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cos \phi \\ \frac{b \sin \theta_2 P(\theta_2, J_1, J_2) \cdot Q(\theta_2, J_1, J_2)}{(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)^2} \\ \frac{Q(\theta_2, J_1, J_2)}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \\ \frac{-P(\theta_2, J_1, J_2) - Q(\theta_2, J_1, J_2)}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \\ \omega \end{pmatrix},$$

$$(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2, \phi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1 \quad (16)$$

となる。第 1 関節の一般化運動量 J_1 はもはや定数ではないが、簡単に解くことができ、

$$J_1(t) = J_1(0) + \frac{\gamma}{\omega} \{ \sin \phi(t) - \sin \phi(0) \} \quad (17)$$

となる。外力の作用によりエネルギー保存則も成り立たなくなるので状態空間の次元は再び 4 にもどり、カオスの起こり得る条件は整う。Fig. 3 は $\gamma = 0.03$, $\omega = \pi/4$ としてシステムを振動させた場合の軌道を位相平面に描いたものである。初期条件は実線が $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)|_{t=0} = (0, 0, 0, 0)$ 、他の線はこの初期条件に θ_2 方向の微小誤差を持たせて描いたものであり、図中の数字はこの θ_2 の初期値を表している。ハミルトン系で見られた周期性はなくなり閉軌道群は崩壊している。また、時間の経過とともに軌道間誤差が拡大し、初期条件鋭敏依存性が現れていることが分かる。

3.3 ポアンカレ写像

前述のようにカオスが起こるためには流れでは自由度が最低三つ必要であるが、三次元以上の相空間の理解は非常な困難を要する。そこでポアンカレ写像 [5] を用いる。ポアンカレ写像

Fig. 3 Sensitive dependence on initial conditions

とは、相空間内に超断面を構成しこの断面を通過するごとの点列を写像として理解する手法であり、これによって少なくとも一つは変数を取り除け、次元の低いところで問題を扱うことが可能になる。

式 (16) からポアンカレ写像を構成する。式 (16) の解を

$$x(t) \equiv (J_1(t), J_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$$

とし、ベクトル場の大域的断面を次の $\Sigma^{\bar{\phi}_0}$ で定義する。

$$\Sigma^{\bar{\phi}_0} = \{(x, \phi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1 | \phi = \bar{\phi}_0 \in [0, 2\pi)\}$$

$\phi_0 \equiv \phi|_{t=0}$ として、これからポアンカレ写像を構成すると以下ようになる。

$$P_{\phi_0} : \Sigma^{\bar{\phi}_0} \rightarrow \Sigma^{\bar{\phi}_0},$$

$$\begin{pmatrix} x \left(\frac{\bar{\phi}_0 - \phi_0}{\omega} \right), \bar{\phi}_0 \\ \mapsto \left(x \left(\frac{\bar{\phi}_0 - \phi_0 + 2\pi}{\omega} \right), \bar{\phi}_0 + 2\pi \equiv \bar{\phi}_0 \right) \end{pmatrix} \quad (18)$$

または

$$x \left(\frac{\bar{\phi}_0 - \phi_0}{\omega} \right) \mapsto x \left(\frac{\bar{\phi}_0 - \phi_0 + 2\pi}{\omega} \right) \quad (19)$$

ϕ および ϕ と式 (17) の代数方程式拘束の関係にある J_1 、ベクトル場を直接構成しない θ_1 を除いた二次元写像で問題を研究することができる。なお、 P_{ϕ_0} の不動点は式 (16) の $2\pi/\omega$ 周期軌道に対応し、 P_{ϕ_0} の k 周期点は、式 (16) のもとに戻るまでに k 回 $\Sigma^{\bar{\phi}_0}$ を通る周期軌道に対応する。

この手法を用いてルンゲ・クッタ法による数値積分からポアンカレ写像を描く。もっとも単純な場合を考え、 $J_1(0) = 0$ とする。エネルギー (ハミルトニアン) を様々に変えてポアンカレ写像を描くと、Fig. 4~6 のようになる。初期条件および定数 γ , ω は以下のようにとった。

$$(\theta_1, \theta_2, J_1)|_{t=0} = (0 [\text{rad}], 0 [\text{rad}], 0 [\text{kgm}^2 \text{rad/sec}]),$$

Fig. 4 : $\gamma = 0.04 [\text{rad/sec}^2]$, $\omega = 2\pi [\text{rad/sec}]$

Fig. 5 : $\gamma = 0.4 [\text{rad/sec}^2]$, $\omega = 2\pi [\text{rad/sec}]$

Fig. 6 : $\gamma = 4 [\text{rad/sec}^2]$, $\omega = 2\pi [\text{rad/sec}]$

まず、式 (10) から非摂動系では、

$$H = \frac{a + 2b \cos \theta_2 + c}{2(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)} \cdot J_2^2$$

となり、位相平面では運動量方向に相似な周期軌道が描かれることとなる。つまり、この角振動数を ω_H とすると $H \propto \omega_H^2$ となる。非摂動系の運動は $H - \theta_2$ 座標系のグラフで水平な直線となるが、摂動の小さな Fig. 4 の場合には非摂動軌道と共鳴を起こしている。 $\omega = m\omega_H$ となる摂動の m 倍の低調波との共鳴で、 $2m$ 個の不動点を持ち、中心型不動点と双曲型不動点交互に現れる。中心型不動点では軌道の写像は不動点を中心に回転する。双曲型不動点では安定多様体と不安定多様体が交

Fig. 4 Poincaré map of Eq. (16) at $\gamma = 0.04$, $\omega = 2\pi$ Fig. 5 Poincaré map of Eq. (16) at $\gamma = 0.4$, $\omega = 2\pi$ Fig. 6 Poincaré map of Eq. (16) at $\gamma = 4$, $\omega = 2\pi$

差し、その近傍では双曲線状の軌道が描かれることとなる。それぞれの軌道は閉軌道を構成し、位相推移性を持っていないことが分かる。

摂動を大きくしていくと、Fig. 5 にあるように双曲型不動点を結んでいたホモクリニックな閉軌道が崩壊していき、中心型

不動点近傍を除いて位相推移性を持つようになる。摂動の十分大きな状態では Fig. 6 のように極めてカオス的な位相平面を描くこととなる。フリージョイント・アームではこのようなカオスの挙動が生じることが分かる。

4. 第2関節の位置制御

4.1 第1関節加速度への三角関数入力

ここでは第1関節の加速度を入力とするモデルを用いて系を記述する。動力学モデルを用いて逆道力学計算を行い、第1関節の指令加速度を発生するべき入力トルクを与える。第1関節の加速度が三角関数となるような入力を考える。周期入力によって第1関節の位置にドリフトが生じないため、第1関節をあらかじめ目標角度に位置決めした後、第1関節の周期運動によって第2関節を独立に位置制御することが可能となる。状態方程式としては、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cos \psi \\ -(1 + n \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - n \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2, \psi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1 \quad (21)$$

$$\text{ただし, } n = \frac{b}{c} = \frac{m_2 l_1 s_2}{m_2 s_2^2 + I_2}$$

したがって第1関節の運動は積分することにより、単純な三角関数振動となる。初期条件として静止した状態 $\dot{\theta}_{10} = 0$ と $\psi_0 = 0$ を仮定する。解析的に解けた $\dot{\theta}_1, \theta_1$ を状態方程式から除き、残る部分のみを抽出すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma(1 + n \cos \theta_2) \cos \psi - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 n \sin \theta_2 (\sin \psi)^2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \omega \end{pmatrix} \\ (\dot{\theta}_2, \theta_2, \psi) &\in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \end{aligned} \quad (22)$$

となる。この微分方程式系からポアンカレ写像を構成すると

$$\Sigma^0 = \{(\dot{\theta}_2, \theta_2, \psi) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 | \psi = 0 \in [-\pi, \pi)\}$$

$$P_{\psi=0} : \Sigma^0 \rightarrow \Sigma^0,$$

$$(\dot{\theta}_2(t_0), \theta_2(t_0)) \mapsto (\dot{\theta}_2(t_0 + 2\pi), \theta_2(t_0 + 2\pi)) \quad (23)$$

とできる。以下、ポアンカレ写像とは具体的にこの大域的断面への写像を指すことにする。

時間軸方向の無次元化を行うと、

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \\ s \end{pmatrix}$$

Fig. 7 Phase Plane with $\gamma = 6 [\text{rad/s}^2]$, $\omega = 4\pi [\text{rad/s}]$

$$= \begin{pmatrix} -\varepsilon \{ (1 + n \cos \theta_2) \cos s + n \varepsilon \sin \theta_2 (\sin s)^2 \} \\ \Omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega, \theta_2, s) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1 \quad (24)$$

ただし,

$$s = \omega t, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{\omega^2}, \quad \Omega = \frac{d\theta_2}{ds} = \frac{1}{\omega} \dot{\theta}_2$$

となり, 入力の本質的なパラメータは ε のみとなる.

Fig. 7 は初期条件として $(\dot{\theta}_2, \gamma, \omega) = (0, 6, 4\pi)$ を選び, θ_2 を様々に変えて軌道を描いたものである. 同図より摂動の小さな場合には位相平面上で閉軌道を描くことが分かる.

4.2 振幅変調による近似楕円軌道へのフィードバック漸近安定化

第1関節加速度への三角関数入力によって第1関節のドリフトなしに第2関節のみを移動させて, この際, 入力の振幅を周期ごとに変化させることで制御を行う. ここでは両関節とも静止した状態を初期状態とし, 第1関節は初期位置, 第2関節は目標位置で静止した状態を目標状態とする. すなわち

$$(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) = (0, 0, \theta_{10}, \theta_{20}) \rightarrow (0, 0, \theta_{10}, \theta_{2d})$$

前節の結果より摂動の振幅が小さいときには系は Fig. 7 のように閉軌道を描き, 摂動振幅を変えることで $\dot{\theta}_2$ 方向の径が変わる. これを利用して目標位置 θ_{2d} を通る閉軌道に軌道を漸近安定化させることを考える. 摂動振幅にある基準値 γ_0 を設定したときに描く閉軌道を楕円で近似し, この軌道からの誤差に基づいて1周期ごとに振幅 γ を変えることによって目標楕円軌道へ到達させる. 楕円軌道群の中心を $(0, p)$, 目標軌道の θ_2 方向の半径を $r_d = |\theta_{2d} - p|$ とすると目標軌道は次式で表せる.

$$\frac{\left(\frac{\dot{\theta}_2}{\alpha}\right)^2 + (\theta_2 - p)^2}{r_d^2} = 1 \quad (25)$$

ただし α は楕円軌道の離心率であり, γ_0 に対応して数値計算から決定される. 目標点付近では $\dot{\theta}_2 \ll 1$ であり, α の精度は

Fig. 8 Converging to approximate trajectory (1)

Fig. 9 Simulation: controll from 0 to $\frac{3\pi}{4} [\text{rad}]$

solid line : real trajectory
○ : poincar'e section
dotted line : desired trajectory

問題にならない. 楕円軌道の半径の目標軌道との誤差

$$\delta_r = \frac{\left(\frac{\dot{\theta}_2}{\alpha}\right)^2 + (\theta_2 - p)^2}{r_d^2} - 1 \quad (26)$$

に適当な振幅ゲイン k_γ をかけて次の1周期の振幅を次式のように決定する.

$$\gamma = k_\gamma \delta_r + \gamma_0 \quad (27)$$

ゲイン k_γ は Fig. 8 にあるように位相平面上の領域によって符号を変える.

Fig. 7 のように系の描く軌道は直線 $\theta_2 = 0$ を境に二つの楕円軌道群に分かれている. そのため軌道を表すパラメータ p , α やゲイン k_γ は左右の領域で異なり, 目標点に到達可能な捕獲領域は $\theta_{2d} \geq 0$ では $\theta_2 = [0, \pi]$, $\theta_{2d} \leq 0$ では $\theta_2 = [-\pi, 0]$ の二つに分かれる. Fig. 9 に初期位置 $\theta_2 = 0$, 目標位置 $\theta_2 = 3\pi/4 [\text{rad}]$ としたときのシミュレーション結果を

示す。基準振動振幅は $\gamma_0 = 6 [\text{rad/s}^2]$, $\omega = 4\pi [\text{rad/s}]$ とした。図において点線は目標となる楕円軌道を表し、実線は実際の軌道を、白丸はそのポアンカレ写像を表す。滑らかに近似軌道に漸近安定化し目標点に到達しているのが分かる。

4.3 静止状態への到達

ポアンカレ写像はベクトル場ではないので楕円型閉軌道へ収束させても速度 0 の点に止まるとは限らない。むしろ θ_2 軸を飛び越えてしまう方が普通である。そこで目標点付近では目標位置への到達よりも静止することを優先させるように振幅を決定する。静止直前のシステムの挙動を調べる必要があるので、式 (24) を ε で級数展開した近似式を用いて解析する。

$$x(s, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \Omega(s, \varepsilon) \\ \theta_2(s, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$x(s, \varepsilon) = x_0(s) + \varepsilon x_1(s) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x_2(s) + O(\varepsilon^3) \quad (28)$$

ここで、

$$x_0(s) = x(s, 0), x_1(s) = \left. \frac{\partial x(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, x_2(s) = \left. \frac{\partial^2 x(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$$

である。 $x_0(s)$ は非振動系の解であり、式 (28) はこの非振動解まわりの級数展開となる。ポアンカレ写像は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : \Sigma^{\phi_0} &\rightarrow \Sigma^{\phi_0}, \\ x(0, \varepsilon) &\mapsto x(2\pi, \varepsilon) \\ &= x(0, \varepsilon) \mapsto x_0(2\pi) + \varepsilon x_1(2\pi) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x_2(2\pi) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (29)$$

各級数を複雑な計算の後求めると、速度 0 付近では

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Omega + \frac{1}{2} \varepsilon^2 n^2 \pi \sin 2\theta_2 + O(\Omega \varepsilon) + O(\varepsilon^3) \\ 2\pi \Omega + \theta_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 n^2 \pi^2 \sin 2\theta_2 + O(\Omega \varepsilon) + O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \quad (30)$$

このポアンカレ写像から $\Omega \leq \varepsilon^2$ の範囲では

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Omega + \frac{1}{2} \varepsilon^2 n^2 \pi \sin 2\theta_2 + O(\varepsilon^3) \\ 2\pi \Omega + \theta_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 n^2 \pi^2 \sin 2\theta_2 + O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \quad (31)$$

となり、速度 0 へ写像されるとすると

$$\varepsilon_d = \sqrt{-\frac{2\Omega}{n^2 \pi \sin 2\theta_2}} \quad (32)$$

(ただし、 $\Omega \sin 2\theta_2 < 0$)

このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} O(\varepsilon_d^3) \\ \pi \Omega + \theta_2 + O(\varepsilon_d^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} O(\varepsilon_d^3) \\ \theta_2 + O(\varepsilon_d^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 10 Neighbor of the desired θ_2

Fig. 11 Simulation: stopping at $\frac{3\pi}{4} [\text{rad/sec}]$

であるので、目標位置との誤差も $O(\varepsilon_d^2)$ となる。実際の制御則では目標点の近傍の位相空間 Σ までは閉軌道へ収束させておいて Σ 内へ到達したならば式 (32) から求める $\gamma_d = \varepsilon_d \omega^2$ で最後の 1 回の周期入力を入れたところで目標点へ収束したとみなす (Fig. 10 参照)。この最後の 1 回の周期入力以降に加わる外乱に対しては、目標点へ安定化する働きはないため、この過程はオープンループ制御である。近傍位相空間 Σ は

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \{(\Omega, \theta_2) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \mid \varepsilon_d < \varepsilon_0 = \gamma_0 / \omega^2, |\theta_2 - \theta_{2d}| < \delta \theta_2\} \\ &= \{(\dot{\theta}_2, \theta_2) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \mid \gamma_d < \gamma_0, |\theta_2 - \theta_{2d}| < \delta \theta_2\} \end{aligned}$$

とする。

Fig. 11 にシミュレーション結果を示す。初期位置、目標位置は $(\theta_{20}, \theta_{2d}) = (0, \frac{3\pi}{4})$ であり、Fig. 9 と同様の条件である。左図が従来のも、右図が静止状態へ収束させたものである。

4.4 捕獲領域の拡張

目標点を中心 p から見てより外側の軌道上にある、つまり $\theta_2 = 0, \pm\pi$ に近い場合、楕円近似による誤差のため目標点よりもさらに外側に収束してしまう。また、捕獲領域を脱出してしまう場合も生じた。これを防ぐために楕円軌道の半径 (θ_2 方向) の初期値に上限を設け、さらに目標値と外側の収束点との

Fig. 12 Simulation: compensating the modeling gap

距離差に比例して、半径を縮小させる。この作業を軌道が θ_2 軸を通過する楕円軌道半周ごとに行う。軌道が θ_2 軸を通過した時点での半径を r_0 、通過前後の目標軌道の半径を r 、 r_{next} として次式のように適当な半径ゲイン $k_r (> 0)$ を用いてフィードバックする。

$$r_{\text{next}} = r \left(1 + k_r \cdot \frac{r_d - r_0}{r_0} \right) \quad (33)$$

これにより θ_{2d} が $0, \pm\pi$ の近傍の場合も含めて任意の値に収束可能となった。

Fig. 12 にそのシミュレーション結果を示す。初期位置は $\theta_2 = \pi/3$ [rad]、目標位置は $\pi/18$ [rad] とした。点線は初期目標近似楕円軌道であり、実線はポアンカレ写像を結んだものである。また白丸は終点を表す。この制御により近似楕円軌道は目標点を通る軌道ではなくなるが、図のように何周かした後に収束することができる。これは実際には第2関節が何回か振動してから目標点に到達することを示す。

この制御則では目標点に対する捕獲領域が初期位置によって位相平面で左右いずれかの半平面に限られているが、次のようにすれば任意の点へ到達可能となる。すなわち $\theta_2 = 0$ [rad] 付近である程度の運動量を持っていれば、閉軌道から脱出し $\dot{\theta}_2$ 軸を越えて目標位置の捕獲領域へ到達できる。よって Fig. 13 のように $\theta_2 = 0$ [rad] 付近に至るまでは適当な半径の楕円軌道に収束させておき、次式のように定義される領域 Π に来たときに目標楕円軌道の外側と見て上記の制御を適用する。こうすれば、初期点から到達可能な領域は位相平面全体へと拡大する。

$$\Pi = \left\{ (\theta_2, \dot{\theta}_2) \in S^1 \times \mathbf{R}^1 \mid \left(|\theta_2| \leq \frac{\pi}{2} \right) \cap (\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 < 0) \right\}$$

Fig. 14 に初期点が目標点の反対側にある場合のシミュレーション結果を示す。初期位置を $\theta_{20} = -5\pi/12$ [rad]、目標位置を $\theta_{2d} = 3\pi/4$ [rad] とした。はじめは左半面の楕円軌道へ収束させ、領域に入ったところで右半平面の楕円軌道への収束化に切り替えている。上記のアルゴリズムによって目標点の反対側に初期点があっても無事に目標値に収束している。

本研究で取り扱った自由関節を持つ平面アームは非ホロノミックシステムの中でも解析の難しい部類のドリフト項を持つ

Fig. 13 Extension of the region to be caught

Fig. 14 Simulation: global attraction

2 階の非ホロノミックシステムである。第2関節の制御には、摂動の振幅を一周期ごとに变えて近似された楕円軌道多様体への漸近安定化を行い、Brockett の定理の「平衡点への滑らかな状態フィードバック」を避けた。しかし目標点の静止した状態への漸近安定化は行われておらず、目標点近傍での最終的な停止にはオープンループ制御となっている。誤差のために微小な運動量が残る場合の減衰は摩擦に頼ることになる。

5. 実 験

前章で述べた制御法に基づいて、Fig. 15 に示すような自由関節アーム実験装置を用いて制御実験を行い、その有効性を検証する。Table 1 に実験装置の物理パラメータを示す。3, 4 節におけるシミュレーションではこの値を用いている。Fig. 16 に実験装置の写真を示す。

また制御パラメータは、基準摂動振幅を $\gamma_0 = 6.00$ [rad/s²]、摂動角振動数を $\omega = 4\pi$ [rad/s] として近似する楕円軌道の中心 $p = \pm 1.53$ [rad]、離心率 $\alpha = 0.300$ 、振幅ゲイン $k_\gamma = 15.0$ [rad/s²]、半径ゲイン $k_r = 0.500$ とした。前章におけるシステムのモデル化においては自由関節は完全に摩擦がない理想的なものとして扱った。しかし実際には若干の摩擦は存在し、それによる減衰は制御系の設計には考慮されていない。

Fig. 15 A free-joint-arm

Fig. 16 Picture of A free-joint-arm

Table 1 実験装置の物理パラメータ

リンク	1	2
質量 [kg]	1.00	0.930
重心回りの慣性モーメント [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	—	0.0115
リンク長さ [m]	0.240	0.240
重心位置 [m]	—	0.111

それでも以下に示すように4章で設計したフィードバック制御によって目標点への到達が達成されている。

Fig. 17 に初期点 $\theta_2 = 0$ [rad] から目標点 $\theta_2 = -2$ [rad] への位置制御を行った実験結果を示す。目標位置が初期位置よりも中心点 p に近い場合である。初期半径 r_0 では目標値へ収束できず、7.50 [sec] で $\theta_2 = -1.9$ [rad] 付近を通過する。この後、半径 r のフィードバックから p の回りを3周して42.5 [sec] で到達することとなる。シミュレーション上ではさほど必要としなかった半径 r のフィードバックは摩擦の影響から非常に重要な役割を果たしていることが分かる。

Fig. 18 に初期点 $\theta_2 = -2$ [rad] から目標点 $\theta_2 = 0$ [rad] への位置制御を行った実験結果を示す。摩擦のために中心 p が実際には沈点となるために目標点への到達は多少の困難を伴うものの、37.5 [sec] で目標点の十分近傍に到達した。また逆に摩擦のおかげで、目標点の十分近傍では少々の運動量は問題にならず目標点への収束が助けられている。また目標点が $\theta_2 = 0$ [rad] であることによって、 $\dot{\theta}_2$ 軸を境にして近似される楕円軌道の中心が異なるために、軸を越えて目標軌道が不連続に変わり制御が不安定になる困難さが考えられた。しかし実際には測定範囲を越えることも、軸を越えると反対側の領域へ行

Fig. 17 Experiment: controlled 2nd joint to -2 [rad]

○ : desired point, * : initial point, × : end point
solid line : exp. trajectory (Poincaré map)
dotted line : desired trajectory

Fig. 18 Experiment: controlled 2nd joint to 0 [rad]

くこともなく無事に収束した。

6. ま と め

非ホロミックな拘束は、その存在にもかかわらず運動の自由度が減少しないという特徴を持つ。このような拘束条件と、初期条件に対して敏感な挙動を示すカオスという二つの非線形現象が、一つの自由関節を持つ平面アームという極めて単純な機械システムに現れることを示し、その理論的考察を行った。さらに、関節角の制御則を提案してその有効性を実験により検証した。

本論文で得た結論は以下の5点である。

- (1) 一つの自由関節を持つ2関節平面アームについて、入力のないハミルトン系の場合のシステムの挙動を解析し、この場合にはカオスの挙動は生じないことを証明した。
- (2) 入力として単純な三角関数入力を加える場合に、振幅が小さい場合には非カオスの周期運動を行うが、振幅が大きくなるにつれ、次第にカオスの挙動に移行することを数値計算により示した。

- (3) 一つの自由関節を持つ2関節平面アームで非カオスの周期運動を用いて二つの関節を任意に位置決めするための制御則を提案した。制御は(a)第1関節の位置制御, (b)第1関節の周期運動による第2関節の位置制御, からなる。(b)はさらに(b1)第2関節の目標点を通る楕円軌道へのフィードバック安定化, (b2)目標点近傍でのオープンループによる停止制御, に分けられる。
- (4) 実験装置を用いて上記の制御則の有効性を示した。厳密には, 自由関節にわずかな摩擦が存在する散逸系となっているが, それにもかかわらず振幅変調によるフィードバックによって目標楕円軌道に収束させられることを実験的に確認した。

カオスの挙動をロボットの挙動として積極的に利用すること, 自由関節を持つ2関節マニピュレータから自由関節を持つ空間マニピュレータおよび n 関節マニピュレータへの拡張など多くの問題が今後の課題として残されている。本論文では, 自然界に存在する生物や現象のような複雑さを持たない, ロボットのような機械システムが, その動力学的な非線形のゆえに極めて豊かな挙動を示すことを明らかにした。このような性質を用いた新しい機械システムの目的にかなった構成理論を構築することが将来の大きな問題である。

東京大学工学部機械情報工学科の吉本堅一教授には数々の貴重な助言をいただいた。なお, 本研究は豊田理化学研究所の援助の下に行ったものである。

参考文献

- [1] 中村仁彦: “非ホロノミックロボットシステム第1~5回”, 日本ロボット学会誌 vol.11, no.4, 1993~vol.12, no.2, 1994.
- [2] H. Arai and S. Tachi: “Dynamical Control of a Manipulator with Passive Joints—Position Control Experiments by a Prototype Manipulator—”, Proc. IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, 1990.
- [3] G. Oriolo and Y. Nakamura: “Free joint manipulators: motion control under second-order nonholonomic constraints,” Proc. IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, '91 pp.1248–1253, 1991.
- [4] R.W. Brockett: “Asymptotic stability and feedback stabilization,” Differential geometric control theory, 1983.
- [5] S. Wiggins: “Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,” Springer-Verlag, 1990.
- [6] 中村仁彦, 岩本隆史: “ドリフト項を持つ非ホロノミック機械の制御”, 日本ロボット学会誌 vol.13, no.6, pp.830–837, 1995.
- [7] M. Tabor: “Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics—An Introduction,” Wiley Inter-Science, 1989.
- [8] J. Guckenheimer and P.J. Holmes: “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields,” Springer-Verlag, 1983.
- [9] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman: “Regular and Stochastic Motion,” Springer-Verlag, 1982.
- [10] J. Hale: “Ordinary Differential Equations,” Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., 1980.
- [11] Y. Nakamura and G. Oriolo: “Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators,” 30th Conference on Decision and Control, 1991.
- [12] A.J. Schwartz: “A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds,” Amer. J. Math., 1963.
- [13] V.K. Melnikov: “On the stability of the center for time periodic perturbations,” Trans. Moscow Math Soc., 1963.
- [14] J.A. Sanders and F. Verhulst: “Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems,” Springer-Verlag, 1985.

中村仁彦 (Yoshihiko Nakamura)

1954年9月22日生。1977年京都大学工学部精密工学科卒業。82年同大学大学院博士課程退学。同年より87年まで同大学助手。87年より91年3月までカリフォルニア大学サンタバーバラ校助教授, 準教授。同年4月より東京大学工学部機械情報工学科助教授。工学博士。運動学的冗長性, 閉リンク機構の駆動冗長性, 複数のロボット機構の協調, 宇宙ロボットの制御, 非ホロノミックな拘束を受ける機械の運動制御などに興味を持つ。日本機械学会, 計測自動制御学会, システム制御情報学会, IEEE, ASMEなどの会員。(日本ロボット学会正会員)

濃沼雅史 (Masabumi Koinuma)

1972年7月9日生。1995年, 東京大学工学部機械情報工学科卒業。現在, 同大学院修士課程在学中。非ホロノミックロボットシステム, 非線形系の制御, カオス現象などに興味を持つ。(日本ロボット学会学生会員)

鈴木高宏 (Takahiro Suzuki)

1970年7月23日生。1993年東京大学工学部機械情報工学科卒業。95年同大学院修士課程修了。現在, 同博士課程在学中。非ホロノミックロボットシステム, 非線形系の制御, ロボットシステムにおけるカオス現象などに興味を持つ。日本機械学会学生会員。(日本ロボット学会学生会員)