Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を用いた三輪移動体の制御

今 福 啓* 山 下 裕* 西 谷 紘 一*

Control of a Wheeled Vehicle Using the Viscosity Solution of the Hamilton-Jacobi Partial Differential Equation

Kei Imafuku*, Yuh Yamashita* and Hirokazu Nishitani*

To construct an optimal regulator for nonlinear systems, we need to solve a Hamilton-Jacobi partial differential equation (HJ-PDE). However, if the system has nonholonomic constraints, the HJ-PDE has a nonsmooth solution because of the nonsmoothness of the optimal cost function. In such a case, the viscosity solution, a nonsmooth weak solution of the HJ-PDE, is obtained.

In this paper, we deal with a wheeled vehicle, which is a nonholonomic system, and propose a numerical method to achieve a viscosity solution of the HJ-PDE using the dynamic programming principle (DPP). The DPP can be applied to acquire a nonsmooth solution of the HJ-PDE. We also construct an optimal control law using derivatives of the viscosity solution of the HJ-PDE. The effectiveness of the proposed method is shown through simulations.

Key Words: Hamilton-Jacobi Partial Differential Equation, Viscosity Solution, Nonlinear Control Theory

1. は じ め に

ドリフト項をもたないノンホロノミックシステムは、滑らかな時不変の状態フィードバックでは漸近安定とすることができないことが知られており、それを満たさないように漸近安定化制御則を構成する方法が多く提案されている[6]~[8]。それらの制御則の多くが、座標変換と入力変換によってチェインド・フォームと呼ばれる正準系に変換したものに対して構成されている。

一方、ノンホロノミックシステムは非線形系であることから、非線形最適レギュレータを構成することで系を漸近安定とする方法も考えられる。しかし、このような制御則を構成するためには、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解の偏微分値が必要となり、いかにしてその解を求めるのが問題となる。さらに、ノンホロノミック拘束をもつシステムでは、評価関数の最小値が滑らかではないことから Hamilton-Jacobi 偏微分方程式が粘性解 [1] [2] と呼ばれる微分不可能な点を含むものしかたず、一般的に用いられるような偏微分方程式の解法では解を求めることができない。

そこで、本論文ではノンホロノミックシステムの一つである三輪移動体を取りあげ、非線形最適レギュレータを構成する方法について述べる。非線形最適レギュレータを構成する際には、先に述べたように Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解が

必要となるが、これが評価関数の最小値に一致していることを利用して、動的計画法を用いて解を求める。動的計画法を用いることで、この解が粘性解となる場合でも求めることができる。そして、求めた粘性解をスプライン関数によって近似し、それを微分することで粘性解の偏微分値の近似値を求め、制御則を構成する方法についても示す。また、シミュレーションを行い、提案された手法の有効性について検討する。

2. 三 輪 移 動 体

Fig. 1 において示される三輪移動体のモデルは、次式のようにになる。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{L} \dot{r} \tan \alpha\end{aligned}\quad (1)$$

(x, y) は三輪移動体の位置、 θ は姿勢角、 L は長さ、 $\dot{r}$ は速度、そして α は操舵角である。また、状態および入力をそれぞれ

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{r} \tan \alpha \end{bmatrix}$$

とする。このようなモデルは、座標変換 $\xi_1 = x$, $\xi_2 = \tan \theta$, $\xi_3 = y$ と入力変換 $v_1 = \cos \theta u_1$, $v_2 = u_2 / \cos^2 \theta$ により

$$\dot{\xi}_1 = v_1$$

原稿受付 1998 年 6 月 25 日

*奈良先端科学技術大学院大学

*Nara Institute of Science and Technology

Fig. 1 Wheeled vehicle

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 &= v_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 v_1\end{aligned}\quad (2)$$

のようなチェインド・フォームと呼ばれる形式に変換できるということがよく知られているが、この形式で表されるのは元のシステムである式 (1) のうち $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ の範囲に限られている。すなわち、通常よく用いられているチェインド・フォームに対して構成される制御則 [6]~[8] は、切りかえしなしでは漸近安定とすることができない $\theta \in \{-\pi, -\pi/2, [\pi/2, \pi]\}$ の範囲を初期値とする場合を除いたものとなっている。

本論文では式 (1) に対して非線形最適レギュレータを構成する。これによって、チェインド・フォームで除いている切りかえしが必要な $\theta \in \{-\pi, -\pi/2, [\pi/2, \pi]\}$ の範囲に初期値がある場合でも、漸近安定となる制御則が構成できる。

3. 偏微分方程式の粘性解

開集合 Ω において定義された次の偏微分方程式

$$H\left(x, V(x), \frac{\partial V}{\partial x}(x)\right) = 0 \quad (3)$$

を考える。ただし、 V は C^0 級以上とする。また、 H は

$$H(x, r, p) \leq H(x, s, p) \quad (r \leq s) \quad (4)$$

を満たすものとする。このとき、 $V(x)$ が式 (3) の粘性劣解であるとは、 $\varphi \in C(\Omega)$ であり、 $V - \varphi$ が $\bar{x}$ において極大値をとるならば

$$H\left(\bar{x}, V(\bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{x})\right) \leq 0 \quad (5)$$

が成り立つことをいう。また、 $V(x)$ が粘性優解であるとは、 $\varphi \in C(\Omega)$ であり、 $V - \varphi$ が $\bar{x}$ において極小値をとるならば

$$H\left(\bar{x}, V(\bar{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{x})\right) \geq 0 \quad (6)$$

が成り立つことをいう。そして、粘性劣解でもあり粘性優解でもあるものが粘性解である [1] [2]。このように、粘性解は偏微分方程式の解の微分可能性を必要としない弱解の概念として知られている。

ほとんどすべての点において式 (3) を満たし、無数の点で折れ曲がるような解（すなわち劣解あるいは優解）は無数に存

在するが、粘性解は唯一な大域的最適解である。これは、解の一意性を証明する際に用いられる比較定理が粘性解に対しても成り立つことから証明されている [1]。そこで、粘性解が一意に求められることを利用して、次節では動的計画法を用いることで、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める方法について述べる。

4. 動的計画法による Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解法

式 (1) に対し、次の評価関数を最小にするという問題を考える。

$$J(\phi, u) = \int_0^\infty (x^2 + y^2 + \theta^2 + u_1^2 + u_2^2) dt \quad (7)$$

このとき、上式を最小にするような最適制御則 u_1, u_2 は、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式

$$\begin{aligned}H\left(\phi, \frac{\partial V}{\partial \phi}\right) &= -\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \\ &\quad + x^2 + y^2 + \theta^2 = 0\end{aligned}\quad (8)$$

$$V(\phi) \geq 0, V(0) = 0 \quad (9)$$

の粘性解 V を用いて

$$u_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right) \quad (10)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (11)$$

と求めることができる。一般的に Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求めるのは難しいが、本論文では V が

$$V(\phi) = \min_u J(\phi, u) \quad (12)$$

のように評価関数の最小値となることを利用して、動的計画法を用いることによって、式 (8) の Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める方法を考える。

まず最初に、式 (7)(12) を時間間隔 ΔT で離散化し、動的計画法を用いると

$$J_d(\phi, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \phi^2(k+1) + u^2(k) \} \Delta T \quad (13)$$

$$\begin{aligned}V_d(\phi(k)) &= \min_{u(k)} \{ V_d(\phi(k+1)) \\ &\quad + (\phi^2(k+1) + u^2(k)) \Delta T \}\end{aligned}\quad (14)$$

となる。式 (14) が、動的計画法の基本式である。状態 $\phi = [x, y, \theta]^T$ に関しても同様に時間間隔 ΔT で離散化することに

よって, $\dot{\theta} \neq 0$ のとき

$$x(k+1) = x(k) + \frac{u_1(k)}{u_2(k)} L \left\{ \sin \left(\frac{1}{L} u_2(k) \Delta T + \theta(k) \right) - \sin \theta(k) \right\} \quad (15)$$

$$y(k+1) = y(k) - \frac{u_1(k)}{u_2(k)} L \left\{ \cos \left(\frac{1}{L} u_2(k) \Delta T + \theta(k) \right) - \cos \theta(k) \right\} \quad (16)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \frac{1}{L} u_2(k) \Delta T \quad (17)$$

が得られる. $\dot{\theta} = 0$ のときには $u_2 = 0$ となることを考慮して離散化すると

$$x(k+1) = x(k) + u_1(k) \cos \theta(k) \Delta T \quad (18)$$

$$y(k+1) = y(k) + u_1(k) \sin \theta(k) \Delta T \quad (19)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) \quad (20)$$

となる.

ここで, 求める粘性解 V_d の範囲と, その範囲内の格子上の点の座標を決定する. V_d を求める範囲を

$$\begin{aligned} x &\in [x_{\min}, x_{\max}] \\ y &\in [y_{\min}, y_{\max}] \\ \theta &\in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

とし, その範囲内をそれぞれ $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ 分割する. ただし, 上式で定義される解を求める範囲は, 原点と原点に可到達な領域が含まれるように決定する必要がある. 以上の手順で形成された格子上の座標を

$$x_l = x_{\min} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\eta_x} l, \quad l = 0, \dots, \eta_x \quad (21)$$

$$y_m = y_{\min} + \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\eta_y} m, \quad m = 0, \dots, \eta_y \quad (22)$$

$$\theta_n = -\pi + \frac{2\pi}{\eta_\theta} n, \quad n = 0, \dots, \eta_\theta \quad (23)$$

とする.

最後に, 式 (13) を最小とするような入力 u を探索し, V_d を求める方法について考える. V_d を求める範囲が決定されたことにより, 入力範囲も制限される. そこで, 制限された範囲内で入力を変化させ, 式 (14) の右边を満たすような入力 u を見つける. $\dot{\theta} \neq 0$ のとき, 式 (17) より θ は u_2 にのみ比例していることから, まずは u_2 の上限, 下限をそれぞれ

$$u_{2\max} = \frac{L(\pi - \theta(k))}{\Delta T} \quad (24)$$

$$u_{2\min} = \frac{L(-\pi - \theta(k))}{\Delta T} \quad (25)$$

のように決定し ($u_{2\min} > u_{2\max}$ の場合には式 (25) の右边と式 (24) の右边を入れかえる), その範囲を λ_2 分割した一点

$$u_{2j} = u_{2\min} + \frac{u_{2\max} - u_{2\min}}{\lambda_2} j, \quad j = 0, \dots, \lambda_2 \quad (26)$$

に u_2 を固定して, 今度は u_1 を変化させる. u_2 が固定されたことにより, 式 (15) (16) と先に決定した $[x_{\min}, x_{\max}], [y_{\min}, y_{\max}]$ から, u_1 の上限 $u_{1\max}$ と下限 $u_{1\min}$ が決定できる. $\sin \theta(k+1) - \sin \theta(k) \neq 0$ のとき, 式 (15) を $u_1(k)$ について解いた

$$u_1(k) = \frac{u_2(k)(x(k+1) - x(k))}{L\{\sin(u_2(k)\Delta T/L + \theta(k)) - \sin \theta(k)\}} \quad (27)$$

の $x(k+1)$ に $x_{\min}, x_{\max}$ を代入したものをそれぞれ $u_{1\lim1}, u_{1\lim2}$, $\cos \theta(k+1) - \cos \theta(k) \neq 0$ のとき, 式 (16) を $u_1(k)$ について解いた

$$u_1(k) = -\frac{u_2(k)(y(k+1) - y(k))}{L\{\cos(u_2(k)\Delta T/L + \theta(k)) - \cos \theta(k)\}} \quad (28)$$

の $y(k+1)$ に $y_{\min}, y_{\max}$ を代入したものをそれぞれ $u_{1\lim3}, u_{1\lim4}$ とする. ここで, $u_{1\lim1}, u_{1\lim2}, u_{1\lim3}, u_{1\lim4}$ はそれぞれ三輪移動体が現在位置から $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ に到達するのに必要な入力である. $u_{1\lim1}, u_{1\lim2}, u_{1\lim3}, u_{1\lim4}$ のうち, 最も大きいものと最も小さいものは, V_d を得たい範囲の外に到達する入力となっていることから, それ以外の二つのうち小さいものを $u_{1\min}$, 大きいものを $u_{1\max}$ としてその範囲を λ_1 分割した一点

$$u_{1i} = u_{1\min} + \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} i, \quad i = 0, \dots, \lambda_1 \quad (29)$$

に u_1 を固定し, 式 (14) の右边

$$V_d(\phi(k+1)) + (\phi^2(k+1) + u^2(k))\Delta T \quad (30)$$

を計算する. これを $i = 0, \dots, \lambda_1, j = 0, \dots, \lambda_2$ に関して繰り返し行い, 式 (30) が最小となるような入力 u を見つける. なお, $\sin \theta(k+1) - \sin \theta(k) = 0$ のときには $u_{1\lim3}, u_{1\lim4}$ のうち小さいものを $u_{1\min}$, 大きいものを $u_{1\max}$ とし, $\cos \theta(k+1) - \cos \theta(k) = 0$ のときには $u_{1\lim1}, u_{1\lim2}$ のうち小さいものを $u_{1\min}$, 大きいものを $u_{1\max}$ として, 同様の手順を行う. $\dot{\theta} = 0$ のときには, 式 (27) の代わりに, 式 (18) を $u_1(k)$ について解いた

$$u_1(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{\cos \theta(k)} \quad (31)$$

を, 式 (28) の代わりに, 式 (19) を $u_1(k)$ について解いた

$$u_1(k) = \frac{y(k+1) - y(k)}{\sin \theta(k)} \quad (32)$$

を用いて同様の手順を行う.

式 (30) を最小とするような u_1 が求められたならば, 今度は

$$u_{1\min} = -\frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} \quad (33)$$

$$u_{1\max} = \frac{u_{1\max} - u_{1\min}}{\lambda_1} \quad (34)$$

と置きかえて, 先ほどと同様に式 (33) (34) で決定された新たな $[u_{1\min}, u_{1\max}]$ の範囲内で, 式 (30) を最小とするような u_1 を求める. この手順によって, 式 (30) をより小さくす

るような u_1 を探索することができる。そして、最小のものを (x_l, y_m, θ_n) における $V_d(\phi(k))$ として記憶する。

以上の手順をすべての (x_l, y_m, θ_n) に関して繰り返し行い、 $V_d(\phi(k+1))$ と $V_d(\phi(k))$ との差が十分小さくなったならば、 $V_d(\phi(k))$ を求める粘性解として終了する。この $V_d(\phi(k+1))$ と $V_d(\phi(k))$ との差は、真の解と数値解との間の誤差をどの程度までゆるすのかということに依存していることから、必要な精度に応じて差の絶対値を決定すればよい。

ここで提案する手法をまとめると、次のようになる。

Step 1 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を得たい (x, y, θ) の範囲を、原点と原点に可到達な領域が含まれるように決定する。そしてこの範囲をそれぞれ $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ 分割し、格子を構成する。

Step 2 格子上の一点から、解を得たい範囲の境界までの入力 u_1 の上限、下限を、 $\dot{\theta} \neq 0$ のときには式 (27)(28) を、 $\dot{\theta} = 0$ のときには式 (31)(32) を用いて、 u_2 の上限、下限をそれぞれ式 (24)(25) ($\dot{\theta} = 0$ のときには 0 となる) のように求め、それぞれ λ_1, λ_2 分割する。

Step 3 Step 2 で決定された入力を、 $\dot{\theta} \neq 0$ のときには式 (15)(16)(17)、 $\dot{\theta} = 0$ のときには式 (18)(19)(20) に代入して次のステップの状態を求め、それを式 (30) に代入して、その最小値と最小値を与える u_1, u_2 を求める。

Step 4 Step 3 で得られた u_1 より、今度は $u_{1 \min} u_{1 \max}$ をそれぞれ式 (33)(34) のようにおきかえて、Step 3 をもう一度行う。ここで得られた式 (30) の最小値を、その格子点における V_d として記憶する。

Step 5 $V_d(\phi(k+1))$ と $V_d(\phi(k))$ との間の差が十分に小さくなったならば終了する。そうでなければ Step 2 にもどる。

Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める別の方法として、有限差分近似を用いる方法が知られている [9][10]。有限差分近似では粘性解の偏微分値を一次近似で近似していることから、格子間隔を極めて小さくとらなければ解の精度が悪くなるということが考えられる。しかし本手法ではそのような近似をしていないことから、格子間隔をそれほど小さくすることなく良い精度の粘性解を求めることができると考えられる。実際、後に示すシミュレーション結果より、本論文における手法のほうが有限差分近似法よりも良い精度となっていることが分かる。

5. Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を用いた制御則の計算法

式 (10)(11) で表される制御則を計算するためには、前章で求めた Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を状態 ϕ で偏微分した値が必要となる。そこで、 $V(\phi)$ をスプライン関数を用いて近似し、それを微分して $\partial V / \partial \phi$ の近似値を求める方法について述べる。

三輪移動体が、 $\phi_r = (x_r, y_r, \theta_r)$ にあるとする。このとき、 $V(x, y_r, \theta_r)$ が得られれば、それを x に関して微分して $x = x_r$ を代入することで $\partial V / \partial x(x_r, y_r, \theta_r)$ を求めることができる。よって、まずは $(x, y, \theta) = (x_l, y_m, \theta_r)$ ($l = 0, \dots, \eta_x, m = 0, \dots, \eta_y$) における V の近似値 $V(x_l, y_m, \theta_r)$ を求めるために、

$V(x_l, y_m, \theta)$ を

$$V(x_l, y_m, \theta) \approx a_0^{l,m} + a_1^{l,m} \theta + c_0^{l,m} (\theta - \theta_0)_+^3 + c_1^{l,m} (\theta - \theta_1)_+^3 + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} (\theta - \theta_{\eta_\theta})_+^3 \quad (35)$$

で近似する。上式において、 $(\theta - \theta_i)_+^3$ ($i = 0, \dots, \eta_\theta$) は

$$(\theta - \theta_i)_+^3 = \begin{cases} (\theta - \theta_i)^3 & ((\theta - \theta_i) > 0) \\ 0 & ((\theta - \theta_i) \leq 0) \end{cases}$$

を意味する。また $a_0^{l,m}, a_1^{l,m}, c_0^{l,m}, \dots, c_{\eta_\theta}^{l,m}$ は定数であり

$$a_0^{l,m} + a_1^{l,m} + c_0^{l,m} + c_1^{l,m} + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} = 0$$

$$c_0^{l,m} \theta_0 + c_1^{l,m} \theta_1 + \dots + c_{\eta_\theta}^{l,m} \theta_{\eta_\theta} = 0$$

を満たす。 $V(x_l, y_m, \theta_0), \dots, V(x_l, y_m, \theta_{\eta_\theta})$ を式 (35) に代入して $a_0^{l,m}, a_1^{l,m}, c_0^{l,m}, \dots, c_{\eta_\theta}^{l,m}$ を決定し、 $\theta = \theta_r$ を代入することにより、 $V(x_l, y_m, \theta_r)$ が得られる。

次に、式 (35) で与えられる $V(x_l, y_m, \theta_r)$ を用いて $V(x_l, y_r, \theta_r)$ を求める。4 節で求めた粘性解 V が、任意の θ において x 軸、 y 軸上で微分不可能となっていることが 6 節のシミュレーション結果より見てとることができることから、以下のように y_r が正の場合と負の場合をわけてスプライン関数を構成し、 x 軸近傍における V の偏微分値が不連続となるようにする。

$$V(x_l, y, \theta_r) \approx \begin{cases} a_0^l + a_1^l y + c_0^l (y - y_0)_+^3 + c_1^l (y - y_1)_+^3 + \dots + c_{\eta_y/2}^l (y - y_{\eta_y/2})_+^3 & (y_r < 0) \\ a_0^l + a_1^l y + c_0^l (y - y_{\eta_y/2})_+^3 + c_1^l (y - y_{\eta_y/2+1})_+^3 + \dots + c_{\eta_y/2}^l (y - y_{\eta_y})_+^3 & (y_r \geq 0) \end{cases} \quad (36)$$

もし $y_r < 0$ ならば $V(x_l, y_0, \theta_r), \dots, V(x_l, y_{\eta_y/2}, \theta_r)$ を、 $y_r \geq 0$ ならば $V(x_l, y_{\eta_y/2}, \theta_r), \dots, V(x_l, y_{\eta_y}, \theta_r)$ を式 (36) に代入して $a_0^l, a_1^l, c_0^l, \dots, c_{\eta_y/2}^l$ を決定し、 $y = y_r$ を代入することで、 $V(x_l, y_r, \theta_r)$ が求められる。

最後に、上の手順で得られた $V(x_l, y_r, \theta_r)$ を用いて $V(x, y_r, \theta_r)$ を求める。先ほどと同様に y 軸近傍で V の偏微分値が不連続となるようにするために、 x_r が正の場合と負の場合をわけて、次のようにスプライン関数を構成する。

$$V(x, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} a_0 + a_1 x + c_0 (x - x_0)_+^3 + \dots + c_{\eta_x/2} (x - x_{\eta_x/2})_+^3 & (x_r < 0) \\ a_0 + a_1 x + c_0 (x - x_{\eta_x/2})_+^3 + \dots + c_{\eta_x/2} (x - x_{\eta_x})_+^3 & (x_r \geq 0) \end{cases} \quad (37)$$

$x_r < 0$ のときには $V(x_0, y_r, \theta_r), \dots, V(x_{\eta_x/2}, y_r, \theta_r)$ を、 $x_r \geq 0$ のときには $V(x_{\eta_x/2}, y_r, \theta_r), \dots, V(x_{\eta_x}, y_r, \theta_r)$ を式 (37) に代入して $a_0, a_1, c_0, \dots, c_{\eta_x/2}$ を決定する。そして、求めた $V(x, y_r, \theta_r)$ を x に関して微分して $x = x_r$ を代入することによって、 $\partial V / \partial x(x_r, y_r, \theta_r)$ の近似値が得られる。 $\partial V / \partial y(x_r, y_r, \theta_r), \partial V / \partial \theta(x_r, y_r, \theta_r)$ に関しても、以上の手順と同様にして求めることができる。

三輪移動体が原点のまわりの一格子内に到達したときには、後に示すシミュレーション結果のように微分不可能となる点が複雑になっており、微分不可能点を考慮したスプライン関数による近似では偏微分項がうまく表現できないと考えられる。そこで、 $\partial V/\partial x, \partial V/\partial y$ の計算法を、 $u_1 \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r + \Delta x, y_r, \theta_r) - V(x_r - \Delta x, y_r, \theta_r)}{2 \cdot \Delta x} \quad (38)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \frac{V(x_r, y_r + \Delta y, \theta_r) - V(x_r, y_r - \Delta y, \theta_r)}{2 \cdot \Delta y} \quad (39)$$

$u_1 = 0$ のとき

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} \frac{V(x_r + \Delta x, y_r, \theta_r) - V(x_r, y_r, \theta_r)}{\Delta x} & (x_r \geq 0) \\ \frac{V(x_r, y_r, \theta_r) - V(x_r - \Delta x, y_r, \theta_r)}{\Delta x} & (x_r < 0) \end{cases} \quad (40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_r, y_r, \theta_r) \approx \begin{cases} \frac{V(x_r, y_r + \Delta y, \theta_r) - V(x_r, y_r, \theta_r)}{\Delta y} & (y_r \geq 0) \\ \frac{V(x_r, y_r, \theta_r) - V(x_r, y_r - \Delta y, \theta_r)}{\Delta y} & (y_r < 0) \end{cases} \quad (41)$$

とする。上式において、 $\Delta x, \Delta y$ はそれぞれ

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\eta_x}, \quad \Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\eta_y}$$

である。式 (40)(41) は、三輪移動体が x 軸上、あるいは y 軸上に位置するときに、入力 $u_1 \neq 0$ となるようにするためである。あとは、求められた偏微分値の近似値を式 (10)(11) に代入することによって、点 (x_r, y_r, θ_r) における最適制御則 u_1, u_2 を計算することができる。

三輪移動体が初期点から原点近傍の一格子内に到達すると、その内部ではスプライン関数を用いても V の近似に誤差が生じることから、格子間隔が大きい場合には一格子内において原点への収束が期待どおりの精度とはならないことが考えられる。そこで、4 章で述べた方法を原点を含む単位格子内において、すなわち先の $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ を

$$x_{\min} = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\eta_x}, \quad x_{\max} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\eta_x}$$

$$y_{\min} = -\frac{y_{\max} - y_{\min}}{\eta_y}, \quad y_{\max} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\eta_y}$$

と置きかえて行い、三輪移動体とその範囲内に到達した場合には、先に求めた粘性解と切りかえて制御則を計算する。それによっても望んだとおりの原点への収束が得られない場合には、さらに同様の手順を新たな一格子内においても行うことで、収束の精度をさらに上げることができる。

また、微分不可能となる点が格子点上ではなく、格子点間に存在する場合が考えられる。入力 u_1 の符号が変化する前後の点にそのような微分不可能な点が存在するものと考えられることから、 u_1 の符号が変化する前の点だけを用いて V をスプライン関数で近似したものと、 u_1 の符号が変化した後の点だけを用いて V をスプライン関数で近似したものの交点を求めることで、格子点間における微分不可能な点を正確に求めることができる。これによってもさらに収束の精度が上がるものと期待できる。

6. シミュレーション結果

4, 5 章で述べた方法を用いてシミュレーションを行った。Table 1 に、シミュレーションに用いたパラメータを示す。また、三輪移動体が一格子の大きさよりもやや大きい $x \in [-0.3 \text{ [m]}, 0.3 \text{ [m]}]$ かつ $y \in [-0.3 \text{ [m]}, 0.3 \text{ [m]}]$ に入った場合には、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を求める範囲をこの範囲とし、 $\eta_x, \eta_y, \eta_\theta$ を 12 として求めた粘性解に切りかえて、制御則を構成した。これは、原点近傍の一格子内において Table 1 で構成される格子のみを用いるよりも、より精度の良い軌道を与えるためである。

Fig. 2 に 4 章で述べた方法により求めた Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の $\theta = 0$ における解を示す。Fig. 2 より、 x 軸、 y 軸上で微分不可能となっていることが分かり、本論文で提案した手法で求めた Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解が粘性解となっていることが分かる。

また、Fig. 3, Fig. 4 は、それぞれ三輪移動体の初期値を $(0, 2, 0), (2, 0, \pi/2)$ とした場合の軌道である。実線が原点近傍の一格子内での粘性解の切りかえを行わなかった場合、点線が切りかえを行った場合である。いずれの場合も、粘性解を用いて制御則を構成したことにより軌道に切りかえが生じている。そして Fig. 3 ではその軌道に違いは生じないが、Fig. 4 では Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解の切りかえを行ったことによって、三輪移動体が $x = 0.3 \text{ [m]}$ に到達したあたりからさらに原点に収束している。

初期値を $(0, 2, 0)$ としたときの、本論文における手法により粘性解を求めた場合と、有限差分近似法により粘性解を求めた場合のシミュレーション結果は、Fig. 5 となる。実線が本論文

Table 1 Simulation parameters

parameter	value
$L \text{ [m]}$	0.5
$x_{\min} \text{ [m]}$	-3.0
$x_{\max} \text{ [m]}$	3.0
$y_{\min} \text{ [m]}$	-3.0
$y_{\max} \text{ [m]}$	3.0
η_x	24
η_y	24
η_θ	24
$\Delta T \text{ [sec]}$	0.1

Fig. 2 Viscosity solution of the Hamilton-Jacobi partial differential equation at $\theta = 0$

Fig. 3 Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ Fig. 4 Optimal trajectory from $(2, 0, \pi/2)$ Fig. 5 Optimal trajectory from $(0, 2, 0)$ (compared with finite difference method)

において提案する手法を用いて求めた粘性解を用いた場合の軌道、点線が有限差分近似法により求めた粘性解を用いた場合の軌道である。有限差分近似法を用いた場合は、原点近傍において三輪移動体の軌道に誤差が生じていることが分かる。

初期値が $(0, 0, \pi/2)$ の場合のシミュレーション結果は、Fig. 6 のようになる。先ほどと同様に、実線が原点近傍での粘性解の切りかえを行わなかった場合、点線が切りかえを行った場合であるが、 (x, y) の初期値が原点上でありながら、式 (38)～(41) で表される $\partial V/\partial x$ および $\partial V/\partial y$ の近似により、数回の

Fig. 6 Optimal trajectory from $(0, 0, \pi/2)$ Fig. 7 Optimal trajectory from $(1, 2, \pi)$ to $(2, 4, \pi/2)$

切りかえして原点へと収束している。

終端点 $(x_{fp}, y_{fp}, \theta_{fp})$ が原点以外の場合には、次のような座標変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{fp} & \sin \theta_{fp} \\ -\sin \theta_{fp} & \cos \theta_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{fp} \\ y - y_{fp} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\theta' = \theta - \theta_{fp} \quad (43)$$

を行い、 (x', y', θ') に対して式 (10)(11) で表される制御入力を用いることで、点 $(x_{fp}, y_{fp}, \theta_{fp})$ に対して漸近安定とすることができる。Fig. 7 に、初期点を $(1, 2, \pi)$ 、終端点を $(2, 4, \pi/2)$ とした場合のシミュレーション結果を示す。

7. おわりに

本論文では、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を動的計画法を用いて求める方法と、その解を微分不可能点を考慮して近似することで制御則を構成する方法について述べた。またシミュレーションにより、その有効性について示した。

参考文献

- [1] M.G. Crandall and P.L. Lions: "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations," Amer. Math. Soc., vol.277, no.1, pp.1-42, 1983.
- [2] 石井仁司: "非線形偏微分方程式の粘性解について", 数学, vol.46, pp.144-157, 1994.
- [3] 石井仁司: "粘性解とその応用", 数学, vol.47, pp.97-110, 1995.
- [4] 中村仁彦: "非ホロノミックロボットシステム, 講座全5回", 日本ロ

ボット学会誌, vol.11, no.4~7, vol.12, no.2, 1993~1994.

- [5] 三平満司: “非ホロノミック系のフィードバック制御”, 計測と制御, vol.36, no.6, pp.396-403, 1997.
- [6] 三平満司, 伊藤毅: “非線形制御理論を用いた車両の経路追従と移動計画”, システム制御情報学会論文誌, vol.6, no.1, pp.37-47, 1993.
- [7] 成清辰生, 杉田澄雄: “Chained Form で記述された非ホロノミック系の指数安定化”, 計測自動制御学会論文集, vol.32, no.8, pp.1310-1312, 1996.
- [8] A. Astolfi: “Discontinuous control of nonholonomic systems,” Syst. Contr. Lett., vol.27, pp.37-45, 1996.
- [9] H.J. Kushner and P. Dupuis: Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [10] W.H. Fleming and H.M. Soner: Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag, New York, 1993.

今福 啓 (Kei Imafuku)

1972 年 8 月 23 日生. 1999 年 3 月奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了. 同年 4 月より, 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手. 非線形制御理論, ノンホロノミックシステムの制御に関心を持つ. 工学博士.

(日本ロボット学会正会員)

西谷 紘一 (Hirokazu Nishitani)

1945 年 7 月 29 日生. 1974 年京都大学大学院工学研究科博士課程 (化学工学専攻) 単位取得退学. 同年大阪大学基礎工学部助手. 講師, 助教授, 教授を経て 1993 年から奈良先端科学技術大学院大学教授. プロセス制御, プロセスシステム工学に関する研究を行ってきた. 工学博士. システム制御情報学会, 化学工学会, AIChE などの会員.

山下 裕 (Yuh Yamashita)

1961 年 7 月 25 日生. 1986 年 3 月北海道大学大学院工学研究科修士課程修了. 1988 年 3 月同博士課程退学. 同年 4 月より北海道大学工学部助手 1996 年 4 月より奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授, 現在に至る. 非線形制御理論, ニューラルネットワークによる制御, 学習制御などの研究に従事. 博士 (工学), システム制御情報学会, 電子情報通信学会, 化学工学会などの会員.